

圆柱型填充介质慢波自由电子激光器的理论分析

凌根深 钱宝良 陈德明 李传胪 刘永贵

国防科技大学应用物理系, 长沙 410073

1992 年 9 月 14 日收到

用流体理论研究了带 wiggler 场圆柱型填充介质的自由电子激光器(FEL). 结果表明: 本系统超辐射放大的工作主模式为横电(TE)模, 并具有所有慢波 FEL 的特点.

PACC: 4255T

一、引 言

短波长相干辐射是 FEL 的主要研究目标之一. 普通 FEL 工作在短波长的代价是高能束和低增益^[1], 切仑柯夫自由电子激光器(CFEL)则效率低且要求介质厚度 $d \approx \lambda$ ^[2]. 慢波结构 FEL 具有用低能电子束产生高增益、高效率、短波长^[3,4]的相干辐射的诱人特点, 且对介质厚度无特殊要求. 本文采用流体理论研究圆柱型填充介质 FEL 的色散方程、增益等, 结果表明: 该系统具有慢波 FEL 的所有特点, 其 TE 模式的频率大于 TM 模式的频率; TE 模式的增长率和效率远大于 TM 模式的增长率和效率, 从而表明本系统的超辐射放大的工作主模式确为 TE 模.

二、本征模式

如图 1 所示, 在金属圆波导构成的二维系统中, 圆波导半径为 b , 在圆波导内 $a < r < b$ 区(II), 填充介电常数为 ϵ 的电介质, 在圆波导外面加一圆极化的 wiggler 场

$$\mathbf{B}_w = \frac{B_w}{\sqrt{2}} \hat{e}_\pm \exp[i(k_w z - \theta)], \quad (1)$$

其中 $\hat{e}_\pm = (\hat{e}_r \pm i\hat{e}_\theta) / \sqrt{2}$. 密度分布呈

$$n_0(r) = n_0 \Delta r_0 \delta(r - r_0) \quad (2)$$

的环形电子束以 $v_0 \hat{e}_z$ 的速度进入波导系统, 其中 n_0 为电子束的平均密度, 该电子束在(1)式的 wiggler 场中的扰动以横向为主, 故由其激励的辐射场以 TE 模为主. TE 模式的本征方程为

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} H_z + (\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' - k_z^2) H_z = 0, \quad (3)$$

其中 ω, k_z 分别为本征模式的频率和波数. 当 $r < a$ 时, $\epsilon' = 1$; 当 $a < r < b$ 时, $\epsilon' = \epsilon$. 方程(3)的本征解为

$$\text{I 区:} \quad H_z = A_1 I_0(k_1 r),$$

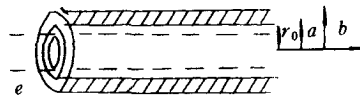


图 1 慢波 FEL 的结构

$$(0 < r < a) \quad k_1 = (k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^{1/2}, \quad (4)$$

$$\text{I 区:} \quad H_z = A_2 J_0(k_1 r) + A_3 Y_0(k_1 r),$$

$$(a < r < b) \quad k_1 = (\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_z^2)^{1/2}. \quad (5)$$

利用 H_z 和 $D_\theta = \epsilon' E_\theta = \frac{i\omega\epsilon'}{k'^2 c} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}$ 在 $r=a$ 和 $r=b$ 处的连续条件和边界条件, 可求得本征模的色散方程为

$$\frac{J_0(k_1 a) Y_1(k_1 b) - J_1(k_1 b) Y_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a) Y_1(k_1 b) - J_1(k_1 b) Y_1(k_1 a)} = \frac{\epsilon k_1}{k_1} \frac{I_0(k_1 a)}{I_1(k_1 a)}, \quad (6)$$

其中 $0 < r < a$ 时, $k'^2 = -k_1^2$; $a < r < b$ 时, $k'^2 = k_1^2$. J_0, J_1, Y_0, Y_1 分别为 0, 1 阶一、二类贝塞耳函数, I_0, I_1 分别为 0, 1 阶变形贝塞耳函数, 且

$$A_1 = \frac{J_0(k_1 a) Y_1(k_1 b) - J_1(k_1 b) Y_0(k_1 a)}{I_0(k_1 a) Y_1(k_1 b)} A_2, A_3 = -\frac{J_1(k_1 b)}{Y(k_1 b)} A_2. \quad (7)$$

三、色散方程

$$\text{在束坐标系中, 电子对 wiggler 场的线性响应为 } \mathbf{v}'_0 = \frac{e\mathbf{E}'_0}{m_i\omega'_0}, \quad (8)$$

其中上撇表示束坐标系中的量. $\mathbf{E}'_0 = \frac{\gamma_0}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_w \exp[-i(\omega'_0 t' - k'_0 z' + \theta)]$, $\omega'_0 = \gamma_0 k_w v_0$, $k'_0 = -\gamma_0 k_w$, $\gamma_0 = (1 - \frac{v_0^2}{c^2})^{-1/2}$, 电子对辐射场的线性响应为 $\mathbf{v}'_1 = \frac{e\mathbf{E}'_s}{im\omega'_1}$, (9)

其中 $\mathbf{E}'_s = E'_{s\theta} \exp[-i(\omega'_1 t' - k'_{z1} z')]$, $E'_{s\theta} = \frac{\gamma_0 i(\omega_1 - k_{z1} v_0)}{ck_c^2} \cdot \frac{\partial H_{z1}}{\partial r}$, H_{z1} 为辐射场的纵向磁场分量, $k_c^2 = \frac{\omega_1^2}{c^2} \epsilon' - k_{z1}^2$. ω_1, k_{z1} 分别为辐射场的频率和波数, $\omega'_1 = \gamma_0(\omega_1 - v_0 k_{z1})$, $k'_{z1} = \gamma_0(k_{z1} - \frac{v_0}{c^2} \omega_1)$. 从而有质动力势为

$$\phi'_p = -\frac{m}{e} \mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{v}'_1 = -\frac{v'_{\theta 0} \cdot \mathbf{E}'_{s\theta}}{i\omega'_1} \exp[-i(\omega'_1 t' - k'_{z1} z' + \theta)], \quad (10)$$

其中 $\omega' = \omega'_1 - \omega'_0$, $k'_{z1} = -k'_0$. 将(10)式代入动量方程, 即可求得电子对有质动力势的线性响应速度

$$\mathbf{v}' = -\frac{e\nabla' \phi'_p}{mi\omega'}.$$

将 \mathbf{v}' 代入连续方程即可得到束密度的一阶扰动量

$$n' = \frac{\nabla' \cdot (n'_0 \mathbf{v}')}{i\omega'} = \frac{e}{m\omega^2} [n'_0 \nabla'^2 \phi'_p + \frac{\partial n'_0}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi'_p}{\partial r}], \quad (11)$$

其中 $n'_0 = \frac{n_0}{\gamma_0}$. 由此得出 (ω'_1, k'_{z1}) 场中的非线性电流密度和数密度

$$\mathbf{J}'_1 = -n' e \mathbf{v}'_0, n'_1 = \frac{\nabla' \cdot (n' \mathbf{v}'_0)}{i\omega'_1}. \quad (12)$$

变换至实验室坐标系中即为

$$\begin{aligned} J_{1z} &= J'_{1z} = -en'v'_{0z}, J_{z1} = -\gamma_0 n'_1 e v_0 = -\frac{\gamma_0 e v_0}{i\omega'_1} \nabla' \cdot (n'v'_0), \\ n_1 &= \gamma_0 n'_1 = \frac{\gamma_0}{i\omega'_1} \nabla' \cdot (n'v'_0). \end{aligned} \quad (13)$$

在强泵浦高增益条件下,可忽略线性电流的影响,将(13)式代入有源的波动方程,则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} H_{1z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} H_{1z} + k_z^2 H_{1z} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{1\theta}) \\ &= \frac{\pi e^4 B_w^2}{m^3 c^4 r_0^3 k_w^2} \frac{1}{(\omega_1 - k_z v_0)^2 k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\{ n_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_0^2 (k_z - \frac{v_0}{c^2} \omega_1)^2 \right] \frac{\partial H_{1z}}{\partial r} + \frac{\partial n_0}{\partial r} \cdot \frac{\partial H_{1z}}{\partial r^2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $k_z = k_{z1} + k_w$. 当 $a < r < b$ 时, (14) 式等号右边等于零. 将本征模解

$$H_{1z} = \begin{cases} A_1 I_0(k_1 r) & \text{当 } 0 < r < a, \\ A_2 J_0(k_1 r) + A_3 Y_0(k_1 r) & \text{当 } a < r < b, \end{cases}$$

代入方程(14), 两边同时乘以 $H_{1z} r dr$ 并在 $[0, b)$ 上积分, 即可得色散方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_1^2}{c^2} - k_{z1}^2 + k_z^2 \right) \int_0^a I_0^2(k_1 r) r dr + \left(\frac{\omega_1^2}{c^2} \epsilon - k_{z1}^2 - k_z^2 \right) \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \\ \times \int_a^b \left[J_0(k_1 r) - \frac{J_1(k_1 b) Y_0(k_1 r)}{Y_1(k_1 b)} \right]^2 r dr = \frac{p}{(\omega_1 - k_z v_0)^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$p = \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_w r_0 \Delta r_0}{4c^2 \gamma_0^3 k_w^2} \cdot \frac{\omega^2/c^2 - k_z^2}{\omega_1^2/c^2 - k_{z1}^2} \cdot [k_z^2 I_0^2 + \gamma_0^2 (k_z - \frac{v_0}{c^2} \omega_1)^2 I_1^2 + \frac{2I_1^2}{r_0^2} - \frac{2k_z I_0 I_1}{r_0}],$$

$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ 为电子束的等离子体频率, $\Omega_w = \frac{e B_w}{mc}$ 为与 B_w 有关的回旋频率, $I_0 = I_0(k_1 r_0)$, $I_1 = I_1(k_1 r_0)$. 方程(14)等号左边为 TE 模的本征色散方程, 在零级近似下等于零, $(\omega_1 - k_z v_0)^2 = 0$ 为有质动力势波的色散关系. 方程(15)式即为 TE 本征模和有质动力势波的耦合模色散方程.

为求得解析的耦合增长率和频移, 将(15)式等号左边在 TE 本征模即 $\omega_1 = \omega$ 处展开, 化简后即得

$$(\omega_1 - \omega) [\omega_1 - (k_{z1} + k_w) v_0]^2 = \frac{p\epsilon}{\alpha \left(\frac{2\omega_1 \epsilon}{c^2} - \frac{\partial k_z^2}{\partial \omega_1} \right)} \approx \frac{pc^2}{2\alpha \omega_1}, \quad (16)$$

式中利用了 k_z^2 对 ω_1 为慢变量的条件, 其中

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^a I_0^2(k_1 r) r dr + \frac{\epsilon I_0^2(k_1 a)}{[J_0(k_1 a) Y(k_1 b) - J_1(k_1 b) Y_0(k_1 a)]^2} \\ &\quad \times \int_a^b [J_0(k_1 r) Y_1(k_1 b) - J_1(k_1 b) Y_0(k_1 r)]^2 r dr, \end{aligned}$$

左边作代换 $\omega_1 \Rightarrow \omega + \delta\omega \Rightarrow (k_{z1} + k_w) v_0 + \delta\omega$, 其中 $|\delta\omega| \ll \omega$, $\delta\omega$ 为复频移, 便可得到

$$(\delta\omega)^3 = \frac{pc^2}{2\alpha \omega_1}, \quad (17)$$

其增长模的解为
$$\delta\omega = \left(\frac{pc^2}{2a\omega_1}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \quad (18)$$

从而增长率为
$$\Gamma = \text{Im}(\delta\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{pc^2}{2a\omega_1}\right)^{1/3}, \quad (19)$$

频移为
$$\text{Re}(\delta\omega) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma, \quad (20)$$

效率为
$$\eta = \gamma_0^2 \left(\frac{pc^2}{2a\omega_1}\right)^{1/3}, \quad (21)$$

强泵浦高增益的判据为 $|\delta\omega| \gg \omega_{pe}/\gamma_0^{3/2}$, 即 $\Omega_w \gg \left[\frac{64\omega_{pe}k_w^2 a\omega_1}{r_0 \Delta r_0 q \gamma_0^{3/2}}\right]^{1/2}$, (22)

其中
$$q = -\frac{k_1^2}{k_c^2} \cdot [k_1^2 I_0^2 + \gamma_0^2 (k_z - \frac{v_0}{c^2} \omega_1)^2 I_1^2 + \frac{2I_1^2}{r_0^2} - \frac{2k_1}{r_0} I_0 I_1].$$

四、讨论与结论

1. 本系统为慢波结构 FEL, 具有所有慢波结构 FEL 的特点^[3,4].

2. 文献[3]曾用同一理论对本系统的 TM 模进行了研究, 而本文研究的 TE 模与之比较具有如下特色:

1) k_1 相同时, 由(4), (5)和(6)式可得 $\omega_{TE} \geq \omega_{TM}$, 即辐射的 TE 模的频率大于 TM 模的频率.

2) TE 模和 TM 模的增益公式在形式上完全一致, 但其中的 p 和 α 的系数不同.

在 k_1 相同时, 有

$$\frac{p_{TE}}{p_{TM}} \geq \left(\frac{k_{zTE}}{k_{zTM}}\right)^2 \cdot \left(\frac{k_{z1TM}}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{1}{\gamma_0^4}$$

对慢波系统有 $k_{z1TM} \gg k_w$, 且 γ_0 可很小, 例如在毫米和亚毫米波段内则有 $\gamma_0 \simeq 1$, 故有

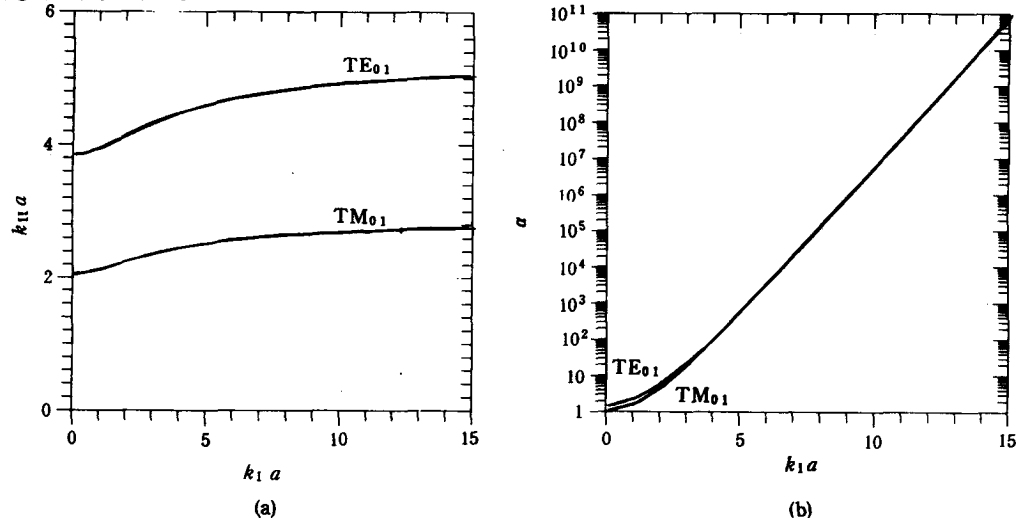


图 2 本征模色散关系(a)和 α 值与 $k_1 a$ 的关系(b)

$$p_{TE} \gg p_{TM}.$$

此外,作为例子,在 $a=1.1\text{cm}$, $b=1.75\text{cm}$, $\epsilon=1.7$ 时用数值方法求解对应的本征模色散方程,并得到 α 值与 $k_1 a$ 的相关关系如图 2 所示. 由图 2 可知: $k_1 a$ 越大,增益越小,而 $k_1 a$ 越小,辐射频率越小. 适当选取 $k_1 a$ 的值可获得高频率高增益的慢波 FEL, 此时 $\alpha_{TE} = \alpha_{TM}$.

由此可得结论: TE 模的增益远大于 TM 模的增益.

3)与 2)同理可得结论: TE 模的效率远大于 TM 模的效率.

综上所述,本系统在超辐射放大工作时, TE 模与有质动力势相互作用更有效,其工作主模确为 TE 模.

- [1] T. P. Pandya *et al.*, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 5131.
- [2] E. P. Garate and J. E. Walsh, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **13**(1985), 524.
- [3] V. K. Tripathi and C. S. Liu, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **17**(1989), 583.
- [4] 何一平、陈德明、刘永贵、李传庐,全国激光科学技术青年学术交流会(烟台,1991),第 1301 页.

ANALYSIS OF CYLINDRICAL DIELECTRIC-LOADED SLOW-WAVE FREE-ELECTRON LASER

LING GEN-SHEN QIAN BAO-LIANG CHEN DE-MING LI CHUAN-LU LIU YONG-GUI

Department of Applied Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073

(Received 14 September 1992)

ABSTRACT

The free electron laser with cylindrical waveguide loaded with dielectric is studied by using theory of fluids. It is shown that the main mode of super-radiation in this system is TE mode. It has all the characters of slow-wave free electron laser.

PACC: 4255T