

随机共振问题 Fokker-Planck 方程 的数值研究

卢志恒 林建恒 胡 岗

北京师范大学物理系, 北京 100875

1992 年 4 月 20 日收到; 1993 年 3 月 8 日收到修改稿

本文用有限差分方法对一随机共振的 Fokker-Planck 方程的主要性质进行了广泛的数值研究. 结果表明, 当绝热近似条件 $\omega \ll D\Delta V$ 和小信号近似条件 $A \ll 1$ 得到满足时, 以往的解析近似理论结果与数值结果符合; 当驱动强度增加时, 则系统表现出明显的决定性非线性振动行为. 然而, 就随机共振问题本身而言, 绝热近似解析理论概括了在双稳系统中发生的随机共振的主要性质.

PACC: 0540; 0270

一、引 言

“随机共振”这个术语首先是由 Benzi^[1,2]和 Nicolis^[3]等人在研究全球气候以 10 万年为周期在“冰河期”和“间冰期”之间转换时提出来的, 随后在物理学一般意义上引起了广泛的兴趣, 并从理论和实验两方面展开了深入的研究^[8-11]. 应当特别指出, McNamara^[12]从分立两态的跃迁概念出发, 巧妙地研究了形如

$$dx/dt = ax - bx^3 + A\cos\omega t + \Gamma(t), \quad (1)$$

其中

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = q^2\delta(t - t')$$

的朗之万方程的随机共振基本特征.

胡岗^[13]则对相应的 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(C(x) + A\cos\omega t)P(x,t) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) \quad (2)$$

作了系统的研究. 胡岗和 McNamara 的工作是至今关于随机共振问题阐述得最系统的解析理论. 由于在求解朗之万方程(1)和 Fokker-Planck 方程(2)的一般解析解上存在的困难, 他们的理论都是在绝热近似条件下建立起来的.

为了验证他们所建立的近似解析理论的正确性, 胡岗和 McNamara 都做了相应模拟电路实验^[14,12]. 这些电路模拟的实验是有成果的, 自然也是非常重要的. 但是, 如所周知, 模拟电路实验存在着重要的局限性: 1) 模拟运算精度是受限制的. 2) 我们的理论研究的是无限大系综的统计性质, 而电路验证只能根据逐个实验所获结果进行统计平均, 所取样本点的数目是有限的.

由于这些限制,人们自然期待着数值解对于系统行为作出较为详尽的讨论,我们的工作就是在这样的背景下展开的.

一般而言,Risken^[15]所倡导的矩阵连分法是求解 Fokker-Planck 方程定态解的有力工具,其它的数值方法近来也有文献报道^[15].我们提出的局域修正方案可以有效地克服发散困难.比如应用 Risken 的方法 D 可小到 $D=0.1$,应用我们的方法可达到 $D=0.01$.这样满足我们所讨论的方程(2)所表示的随机共振问题的要求.由于这个方法已有专文报道^[17],本文将集中介绍本方法在随机共振问题应用所得到的主要结果.

本文将具体讨论朗之万方程为

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos \omega t + \Gamma(t), \quad (3)$$

相应的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(x - x^3 + A \cos \omega t) P(x,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) \quad (4)$$

的随机共振问题.

应用所提到的数值计算方法,在不同的输入信号幅度 A , 频率 ω , 和不同的噪声强度 $2D$ 的情况下,求得方程(4)的各种数值解 $P(x,t)$. 根据求得的 $P(x,t)$ 又可以求出 $x(t)$ 的数学期望值 $\langle x(t) \rangle$ 与参数 A, ω, D 的关系,从而刻划出随机共振的各种性质.

二、Fokker-Planck 方程解的一般特征

1. 概率密度函数 $P(x,t)$ 的演变过程 假定所讨论的系统的初始分布为峰值位于 $x = -1.0$, 标准偏差 $\sigma = 0.4$ 的高斯分布,在幅度 $A = 0.10$, 频率 $\omega = 0.05$ 的周期力驱动下,噪声强度 $D = 0.10$ 时, $x = +1.0, 0.0, -1.0$ 三处的概率密度 P 随时间 t 的演变过程如图 1(a)–(c). 我们惊奇地发现,只须经过一个驱动周期的时间过程,即 $t > T = 2\pi/\omega$ 时,系统就达到了一个稳态的周期过程. 由于朗之万方程(3)去掉随机力后实际上是一个过阻尼的瑞利方程. 之所以系统很快达到稳态,我们认为这与系统的过阻尼性质是相联系的. 阻尼很大,系统来不及振荡就达到稳定态.

图 2 给出 $t = 2T$ 时,概率密度随 x 的分布. 计算结果表明,一个周期($t = T$)和两个周期($t = 2T$)时的概率密度函数的方差为

$$\int [P(x,T) - P(x,2T)] dx \approx 10^{-4}, \quad (5)$$

即概率分布稳定后,相隔一个周期的误差不超过万分之一. 这证实了它的良好周期性.

观察图 1(a)和(c),可以看出, $x = 1.0$ 处和 $x = -1.0$ 处的概率密度变化的周期相同,都等于外加驱动力的周期,但变化趋势相反. 顺便指出,图 1(b)中 $x = 0.0$ 处的概率密度的变化周期显示为驱动周期的一半,即 $T/2$. 这是由于双稳势的稳定点 $x = +1.0$ (或 $x = -1.0$) 处的概率密度每从最大值变为最小值,或从最小值变为最大值时,势垒 $x = 0.0$ 处的概率密度都会变化一个周期,这一点可以从图 3 中清楚地看出.

2. 一维 Fokker-Planck 方程数值解的混合性(mixing) 人们曾经研究过随机共振系统的解的混合性问题. Jung 和 Hanggi^[11]曾把方程(4)推广到二维坐标方程:

$$\frac{\partial P(x, \phi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[C(x) + A \cos \phi]P(x, \phi, t) - \omega \frac{\partial}{\partial \phi}P(x, \phi, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, \phi, t), \quad (6)$$

其中 ϕ 为周期驱动力的初相, 他们假定 ϕ 也是随机的. Jung 和 Hanggi 指出, 由于方程(6)存在一对纯虚本征值, 因而, 它的力学性质是非混合的.

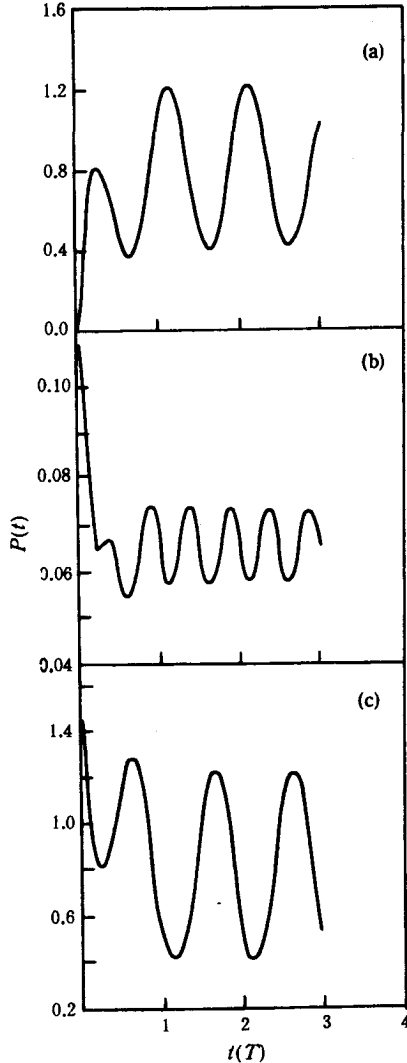


图 1 在周期驱动力幅度 $A=0.10$, 频率 $\omega=0.05$, 噪声强度 $D=0.10$ 的情形下, 不同空间位置处概率密度 P 随时间 t 的演化过程 (a) 为 $x=+1.0$; (b) 为 $x=0.0$; (c) 为 $x=-1.0$

移, 一个驱动周期之后, 即 $t \geq 2\pi/\omega$ 时, 这两曲线的概率密度的变化情况, 不论从变化幅度还是变化周期上都是完全一致的. 图 5 表示两个周期后 (即 $t=2T=4\pi/\omega$ 时), 这两种不同初始条件下的概率密度 P 随空间坐标 x 的分布曲线. 可以看出两条曲线几乎重合, 它

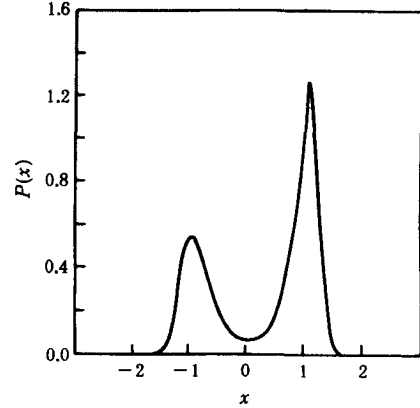


图 2 在周期驱动力幅度 $A=0.10$, 频率 $\omega=0.05$, 噪声强度 $D=0.10$ 的情形下, 达到稳态后 ($t=2T$), 概率密度 P 随空间坐标 x 的分布曲线

胡岗等人^[13]利用微扰法和 Floquet 理论, 在近似条件下研究了方程(4)的混合性, 并指出即使方程(6)的解是非混合的, 由于对它施行了对 ϕ 的积分, 失去了初态的信息, 因而方程(4)是混合的, 它的稳态解与初始条件无关.

这里我们用数值方法, 不受微扰法等近似条件的限制, 研究方程(4)的数值解在不同初始条件下的具体演化过程.

图 4 表示当周期驱动力幅度 $A=0.10$, 频率 $\omega=0.05$, 噪声强度 $D=0.10$ 时, 在不同的初始条件下, 双势阱的稳定点 $x=-1.0$ 处概率密度随时间演化过程的比较, 其中实线的初始概率分布为中心在 $x=-1.0$ 处, 标准偏差 $\sigma=0.4$ 的高斯分布; 虚线的初始概率分布为中心在原点, 标准偏差 $\sigma=0.6$ 的高斯分布. 前者的高斯峰也远比后者尖锐得多. 但是, 尽管初始分布如此不同, 随着时间的推移, 一个驱动周期之后, 即 $t \geq 2\pi/\omega$ 时, 这两曲线的概率密度的变化情况, 不论从变化幅度

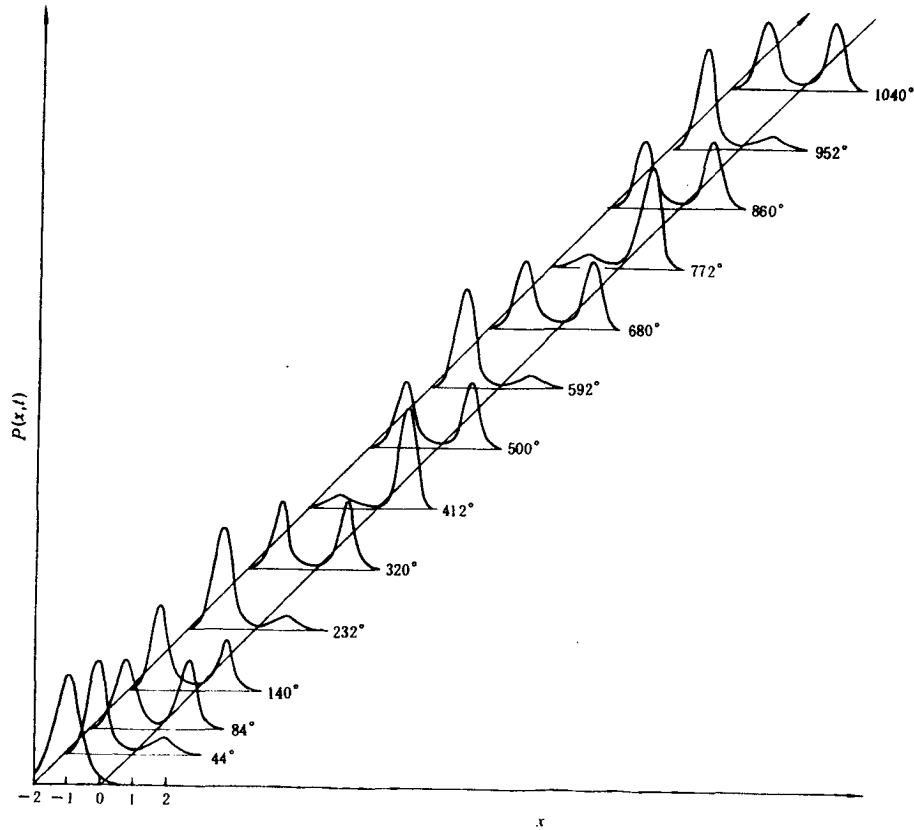


图3 在 $0-3T$ 内的不同时刻, 概率密度 P 随空间坐标 x 的分布曲线

们的均方差 $\sigma = 3.7 \times 10^{-5}$, 由此可见, 达到稳态后, 方程(4)的解不再包含初态信息, 它的稳态解具有混合性.

这个结果一方面证明了胡岗的结论的正确性, 另一方面为我们求解方程(4)提供重要的方便. 使我们可以按不同的情况选择任何具体的初始条件而又能保证所得结论的一般性.

3. $\langle x(t) \rangle$ 的简谐性 在简谐力驱动下, 讨论输出期望值的简谐性是讨论系统线性特征的同义语. 由于噪声的存在, 所讨论的非线性双稳系统在一定条件下将表现出线性特征. 绝热近似的解析理论, 把这个条件表述为 $A \ll 1, \omega \ll D, D \ll \Delta V$, 从而求出时间关系为一简谐函数的数学期望值 $\langle x(t) \rangle$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\epsilon \langle 1 | \partial / \partial x | 0 \rangle \langle 0 | x | 1 \rangle}{\sqrt{(\lambda_1^2 + \omega^2)}} \cos(\omega t + \alpha_{1,1}). \quad (7)$$

显然, 这个关系可以简单地写成

$$x = X \cos(\omega t + \phi). \quad (8)$$

现在转过来研究 $x(t)$ 的数值解. 求得了概率密度 $P(x, t)$ 之后, 很容易求出数学期望值

$$\langle x(t) \rangle = \int x P(x, t) dx.$$

前面的讨论指出, $P(x, t)$ 达到稳态后, 将随时间 t 作周期性变化, 因而 $\langle x(t) \rangle$ 也是周期性的.

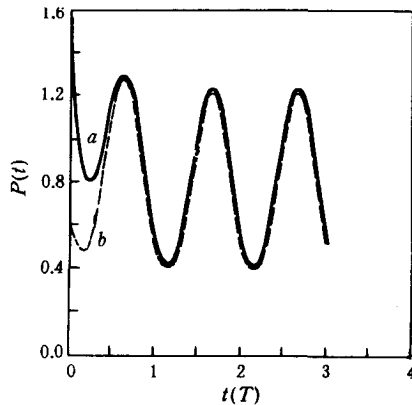


图 4 在周期驱动力幅度 $A=0.10$, 频率 $\omega=0.05$, 噪声强度 $D=0.10$ 的情形下, 在不同初始条件下, $x=-1.0$ 处概率密度 P 随时间 t 演化过程的比较. 曲线 a 为中心在 $x=-1.0$ 处, 标准偏差 $\sigma=0.4$ 的高斯分布; 曲线 b 为中心在 $x=0.0$ 处, 标准偏差 $\sigma=0.6$ 的高斯分布.

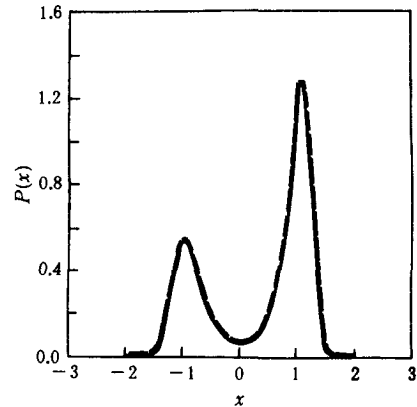


图 5 达到稳态后 ($t=2T$), 两种不同初始条件下的概率密度 P 随空间坐标 x 的分布曲线的比较.

研究 $A=0.5$ 和 0.20 两种情形. 计算结果如图 6(a) 和 (b) 所示. 解得的曲线与用 (8) 式的拟合曲线的均方差分别为 0.01 和 0.19 . 如果 A 再增大, 比如 $A=0.45$, 结果如图 7 所示, 有较强的高次谐波的出现有关, 致使基频的简谐近似变差. $\langle x(t) \rangle$ 虽是周期性的, 但失去了简谐性, 而非线性决定性方程

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos \omega t \quad (9)$$

的解很接近. 这是因为周期驱动力幅度 A 比势垒高度 ($\Delta V=0.25$) 高很多, 噪声强度 D 仍然很小, 朗之万方程 (3) 在极限情形下归结为非线性决定性方程 (9).

既然小信号下 $\langle x(t) \rangle$ 表现为 t 的简谐函数, 为方便起见, 记

$$\langle x(t) \rangle = X_m \cos(\omega t + \phi_0). \quad (10)$$

为了统一起见, 即使在 $A > \Delta V$ 的情形下, $\langle x(t) \rangle$ 与余弦曲线有较大偏离, 我们仍然用 X_m 和 ϕ_0 两个参数来描述. 但是在思想上应当注意到, 这时的 X_m 和 ϕ_0 不一定保留原来的余弦函数的幅度和初相的含义.

上面讨论了周期驱动力幅度 A 对 $\langle x(t) \rangle$ 的简谐性的影响. 与此同时, 我们特别注意到噪声强度 D 对 $\langle x(t) \rangle$ 的简谐性的影响. 图 8 表明, 同样在 $A=0.30$, $\omega=0.03$ 的条件下, 噪声强度由原来的 $D=0.10$ (实线) 增加到 0.15 (虚线) 后, $\langle x(t) \rangle$ 曲线用余弦曲线拟合的标准偏差由 $\sigma=0.84$ 减少到 0.29 , 而与 $A=0.20$ 的数据相接近. 可见在 A 较大时, 增加输入噪声的强度 D , 也能提高 $\langle x(t) \rangle$ 的简谐性, 至于这其中的物理机制有待于理论上进一步探讨.

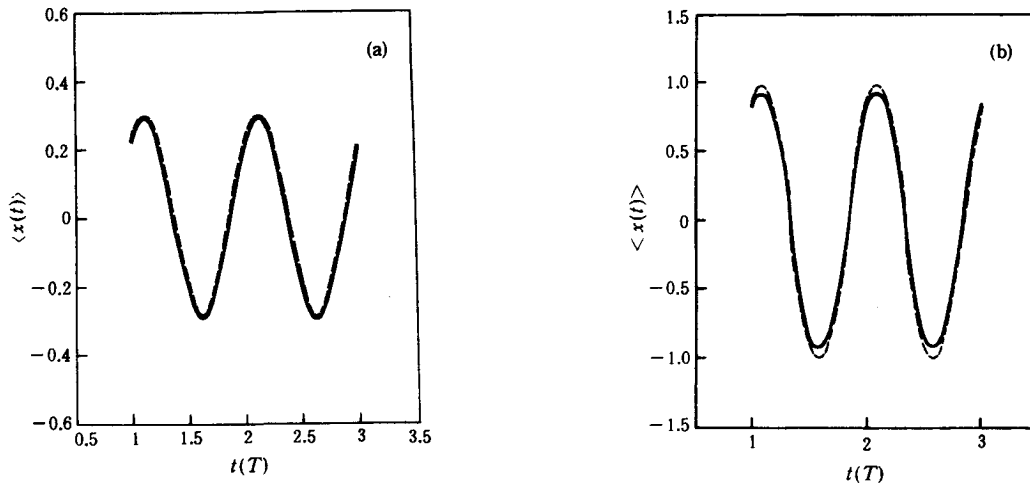


图 6 在驱动频率 $\omega=0.03$, 噪声强度 $D=0.10$ 的情形下, 计算得到的数学期望值 $\langle x(t) \rangle$ (实线) 和用余弦曲线拟合 (虚线) 的结果的比较 (a) 为驱动力幅度 $A=0.05$, 标准偏差 $\sigma=0.01$; (b) 为驱动力幅度 $A=0.20$, 标准偏差 $\sigma=0.19$

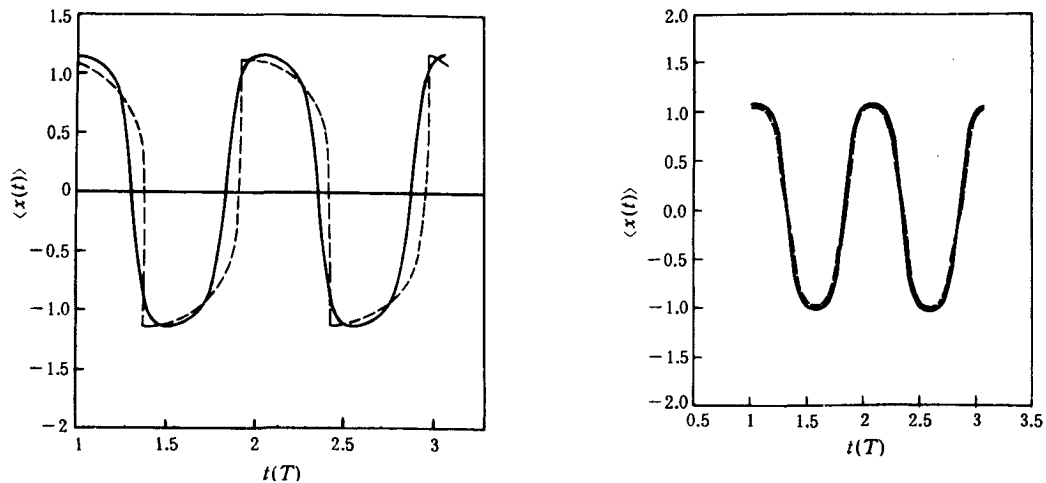


图 7 在周期驱动力幅度 $A=0.45$, 频率 $\omega=0.03$, 噪声强度 $D=0.10$ 的情形下, 由方程(4)求解的 $\langle x(t) \rangle$ 曲线 (实线) 与同样条件下的决定性方程(9)的解曲线 (虚线) 的比较

图 8 在周期驱动力幅度 $A=0.30$, 频率 $\omega=0.03$ 的情形下, 噪声强度不同时 (实线为 $D=0.10$; 虚线为 $D=0.15$) 的数学期望值 $\langle x(t) \rangle$ 的比较

三、随机共振

现在研究随机共振问题. 首先研究噪声强度 D 对信号振幅 X_m 的影响, 然后研究 D 对输出相位 ϕ 的影响.

1. 不同驱动频率下的随机共振现象 图 9 表示周期驱动力幅度一定, 频率不同的一簇 X_m-D 曲线. 可以看出, 每条曲线存在一个极大值. X_m 关于 D 的极大值的存在具有重

要意义,我们称系统发生了随机共振.发生随机共振的噪声强度,记作 D_r ,幅度记作 X_r .由图 9 可以看出,随着驱动频率 ω 的增加, D_r 值随之增大,而 X_r 反而减小.图 10 表示由随机力引起的共振值随受迫频率而单调降低,其中实线为本工作的数值计算结果,锁线为根据绝热近似理论得到的结果.比较实线和锁线,可以看出,只当 $\omega \ll 1$,即在低频区两条曲线符合得较好.随着频率的增高,两条曲线分歧越来越大.这个结果说明:绝热近似理论^[13]的限制条件 $\omega \ll D \ll \Delta V = 0.25$ 是必要的.

注意到图 10 中的锁线是在 $\omega = 0.0$ 处达到极大值,这也是胡岗等人曾提到过的“零频共振”.之所以会发生这种情况,是由于在从瑞利方程:

$$\ddot{x} - f(\dot{x} - \dot{x}^3) + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (11)$$

到(9)式的过阻尼近似中,我们认为自由振动的频率 ω_0 很小而忽略掉,即认为 $\omega_0 = 0$.按照决定性的共振理论,调制频率和系统的固有频率相等时,才发生共振,因此,由(9)式决定的随机的共振系统才会发生所谓的“零频共振”.

应当指出,在图 9 中,驱动频率为 $\omega = 0.5$ 时, X_m-D 曲线已相当平坦,“共振”一词在这里的含义已不很明确.共振峰比较锐的那些曲线所对应的 ω 值小于 0.3,在这个区域里随机共振的概念才有实质性的意义.

由于小信号绝热近似的条件是极强的,本文通过数值计算对问题进行广泛的研究是必要的.但是另一方面,上述数值研究结果又使我们得出结论,小信号绝热近似下的解析理论足以概括随机共振的主要内容.

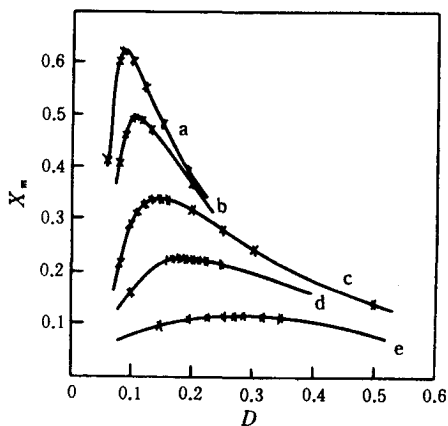


图 9 在周期驱动力幅度 $A = 0.10$ 的条件下,不同频率的一簇 X_m-D 曲线 a 为 $\omega = 0.03$; b 为 $\omega = 0.05$; c 为 $\omega = 0.10$; d 为 $\omega = 0.20$; e 为 $\omega = 0.50$

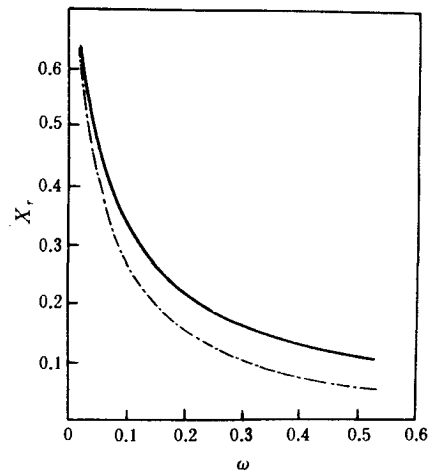


图 10 在周期驱动力幅度 $A = 0.10$ 的条件下,发生共振的幅度 X_r 随驱动频率 ω 变化的数值解(实线)和绝热解析解(锁线)的比较

2. 不同幅度的周期力作用下的随机共振现象 图 11 表示周期驱动力幅度不同的一簇 X_m-D 曲线.与图 9 类似,每条曲线都存在一个峰值,并且 A 越小,峰越锐; A 增大,则峰的位置向 D 减小的方向移动.对于 $A = 0.45$ 的情形,由于计算机时的限制,没有计算出极值的位置.图 12 表示周期驱动力幅度不同时共振的噪声强度 D_r 和 A 的这种变化关系.由于 $A = 0.45$ 的 D_r 值并没有求得,所以 $A > 0.30$ 线段我们用虚线表示.这段虚线随

着 A 的增大迅速减小,并于 $A=0.385$ 处趋于零.这一点可以通过对方程

$$\dot{x} = x - x^3 + C \quad (12)$$

平衡状态分叉现象的研究中得到解释.

如前所述,图 10 表示出只当绝热近似条件 $\omega \ll D$ 成立时,近似解析理论才和数值解一致.图 13 则表示小信号 $A \ll 1$ 是使两者符合的另一条件.

3. 噪声强度对输出信号相位的影响 前面讨论了输出信号的幅度与参数的关系,本工作还求出了输出信号的相位 ϕ 随噪声强度 D 的变化曲线.

图 14 表示在 $A=0.10$ 条件下,不同频率时的输出相位 ϕ 与 D 的关系.图 15 表示在 $A=0.10$,发生随机共振的输出相位 ϕ 与驱动频率 ω 的关系.可以看出,随着 ω 的增加,不论是数值解还是解析解,输出相位 ϕ 的绝对值都在增加,并在 ω 较大时,增加较为缓慢,达到饱和,实线趋向 65° ,而虚线趋向 82° 左右.从图 15 中还可看出,绝热近似解和数值解的偏离基本上发生在 $\omega > 0.10$ 后,在 $\omega < 0.10$ 时,两曲线非常符合.

图 16 表示在驱动频率 $\omega=0.03$ 条件下,周期驱动力幅度 A 不同时的输出相位 ϕ 随噪声强度 D 的变化曲线簇.整个曲线的 $|\phi|$ 值普遍地随 D 的增加而减小.不同 A 的 $\phi-D$ 曲线呈汇聚状.

图 17 表示在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,发生共振的输出相位 ϕ 与周期驱动力幅度 A 的关系.由于这种关系曲线为平行于 A 轴的直线,说明输出相位与 A 无关, ϕ 几乎恒等于 -38° ;而按照绝热近似理论也有当 ω 保持不变时,输出相位 ϕ 与 A 无关.两者结果基本相符.

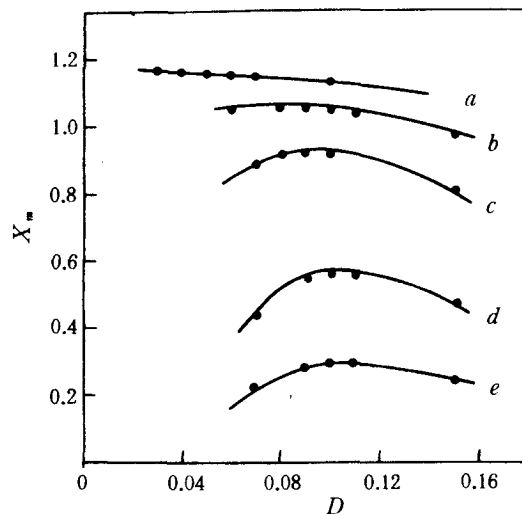


图 11 在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,周期驱动力幅度 A 不同的一簇 X_m-D 曲线 a 为 $A=0.45$; b 为 $A=0.30$; c 为 $A=0.20$; d 为 $A=0.10$; e 为 $A=0.05$

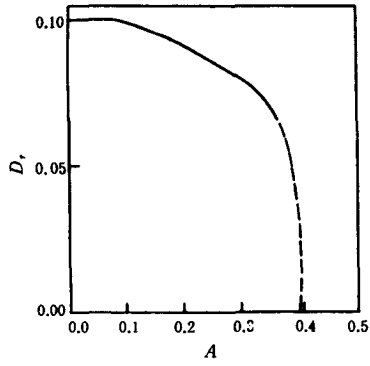


图 12 在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,共振时的噪声强度 D_r 随周期驱动力幅度 A 的变化曲线

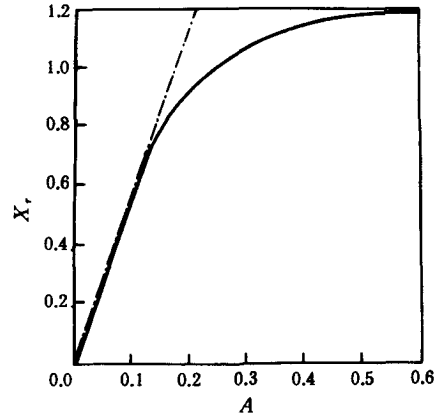


图 13 在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,共振时的输出振幅 X_r 随周期驱动力幅度 A 的变化曲线

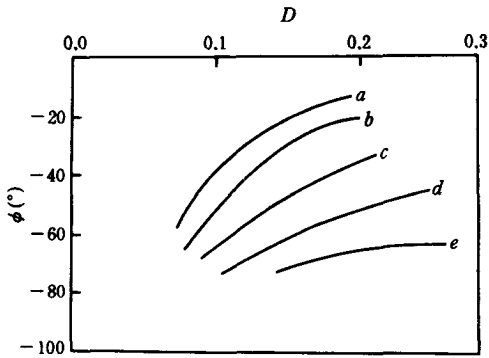


图 14 在周期驱动力幅度 $A=0.1$ 时,不同频率的输出相位 ϕ_m 随输入噪声强度 D 的变化曲线 a 为 $\omega=0.03$; b 为 $\omega=0.05$; c 为 $\omega=0.10$; d 为 $\omega=0.20$; e 为 $\omega=0.50$

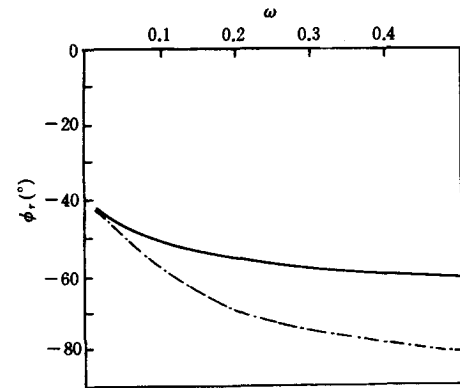


图 15 在周期驱动力幅度 $A=0.1$ 时,共振时的输出相位 ϕ_r 随驱动频率 ω 变化的数值解(实线)与绝热解析解的比较

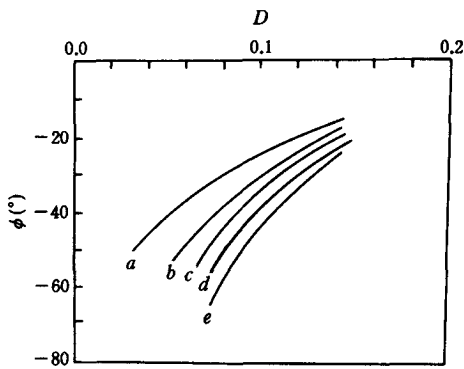


图 16 在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,周期驱动力幅度 A 不同时输出相位 ϕ_m 随输入噪声强度 D 的变化曲线 a 为 $A=0.45$; b 为 $A=0.30$; c 为 $A=0.20$; d 为 $A=0.10$; e 为 $A=0.05$

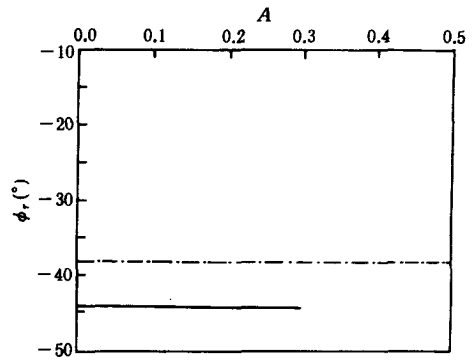


图 17 在驱动频率 $\omega=0.03$ 时,共振时的输出相位 ϕ_r 随周期驱动力幅度 A 变化的数值解(实线)和绝热理论解析解(锁线)的比较

四、结 论

总结本文的内容,得到以下几个主要结论:

1. 从 Fokker-Planck 方程的瞬态数值解可以求出概率密度的瞬态演化过程. 结果表明,瞬态过程在一个周期内就达到了一个稳态的周期过程. 这种行为可能和系统的过阻尼性质相联系.

2. 本文证明了方程的稳态解和初始条件无关. 一方面这为数值计算提供了方便;另一方面,证明了我们所讨论的一维 Fokker-Planck 方程具有混和性.

3. 根据 Fokker-Planck 方程的数值解很容易求出输出信号的数学期望值 $\langle x(t) \rangle$. 数值计算结果表明,在输入信号较弱时, $\langle x(t) \rangle$ 表现出良好的简谐性. 随着输入信号幅度的增加,表现出明显的非线性. 具体地说,输出信号趋向决定性的非线性张弛振动.

4. 本文在较宽的输入信号范围内(不受绝热近似条件的限制),求得了输出信号与输入噪声强度 D 的关系,我们发现:

(1) 不同的输入信号幅度 A 和频率 ω ,数学期望值 $\langle x(t) \rangle$ 将对不同的 D 值取得极值.

(2) 输入信号的幅度 A 或频率 ω 越小,与极值点相应的峰越锐. 因此,在小的输入信号和绝热近似条件下所得到的随机共振的性质更加明显. 这说明绝热条件下所作的解析理论研究涉及了随机共振问题的主要部分.

5. 综合数值计算所得到的输出信号的幅度和相位所表现的随机共振行为,当输入信号的频率 $\omega < 0.3$, 幅度 $A < 0.10$ 时,我们的结果和绝热近似的解析理论相当符合. 在这个范围内,证明了绝热近似解析理论^[13]的正确性.

总之,数值计算结果表明,随机共振现象主要发生在输入信号的幅度 A 、频率 ω 较小的区域,绝热近似理论能够概括随机共振的主要特征. 对于输入信号较强的情形,系统将表现出决定性的非线性振动行为.

- [1] R. Benzi, A. Sutera and A. Vulpiana, *J. Phys. A*, **14**(1981),L453.
- [2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiana, *Tellus*, **34**(1982),11.
- [3] C. Nicolis, *Tellus*, **34**(1982),1.
- [4] S. Fauve and F. Heslot, *Phys. Lett.*, **A97**(1983),5.
- [5] B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988),2626.
- [6] P. Eckmann and L. E. Thomas, *J. Math. Phys.* **A15**(1982),L261.
- [7] R. Benzi, A. Sutera and Vulpiani, *J. Phys.*, **A**, **18**(1985),2239.
- [8] R. Fox, *Phys. Rev.*, **A39**(1989),4148.
- [9] C. Presilla, F. Marchesoni and L. Gammaitoni, *Phys. Rev.*, **A40**(1989),2105.
- [10] P. Jung, *Z. Phys. B*, **76**(1989),521.
- [11] P. Jung and P. Hanggi, *Europhys. Lett.*, **8**(1989),505.
- [12] B. McNamara and Wiesenfeld, *Phys. Rev.*, **A39**(1989),4854.
- [13] Hu Gang, G. Nicolis and C. Nicolis, *Phys. Rev.*, **A42**(1990),2030.
- [14] Hu Gang, G. R. Qin, D. C. Gong and X. D. Weng, *Phys. Rev.*, **A44**(1991),6414.
- [15] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

- [16] V. Pallesch, F. Sarri, G. Marcotti and M. R. Torquati, *Phys. Lett.*, **A146**(1990), 378.
[17] 林建恒、卢志恒, 北京师范大学学报(自然科学版), **28**(1992), 497.

A NUMERICAL STUDY OF THE FOKKER-PLANCK EQUATION FOR STOCHASTIC RESONANCE PROBLEM

LU ZHI-HENG LIN JIAN-HENG HU GANG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 20 April 1992; Revised manuscript received 8 March 1993)

ABSTRACT

The behavior of Fokker-Planck Equation for a stochastic resonance problem is studied by using finite difference schemes. The numerical results coincide with the analytical approximate theory under the conditions of adiabatic approximation $\omega \ll D \ll \Delta V$ and small signal approximation $A \ll 1$. Although the system exhibits evidently deterministic non-linear vibration properties when the amplitude of periodic driving force is large, the adiabatic approximate analytical theory can cover the principal properties of stochastic resonance which occurs in the bistable system.

PACC: 0540; 0270