

动态 Rindler 时空中 Dirac 旋量粒子的 四分量波函数及 Hawking-Unruh 热效应*

包爱东 朱建阳^① 赵 峰

北京师范大学物理系, 北京 100875

1992 年 12 月 1 日收到

在动态 Rindler 时空中对 Dirac 旋量粒子的动力学行为进行了研究, 得到 Dirac 粒子四分量波函数的显式表示. 同时还发现, 对于一个作变加速直线运动的 Rindler 观察者存在一个随时间而变的视界, 并将探测到随时间而变的热辐射, 辐射温度正比于观察者的瞬时加速度, 从而再一次证实了动态 Rindler 效应的存在.

PACC: 0420; 9760L

回顾著名的 Rindler 效应^[1], 我们知道在 Minkowski 真空中一个作匀加速直线运动的 Rindler 观察者发觉自己所处的状态并非真空态, 而是温度为 T (T 正比于匀加速度) 的热态, 并感受到谱为 $[\exp(\frac{\omega}{K_B T}) - 1]^{-1}$ 的热辐射. 然而, 我们希望进一步了解当 Rindler 观察者作变加速运动时所探测到的情况. 最近^[2], 我们通过研究动态 Rindler 时空中 Klein-Gordon 标量粒子的动力学行为, 发现对于作变加速直线运动的 Rindler 观察者存在一个随时间而变的视界, 并感受到随时间而变的热辐射, 辐射温度正比于瞬时加速度. 为了进一步研究证实这一动态 Rindler 效应, 本文将考察动态 Rindler 时空中 Dirac 旋量粒子的动力学行为, 其结果与文献[2]完全一致. 这说明我们所得到的动态 Rindler 效应是可靠的.

描述动态 Rindler 时空的线元为^[3]

$$ds^2 = (1 + gx)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1)$$

式中 $g = g(t)$ 为作变加速直线运动的 Rindler 观察者的瞬时加速度. 对于该时空中旋量粒子(质量为 u_0)的动力学行为由 Dirac 方程描述^[4]

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \nabla_{ab} P^a + i u_0 \bar{Q}_b &= 0, \\ \sqrt{2} \nabla_{ab} Q^a + i u_0 \bar{P}_b &= 0, \end{aligned} \quad (\text{旋坐标形式}) \quad (2)$$

式中 P^a, Q^a 为两个二分量的旋量, ∇_{ab} 为旋协变微分. 选取一组零标架 $(l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu)$, 使之构成零矢量并满足伪正交条件和度规条件

$$\begin{aligned} l^\mu l_\mu &= n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \\ l^\mu n_\mu &= -m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金资助的课题.

① 现在工作单位: 抚州师范专科学校物理系, 抚州 344000.

$$\begin{aligned} l^\mu m_\mu &= l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \\ g_{\mu\nu} &= l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu, \end{aligned} \quad (3)$$

则方程(2)可用旋标架形式表示为

$$\begin{aligned} (D + \epsilon - \rho)F_1 + (\bar{\delta} + \pi - \alpha)F_2 &= i\mu_0 G_1 / \sqrt{2}, \\ (\Delta + \mu - r)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 &= i\mu_0 G_2 / \sqrt{2}, \\ (D + \epsilon^* - \rho^*)G_2 - (\bar{\delta} + \pi^* - \alpha^*)G_1 &= i\mu_0 F_2 / \sqrt{2}, \\ (\Delta + \mu^* - r^*)G_1 - (\delta + \beta^* - \tau^*)G_2 &= i\mu_0 F_1 / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 F_1, F_2, G_1, G_2 为四分量旋量, $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$ 为普通微分算符, ϵ, ρ 等为旋系数^[5]. 它们的定义为

$$\begin{aligned} F_1 &= P^0, F_2 = P^1, G_1 = \bar{Q}^1, G_2 = -\bar{Q}^0, \\ D &= l^\mu \partial_\mu, \Delta = n^\mu \partial_\mu, \delta = m^\mu \partial_\mu, \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu, \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(l_{\mu\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu\nu} \bar{m}^\mu l^\nu), \quad \alpha = \frac{1}{2}(l_{\mu\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu), \\ \gamma &= \frac{1}{2}(l_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu), \quad \beta = \frac{1}{2}(l_{\mu\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu\nu} \bar{m}^\mu m^\nu), \\ \rho &= l_{\mu\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \quad \pi = -n_{\mu\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, \quad \mu = -n_{\mu\nu} \bar{m}^\mu m^\nu, \quad \bar{l} = l_{\mu\nu} m^\mu n^\nu. \end{aligned} \quad (5)$$

考虑到零标架的选择有相当多的自由性,但由于这种规范自由性不影响物理实质. 因此我们可以选择一组能最大限度地使方程(4)简化的零标架,经过精心构造,既能满足条件(3)式,又能简化方程(4)的零标架为

$$\begin{aligned} l_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(1 + gx), 1, 0, 0], \quad n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1 + gx), -1, 0, 0], \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 0, 1, i], \quad \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 0, 1, -i]. \end{aligned} \quad (6)$$

由(6)式有

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{1+gx}, -1, 0, 0], \quad n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{1+gx}, 1, 0, 0], \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 0, -1, -i], \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 0, -1, i]. \end{aligned} \quad (7)$$

对于所选定的零标架,旋系数变得十分简单,经计算得到

$$\epsilon = \gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{g}{1+gx}, \quad \alpha = \beta = \rho = \pi = \mu = \tau = 0. \quad (8)$$

将(6), (7), (8)式代入(4)式,得到

$$\begin{aligned} [\frac{1}{1+gx} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{g}{2(1+gx)}]F_1 + (-\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z})F_2 &= i\mu_0 G_1, \\ [\frac{1}{1+gx} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{g}{2(1+gx)}]F_2 + (-\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z})F_1 &= i\mu_0 G_2, \\ [\frac{1}{1+gx} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{g}{2(1+gx)}]G_2 - (-\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z})G_1 &= i\mu_0 F_2, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{1+gx}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{g}{2(1+gx)}\right]G_1 - \left(-\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z}\right)G_2 = i\mu_0 F_1. \quad (9)$$

根据方程(9)的对称性质,可作如下形式的分离变量:

$$\begin{aligned} F_1 &= R_-(t,x)S_-(y,z), & F_2 &= R_+(t,x)S_+(y,z), \\ G_1 &= R_+(t,x)S_-(y,z), & G_2 &= R_-(t,x)S_+(y,z). \end{aligned} \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式,可得到关于 $R_{\mp}(t,x)$ 和 $S_{\mp}(y,z)$ 所满足的方程

$$\begin{aligned} (1+gx)^2 \frac{\partial^2 R_{\mp}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_{\mp}}{\partial t^2} + \frac{x\dot{g} \pm g(1+gx)}{1+gx} \frac{\partial R_{\mp}}{\partial t} + g(1+gx) \frac{\partial R_{\mp}}{\partial x} \\ + \left[\pm \frac{\dot{g}}{2(1+gx)} - \frac{g^2}{4} - (1+gx)^2(\lambda^2 + \mu_0^2)\right]R_{\mp} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S_{\mp} + \lambda^2 S_{\mp} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

式中 λ 为分离常数. (11)式即为分离变量后所得到的完全由普通导数表示的退耦方程.

对方程(11)作如下形式的 Tortoise 变换:

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{1}{2\kappa} \ln(x - x_H), & y_* &= y = y_0, \\ z_* &= z - z_0, & v_* &= t - t_0, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 x_H 为视界位置, κ 为调节参数(后面将看到 κ 即为表征视界温度的函数), y_0, z_0, t_0 为某一组常数,且 κ, y_0, z_0, t_0 均与 Tortoise 变换无关. 方程(11)经 Tortoise 变换后为

$$\begin{aligned} \frac{[(1+gx)^2 - \dot{x}_H^2]}{2\kappa(x-x_H)\dot{x}_H} \frac{\partial^2 R_{\mp}}{\partial x_*^2} + 2 \frac{\partial R_{\mp}}{\partial x_* \partial v_*} - \frac{2\kappa(x-x_H)}{\dot{x}_H} \frac{\partial^2 R_{\mp}}{\partial v_*^2} \\ + \left[\frac{\dot{x}_H^2 - (1+gx)^2}{(x-x_H)\dot{x}_H} + \frac{\ddot{x}_H}{\dot{x}_H} - \frac{x\dot{g} \pm g(1+gx)}{1+gx} + \frac{g(1+gx)}{\dot{x}_H} \right] \frac{\partial R_{\mp}}{\partial x_*} \\ + \frac{2\kappa(x-x_H)}{\dot{x}_H(1+gx)} [x\dot{g} \pm g(1+gx)] \frac{\partial R_{\mp}}{\partial v_*} + \frac{2\kappa(x-x_H)}{\dot{x}_H} \left[\pm \frac{\dot{g}}{2(1+gx)} \right. \\ \left. - \frac{g^2}{4} - (1+gx)^2(\lambda^2 + \mu_0^2)\right]R_{\mp} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2}\right)S_{\mp} + \lambda^2 S_{\mp} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

文献[6,7]指出由于 Hawking 辐射是一种量子效应,因而用 Tortoise 坐标表示的粒子动力学方程在视界附近应该约化为波动方程. 显然,当

$$\lim_{x \rightarrow x_H} [(1+gx)^2 - \dot{x}_H^2] = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_H} \frac{(1+gx)^2 - \dot{x}_H^2}{2\kappa(x-x_H)\dot{x}_H} = 1, \quad (15)$$

方程(13)在视界附近的渐近形式变为

$$\frac{\partial^2 R_{\mp}}{\partial x_*^2} + 2 \frac{\partial R_{\mp}}{\partial x_* \partial v_*} \mp g \frac{\partial R_{\mp}}{\partial x_*} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 S_{\mp}}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2 S_{\mp}}{\partial z_*^2} + \lambda^2 S_{\mp} = 0. \quad (17)$$

这就是通常的波动方程.

可以通过下面的分析来考证上述两个极限方程的正确性. 首先利用零曲面条件

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0, \quad (18)$$

可以验证(14)式为严格保证的, 而(15)式等号左边为 $\frac{0}{0}$ 不定型, 其极限值可能等于某一有限值, 但由于有调节参数 κ 的存在, 完全可以令其值为 1. 这样由(14)和(15)这两个极限方程可以得到视界位置和温度的表达式

$$\text{观察者加速时:} \quad x_H = \frac{\dot{x}_H - 1}{g(t)}, \quad \kappa = g(t), \quad (19)$$

$$\text{观察者减速时:} \quad x_H = -\frac{\dot{x}_H + 1}{g(t)}, \quad \kappa = -g(t). \quad (20)$$

解方程(17), 得到

$$\begin{aligned} R_{\mp}^{\text{in}} &\sim e^{-i\omega x_*}, & R_{\mp}^{\text{out}} &\sim e^{-i\omega x_*} e^{2i\omega x_*} e^{\pm g x_*}, \\ S_{\mp}^{\text{in}} = S_{\mp}^{\text{out}} &\sim e^{i(p_y y_* + p_z z_*)}. \end{aligned} \quad (21)$$

虽然只要求上述解在视界附近有意义, 但因为这时经 Tortoise 变换后已将视界推向坐标无限远 ($x \rightarrow x_H, x_* \rightarrow -\infty$). 因此我们必须对与 x_* 有关的 $R_{\mp}^{\text{out}}$ 是否解析和有界作必要的讨论.

$$\text{首先, 因为} \quad x_* = \frac{1}{2\kappa} \ln(x - x_H),$$

$$\text{所以 } R_{\mp}^{\text{out}} \text{ 可以写为} \quad R_{\mp}^{\text{out}} \sim e^{-i\omega x_*} (x - x_H)^{\frac{2i\omega \pm g}{2\kappa}}. \quad (22)$$

由此可看出 $R_{\mp}^{\text{out}}$ 只适合于描述 $x > x_H$ 区域, 视界表面上的每一点都是分支点, 即 $R_{\mp}^{\text{out}}$ 在视界上不确定. 为了求得视界内的 $R_{\mp}^{\text{out}}$, 需要把视界外的 $R_{\mp}^{\text{out}}$ 解析延拓到视界内^[8]. 为此把实 x 轴复化为 x 复平面, 沿复 x 平面内以 x_H 为中心, 无穷小半径为 $|x - x_H|$ 的下半圆周延拓到视界内, 则

$$(x - x_H) \rightarrow |x - x_H| e^{-i\pi} = (x_H - x) e^{-i\pi}. \quad (23)$$

解析延拓后, $R_{\mp}^{\text{out}}$ 变为

$$R_{\mp}^{\text{out}}(x < x_H) \sim e^{\pi\omega/\kappa} e^{\mp i g \pi / 2 \kappa} e^{-i\omega x_*} e^{2i\omega x_*} e^{\pm g x_*}. \quad (24)$$

其次, 当 Rindler 观察者加速 ($g > 0$) 或减速 ($g < 0$) 时, 因子 $e^{\pm g x_*}$ 在 x_H 附近的发散与收敛

$$\text{性质为} \quad g < 0, x \rightarrow x_H \quad \begin{cases} e^{-g x_*} \rightarrow 0, \\ e^{g x_*} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (25)$$

$$g > 0, x \rightarrow x_H \quad \begin{cases} e^{-g x_*} \rightarrow \infty, \\ e^{g x_*} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (26)$$

因此 $R_{\mp}^{\text{out}}$ 满足波函数条件的有限解为

$$\begin{cases} R_{-}^{\text{out}} \sim 0, & (g < 0, x > x_H) \\ R_{+}^{\text{out}} \sim e^{-i\omega x_*} e^{2i\omega x_*} e^{-g x_*}. \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} R_{-}^{\text{out}} \sim e^{-i\omega x_*} e^{2i\omega x_*} e^{g x_*}, \\ R_{+}^{\text{out}} \sim 0. \end{cases} \quad (g > 0, x > x_H) \quad (28)$$

$$\begin{cases} R_-^{\text{out}} \sim 0, & (g < 0, x < x_H) \\ R_+^{\text{out}} \sim e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}} e^{i\frac{g\pi}{2\kappa}} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{-gx_*}, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} R_-^{\text{out}} \sim e^{\pi\omega/\kappa} e^{-ig\pi/2\kappa} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{gx_*}, \\ R_+^{\text{out}} \sim 0, & (g > 0, x < x_H) \end{cases} \quad (30)$$

最后综合给出动态 Rindler 时空中, 位于视界附近的 Dirac 旋量粒子的四分量波函数, 并记为

$$\phi = [F_1, F_2, G_1, G_2]^T. \quad (31)$$

对于加速 ($g=g(t)>0$) Rindler 时空

$$\begin{aligned} \phi^{\text{in}} &\sim e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} \frac{1}{\sqrt{4}} [1, 1, 1, 1]^T, \\ \phi^{\text{out}}(x < x_H) &\sim e^{\pi\omega/\kappa} e^{-ig\pi/2\kappa} e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{gx_*} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 0, 0, 1]^T, \\ \phi^{\text{out}}(x > x_H) &\sim e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{gx_*} \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 0, 0, 1]^T. \end{aligned} \quad (32)$$

对于减速 ($g=g(t)<0$) Rindler 时空

$$\begin{aligned} \phi^{\text{in}} &\sim e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} \frac{1}{\sqrt{4}} [1, 1, 1, 1]^T, \\ \phi^{\text{out}}(x < x_H) &\sim e^{\pi\omega/\kappa} e^{ig\pi/2\kappa} e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{-gx_*} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 1, 1, 0]^T, \\ \phi^{\text{out}}(x > x_H) &\sim e^{i(p_y y_* + p_z z_*)} e^{-i\omega v_*} e^{2i\omega x_*} e^{-gx_*} \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 1, 1, 0]^T. \end{aligned} \quad (33)$$

式中 ω 为粒子的能量, p_x, p_z 为粒子动量沿 y, z 方向的投影.

出射波在视界处的散射几率为

$$\left| \frac{\phi^{\text{out}}(x > x_H)}{\phi^{\text{out}}(x < x_H)} \right|^2 = e^{-2\pi\omega/\kappa}. \quad (34)$$

遵循 Sannan^[9]建议的方法, 容易证明出射波具有黑体谱

$$N_\omega = \frac{1}{\exp(\frac{\omega}{k_B T}) + 1}, \quad (35)$$

$T = \frac{\kappa}{2\pi k_B}$, $\kappa = |g(t)|$, k_B 为 Boltzmann 常数. 结合文献[2], 有

$$N_\omega = \frac{1}{\exp(\frac{\omega}{k_B T}) \pm 1}, \quad (36)$$

式中“—”对应玻色子, “+”对应费密子.

通过对动态 Rindler 时空中 Klein-Gordon 标量粒子^[2]和 Dirac 旋量粒子动力学行为的研究, 证明了动态 Rindler 效应的存在. 即对于一个在 Minkowski 时空中作变加速直线

运动的观察者,将存在一个与加速度有关并随时间变化的视界,还将探测到随时间变化的热辐射,辐射温度正比于观察者的瞬时加速度.

- [1] W. G. Unruh, *Phys. Rev.*, **D14**(1976),870.
- [2] Zhao Zheng, Luo Zhiqiang and Huang Chaoguang, *Chinse Phys. Lett.*, **5**(1992),269.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman San Francisco, (1973),p. 173.
- [4] S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. London*, **349A**(1976),571.
- [5] E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3**(1962),566.
- [6] 赵峥、戴宪斯,科学通报,**36**(1991),1870.
- [7] Zhao Zheng and Dai Xianxin, *Modern Phys. Lett.*, **A7**(20)(1992),1771.
- [8] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev.*, **D14**(1976),332.
- [9] S. Sannan, *Gen. Rel. Grav.*, **20**(1988),239.

HAWKING-UNRUH THERMAL EFFECT AND FOUR-COMPONENT WAVE FUNCTION OF DIRAC SPINOR PARTICLES IN NON-STATIC RINDLER SPACE-TIME

BAO AI-DONG ZHU JIAN-YANG ZHAO ZHENG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 1 December 1992)

ABSTRACT

The dynamical properties of Dirac spinor particles in a non-static Rindler space-time is studied. The explicit representative of the four-component wave function of Dirac particles is obtained. A non-uniformly rectilinearly accelerating Rindler observer is accompanied by an event horizon depending on time. He explores some thermal radiation varying with time, whose temperature is proportional to the simultaneous acceleration. The existence of the non-static Rindler effect is confirmed.

PACC: 0420; 9760L