

# 耗散量子隧道系统中的形变效应 与热库维数的关系\*

石云龙 聂一行

雁北师范学院物理系,大同 037000

陈 鸿 吴 翔

同济大学物理系,上海 200092

1992 年 12 月 4 日收到

本文利用微扰及变分法研究了耗散量子隧道系统中热库声子波函数的形变效应,发现形变与热库的维数有关.随着维数降低,一方面形变效应增大,另一方面形变效应对量子隧道系统的影响变得更为显著.

PACC:7340G;7450;6320L

## 一、引 言

近年来,热库的耗散效应对量子隧道系统的影响引起人们的很大兴趣<sup>[1]</sup>.一般认为热库中低频声子的涨落对量子隧道系统的行为有很大的影响.因此,一个重要的问题是正确描述耦合系统中的声子基态,特别是低频声子的基态.过去的文献中认为与隧道系统的耦合仅会导致声子波函数发生刚性位移<sup>[1]</sup>.量近许多作者发现,这种近似具有局限性<sup>[2-5]</sup>.它仅在高声子或弱耦合情况下适用,而对于低频声子或强耦合情况,还应同时考虑波函数的形变效应.从物理上分析,形变效应的大小与声子波函数的“刚性”有关,而这种“刚性”一方面与声子的频率有关.另一方面,从整体上看,声子库的低频涨落还与库的维数有关<sup>[6]</sup>.在文献[7,8]中,我们研究了耗散量子隧道系统中,声子波函数的形变效应与耦合强度及声子频率之间的关系.本文将研究声子库维数对形变效应以及对量子隧道系统的影响.

## 二、维数对形变效应的影响

低温下,耗散量子隧道系统可以用哈密顿量<sup>[1,7]</sup>

$$H = -\Delta_0 \sigma_x + \sum_l \omega_l b_l^\dagger b_l + \sigma_z \sum_l g_l (b_l^\dagger + b_l) + \sum_l \frac{g_l^2}{\omega_l} \quad (1)$$

描述.式中  $\Delta_0$  为“裸”隧道参量,  $\sigma_x, \sigma_z$  为 Pauli 算符.式中等号右边第二项为热库能量,  $b_l^\dagger, b_l$  为声子算符,  $\omega_l$  为声子能量.声子的态密度为  $D(\omega) = \omega^{-1}/\omega_0$ ,  $\omega_0$  为截止频率.耦合系

\* 山西省自然科学基金和国家自然科学基金资助的课题.

数的定义为  $g_i = g_0(\omega_i/\omega_0)^\lambda$ . 在以下的研究中, 我们假设热库由  $d$  维声学声子组成, 这时有<sup>[1]</sup>  $n=d, \lambda=1/2$ .

文献[7]的微扰研究结果表明, 隧道系统对声子态的影响可用两个么正变换

$$S_1 = \exp[\sigma_z \sum_i (g_i/\omega_i)(b_i^\dagger - b_i)], \quad (2)$$

$$S_2 = \exp[\sum_i \gamma_i (b_i b_i - b_i^\dagger b_i^\dagger)] \quad (3)$$

描述.  $S_1, S_2$  分别描述声子波函数的位移和形变, 若位移起主要作用, 形变可以略去, 则声子的基态为

$$|\varphi_{\text{ph},1}\rangle = S_1^\dagger |0\rangle. \quad (4)$$

相应的重整化隧道参量为

$$\Delta_1(d) = \Delta_0 e^{-W_1(d)}, \quad (5)$$

式中  $W_1(d)$  为 Debye-Waller 因子, 与声子库的维数  $d$  有关

$$W_1(d) = \sum_i 2g_i^2/\omega_i^2. \quad (6)$$

若形变不能略去, 则声子的基态为

$$|\varphi_{\text{ph},2}\rangle = S_1^\dagger S_2^\dagger |0\rangle. \quad (7)$$

相应的重整化隧道参量为

$$\Delta_2(d) = \Delta_0 e^{-W_2(d)} \equiv \Delta_0 \kappa_2, \quad (8)$$

$$W_2(d) = \sum_i 2g_i^2 e^{-4\gamma_i}/\omega_i^2. \quad (9)$$

根据文献[7]微扰处理的结果, 形变参量为

$$\gamma_i = \frac{1}{8} \ln(1 + \frac{8\Delta_0 \kappa_2 g_i^2}{\omega_i^3}). \quad (10)$$

比较  $W_1(d)$  与  $W_2(d)$ , 有  $W_2(d) < W_1(d)$ , 即形变效应将使 Debye-Waller 因子减小, 研究比值  $W_2(d)/W_1(d)$  随  $d$  的变化, 将给出声子库维数对形变效应的影响. 把  $\gamma_i$  的表达式代入  $W_2(d)$ , 对于  $d=1, 2, 3$  有

$$\frac{W_2(d=1)}{W_1(d=1)} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{W_2(d=2)}{W_1(d=2)} = \sqrt{1 + 8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2} - \sqrt{8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2}, \quad (12)$$

$$\frac{W_2(d=3)}{W_1(d=3)} = \sqrt{1 + 8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2} - 8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2}}{\sqrt{8\alpha_0 \beta_0 \kappa_2}}, \quad (13)$$

式中  $\alpha_0 = \frac{\Delta_0}{\omega_0}, \beta_0 = \frac{g_0^2}{\omega_0^3}$ . 可以证明

$$\frac{W_2(d=3)}{W_1(d=3)} > \frac{W_2(d=2)}{W_1(d=2)} > \frac{W_2(d=1)}{W_1(d=1)}, \quad (14)$$

即形变效应随着声子库维数的下降而增加. 另外, 从上式还可以导出维数对重整化隧道参量的影响. 比较  $\Delta_1(d)$  与  $\Delta_2(d)$ , 有  $\Delta_1(d) < \Delta_2(d)$ , 即形变效应将使重整化隧道参量增大. 而根据(14)式有

$$\frac{\Delta_2(d=1)}{\Delta_1(d=1)} > \frac{\Delta_2(d=2)}{\Delta_1(d=2)} > \frac{\Delta_2(d=3)}{\Delta_1(d=3)}. \quad (15)$$

亦即随着声子库维数的下降,形变效应对量子隧道系统的影响增大.

### 三、变分计算

为了进一步弄清声子库维数对形变效应以及量子隧道系统的影响,本节将通过变分加以研究.

首先,引入描述刚性位移的变分基态

$$|\varphi_1\rangle = \exp\{-\sigma_z \sum_i c_i (b_i^+ - b_i)\} |\varphi_{\text{vac}}\rangle, \quad (16)$$

式中  $c_i$  为变分参量,  $|\varphi_{\text{vac}}\rangle$  同时代表声子真空态和隧道体系基态 ( $\sigma_z |\varphi_{\text{vac}}\rangle = |\varphi_{\text{vac}}\rangle$ ).  $|\varphi_1\rangle$  态的能量容易算出

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \varphi_1 | H | \varphi_1 \rangle \\ &= -\Delta_0 \kappa_1 + \sum_i (\omega_i c_i - 2g_i) c_i + \sum_i g_i^2 / \omega_i, \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\kappa_1 = \exp\{-2 \sum_i c_i^2\}. \quad (18)$$

变分条件给出

$$c_i = g_i / (\omega_i + 2\Delta_0 \kappa_1). \quad (19)$$

一般认为,耗散量子隧道系统的行为取决于相互作用谱密度

$$J(\omega) \sim \sum_i g_i^2 \delta(\omega - \omega_i) \sim \omega^s, \quad (20)$$

式中

$$s = 2\lambda + d - 1. \quad (21)$$

注意到

$$\sum_i \sim \int_0^{\omega_0} \omega^{d-1} d\omega, \quad (22)$$

则有

$$E_1 = -\Delta_0 \kappa_1 - \omega_0 \beta_0 \left[ \int_0^1 \frac{x + 2A\kappa_1}{(x + A\kappa_1)^2} x^{2\lambda+d-1} dx - \frac{1}{2\lambda + d - 1} \right], \quad (23)$$

$$\kappa_1 = \exp\left\{-2\beta_0 \int_0^1 \frac{x^{2\lambda+d-1}}{(x + A\kappa_1)^2} dx\right\}, \quad (24)$$

式中  $A = 2\alpha_0$ .

其次,引入描述形变效应的变分基态

$$\begin{aligned} |\varphi_2\rangle &= \exp\{-\sigma_z \sum_i (g_i / \omega_i) (b_i^+ - b_i)\} \\ &\quad \cdot \exp\{-\sum_i \gamma_i (b_i b_i - b_i^+ b_i^+)\} |\varphi_{\text{vac}}\rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

式中  $\gamma_i$  为变分参量. 于是可求出

$$\begin{aligned} E_2 &= \langle \varphi_2 | H | \varphi_2 \rangle \\ &= -\Delta_0 \kappa_2 + \sum_l \omega_l (\text{sh} 2\gamma_l)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\kappa_2 = \exp \left\{ - \sum_l (2g_l^2 / \omega_l^2) e^{-4\gamma_l} \right\}. \quad (27)$$

使  $E_2$  极小给出(10)式. 同理, 注意到(22)式, 可得

$$E_2 = -\Delta_0 \kappa_2 + \frac{\omega_0}{4} \int_0^1 x^d [(1 + B\kappa_2 x^{2\lambda-3})^{\frac{1}{2}} + (1 + B\kappa_2 x^{2\lambda-3})^{-\frac{1}{2}} - 2] dx, \quad (28)$$

$$\kappa_2 = \exp \left\{ -2\beta_0 \int_0^1 \frac{x^{2\lambda+d-3}}{(1 + B\kappa_2 x^{2\lambda-3})^{1/2}} dx \right\}, \quad (29)$$

式中  $B = 8\alpha_0\beta_0$ .

由(23)和(26)式可以看出,  $E_1$  和  $E_2$  均依赖于无量纲参量  $\alpha_0, \beta_0, \lambda$  及声子库维数  $d$ . 对于具体的  $\lambda, d$  的值, 通过比较  $E_1$  和  $E_2$  的大小, 可以给出  $|\varphi_1\rangle$  和  $|\varphi_2\rangle$  的稳定区域. 文献 [7, 8] 只给出三维情况的结果, 表明在高频及弱耦合区域, 位移态为稳定的, 而在低频及强耦合区域, 位移-压缩态较位移态更稳定. 事实上, 定量的划分将依赖于参量  $\lambda$  和  $d$  的取值而不同. 因此, 对于给定的  $\lambda$  值, 位移态和位移-压缩态的稳定区域将完全依赖于声子库维数  $d$ . 为了定量地给出这种依赖关系, 仍以  $\lambda = 1/2$  为例, 分别对于一维, 二维和三维情况求出两种声子态的能量.

对于  $d=1$ , 有

$$E_1 = -\Delta_0 \kappa_1 \left( 1 - \frac{2\beta_0}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1} \right), \quad (30)$$

$$\kappa_1 = \left[ \frac{2\alpha_0 \kappa_1}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1} \exp \left( \frac{1}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1} \right) \right]^{2\beta_0}, \quad (31)$$

$$E_2 = -\Delta_0 \kappa_2 + \frac{\omega_0}{4} (\sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2} - 1), \quad (32)$$

$$\kappa_2 = \left[ \frac{\sqrt{8\alpha_0\beta_0\kappa_2}}{1 + \sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2}} \right]^{2\beta_0}. \quad (33)$$

对于  $d=2$ , 有

$$E_1 = -\Delta_0 \kappa_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \kappa_1 - \frac{\beta_0}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1} \right], \quad (34)$$

$$\kappa_1 = \exp \left\{ -2\beta_0 \left( 2 - \frac{1}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1} - 4\alpha_0 \kappa_1 \ln \frac{1 + 2\alpha_0 \kappa_1}{2\alpha_0 \kappa_1} \right) \right\}, \quad (35)$$

$$E_2 = -\Delta_0 \kappa_2 \left( 1 - \frac{1}{3} \ln \kappa_2 \right) + \frac{\omega_0}{6} (\sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2} - 1), \quad (36)$$

$$\kappa_2 = \exp \left\{ -2\beta_0 (\sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2} - \sqrt{8\alpha_0\beta_0\kappa_2}) \right\}. \quad (37)$$

对于  $d=3$ , 有

$$E_1 = -\Delta_0 \kappa_1 \left[ 1 - \frac{2}{3} (\ln \kappa_1 + \frac{\beta_0}{1 + 2\alpha_0 \kappa_1}) \right], \quad (38)$$

$$\kappa_1 = \left( \frac{2\alpha_0\kappa_1}{1+2\alpha_0\kappa_1} \right)^{24\alpha_0^2\beta_0\kappa_1^2} \exp \left\{ -\frac{\beta_0}{1+2\alpha_0\kappa_1} [1 - 6\alpha_0\kappa_1 - 6(2\alpha_0\kappa_1)^2] \right\}, \quad (39)$$

$$E_2 = -\Delta_0\kappa_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \ln \kappa_2 \right) + \frac{\omega_0}{8} \left( \sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2} - 1 \right), \quad (40)$$

$$\kappa_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2}}{\sqrt{8\alpha_0\beta_0\kappa_2}} \right)^{8\alpha_0\beta_0\kappa_2} \exp \left\{ -\beta_0 \sqrt{1 + 8\alpha_0\beta_0\kappa_2} \right\}. \quad (41)$$

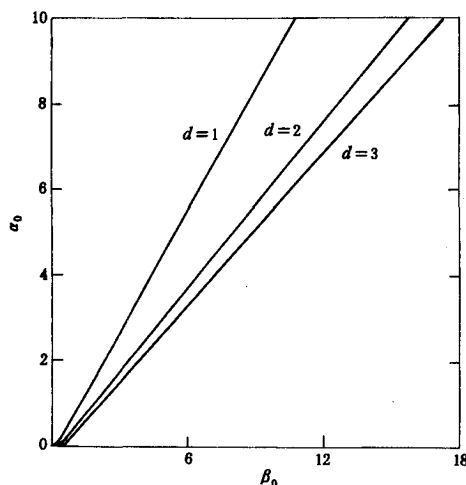


图 1 相应于不同声子库维数  $d$  的位移变分态能量  $E_1$  与位移-压缩变分态能量  $E_2$  比较曲线 每条曲线的右侧对应于  $E_2 < E_1$ ; 左侧对应于  $E_1 < E_2$

对于每一种情况,由条件  $E_1 = E_2$ ,可以找出两个稳定区域的临界曲线  $\alpha_c = d(\beta_0)$ ,通过数值计算给出图 1 所示的结果.图 1 中对应于同一条临界曲线,右侧为位移-压缩态稳定的区域,左侧为位移态稳定的区域.从图 1 中可以看出,随着声子库维数  $d$  的下降,位移-压缩态稳定的区域逐渐增加.如取  $\alpha_c = 1$  时,分别有

$$\beta_0(d=1) = 1.25,$$

$$\beta_0(d=2) = 1.89,$$

$$\beta_0(d=3) = 2.20.$$

#### 四、结 语

在耗散量子隧道系统中,与隧道粒子的耦合不仅会导致声子波函数的刚性位移,而且还会产生形变效应.本文的研究表明,形变效应与声子库的维数有关,随着维数降低,形变效应增大,而且形变效应对量子隧道系统的影响变得更为显著.因此,对于低维的耗散量子隧道系统,必须考虑形变效应的影响.

- [1] A. J. Leggett *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **50**(1980), 1.
- [2] H. Chen and L. Yu, *Phys. Rev.*, **B45**(1992), 13753.
- [3] C. F. Lo and R. Sollie, *Phys. Rev.*, **B44**(1991), 5013.
- [4] J. Stolze and L. Müller, *Phys. Rev.*, **B42**(1990), 6704.
- [5] A. M. Javannavar, *Solid State Commun.*, **71**(1989), 689.
- [6] 孙鑫, *物理学进展*, **5**(1985), 467.
- [7] 石云龙、陈鸿、吴翔, *物理学报*, **40**(1991), 1162.
- [8] 石云龙、聂一行、陈鸿、吴翔, *物理学报*, **41**(1992), 1499.

## DEPENDENCE OF THE DEFORMATION IN DISSIPATIVE QUANTUM TUNNELING SYSTEMS ON THE DIMENSION OF THE BATH

SHI YUN-LONG NIE YI-HANG

*Department of physics, Yanbei Normal Institute, Datong 037000*

CHEN HONG WU XIANG

*Department of Physics, Tongji University, Shanghai 200092*

(Received 4 December 1992)

### ABSTRACT

The deformative effect of phonon states of the bath in a dissipative quantum tunneling system is studied by perturbation and a variational approach. We find that the deformative effect depends on the dimension of the bath. It increases as the dimension is reduced on one hand. On the other hand, it gives more stronger influence on the quantum tunneling system for a lower-dimensional bath.

**PACC:**7340G;7450;6320L