第 42 卷第 10 期　　物　理　学　报　　Vol. 42, No. 10
1993 年 10 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Oct., 1993

Josephson 磁通孤子振荡器中热噪声研究*

王强华　姚希贤
南京大学物理系，南京　210008

1992 年 12 月 23 日收到

研究了可作为微波振荡器的长 Sosephson 隧道结中的磁通孤子在有限温度下受热噪声影响的运动. 当 Josephson 隧道结被偏置在零场台阶状态，热噪声使孤子的运动速度在平均值附近涨落. 孤子的平均速度对应于隧道结的平均电压，也对应于对外辐射电磁波的平均频率，速度的涨落对应于辐射一有限的频带宽度. 研究表明，隧道结典型辐射频率为 10GHZ，在液氦温区其频带宽约为 1KHZ，是很窄的. 热噪声同时也激发了一些连续模. 用反散射方法的微扰论讨论了每模式的平均能量为 k_BT，而孤子在低速极限的平均动能为 $\frac{1}{2}k_BT$，很象经典粒子情形.

PACC: 7450; 0540; 8440

一、引　　言

长 Josephson 隧道结中非线性激发的动力学研究一直是一个较活跃的课题. 在低耗散条件下，Josephson 磁通孤子（下面简称孤子）在隧道结中由于边界的反射而作共振式的振荡. 这种孤子运动表现在隧道结的直流 I-V 特性上为台阶式的奇异性，电压为[1]

$$V_n = n\varphi_0\bar{c}u_0/L, \tag{1}$$

其中 n 是孤子的数目，$\varphi_0=h/ze$ 是一个磁通量子 $\bar{c}$ 是氧化层中的光速，u_0 是孤子的约化运动速度，$u_0\sim1$，L 是隧道结的长度. 与 Fisk 台阶不同的是，由(1)式描述的台阶既可以在无外场条件下，也可以在有外场的条件下，而 Fisk 台阶通常是对中等大小的 Josephson 隧道结加上很大的外场后才会出现[2]. 无外场条件下由(1)式描述的 I-V 特性通常称作零场台阶. 孤子的共振振荡在结端辐射周期的电磁波，其频率与直流电压 V_n 有关，通常是 10GHz 左右. 辐射的频带宽度来源于热噪声引起的孤子运动速度的涨落，带宽通常是 1—10kHz. 这种窄带性质一方面对于这种振荡器的应用提供了物理基础，另一方面也为理论上求解扰动的 sine-Gordon 方程(SGE)的一些特解展示了可能性，因为 SGE 描述孤子的运动[3]. 然而，要从理论上考察热噪声对孤子运动的影响，最好避开孤子在边界的反射行为，作为研究工作的第一步. 这使我们想起窄环结构的隧道结. 孤子在窄环隧道结中循环运动，是无反射的. 数学上这相当于有空间周期性的无限长的孤子链. 窄环结构首先由 Scott 和 McLauglin 提出，并指出它对于波长约为 100μm 的电磁波的产生有重要的技术意义[3]. 就我们所知，实验上窄环结构首先是由 Davidson 等人实现的，并成功地得到磁通

* 国家自然科学基金资助的课题.

孤子运动的状态[4]. 因此,窄环隧道结中孤子运动的研究本身也有技术应用方面的必要.

众所周知,耗散与涨落总有内在的关联. 温度对 Josephson 隧道结的效果有两方面,其一是系统能量流向"热库"引起耗散;其二是"热库"为系统提供无规的能量输入. 因此有限温度下隧道结除有耗散作用外,还有一等效的无规驱动电流(与温度有关),结区上下超导体序参量的局域位相差 φ 满足方程[3]

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}-\sin\varphi=\varepsilon R[\varphi],$$
$$\varepsilon R[\varphi]=\eta+\alpha\varphi_t+n(x,t), \tag{2}$$

其中位置坐标 x 的单位是 Josephson 穿透深度 λ_J, $\lambda_J=(\hbar/2eJ\mu_0 d)^{1/2}$,时间 t 的单位是 ω_p^{-1},而 $\omega_p=(2eJ/\hbar C)^{1/2}$ 是 Josephson plasmon 频率. λ_J, ω_p 的表达式中 d 是氧化层的有效厚度(实际厚度与两超导体 London 穿透深度之和),J 是最大 Josephson 电流密度,C 是结区单位面积的电容. (2)式等号右边第一项 η 是均匀偏置的电流密度,已按 $\eta=I_{dc}/JWL$ 约化,W, L 分别是结宽和结长(周长),且通常有 $W\ll\lambda_J\ll L$,第二项是耗散项 $\alpha\varphi_t$, $\alpha=\lambda_J/RSC\bar{c}$,其中 R 是隧道结的正常电阻,S 是结区面积,第三项 $n(x,t)$ 代表内禀热噪声电流($eV_{dc}\ll k_BT$),我们设它是一种高斯白噪声

$$\langle n(x,t)n(x',t')\rangle=16\alpha k_BT/E_0\,\delta(x-x')\delta(t-t'), \tag{3}$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 代表整体平均,其中系数 $16\alpha k_BT/E_0$ 是从对于低速孤子应用耗散-涨落定理得到的[5]. 孤子的静止能量 $E_0=8\hbar JW\lambda_J/2e$ 用来约化能量,k_B 是玻耳兹曼常数,T 是温度. k_BT/E_0 的典型值的数量级是 $10^{-4}-10^{-5}$,因此热噪声可以视作微扰来处理.

如果(2)式等号右边是零,则退化为严格 SGE. 由反散射理论知道[6],SGE 是完全可积的,通解可由分立和连续谱的 Jost 函数来构造,而分立谱对应于孤子自由度,连续谱对应于连续模自由度. 换言之,在此框架下,孤子、连续模可以分离. 这提示我们对有扰动的 SGE 作类似的分离. 当然这只是近似的. 但通常连续模出现在孤子微扰论的二阶项中,在最低阶近似下可以忽略. 在此近似下只需考虑分立谱散射系数的变化,即孤子参数如速度、中心位置等的变化. 这一近似被称为绝热近似[7]. 如果与微扰项有共振或如果系统受热噪声影响,则有时连续模的激发并非是平庸的. 这种情况下有必要考虑连续模以检验绝热近似的可行性. 关于 SG 孤子的微扰论可以参阅文献[3]和文献[8,9]等.

本文旨在研究直流偏置在零场台阶状态下的孤子振荡受热噪声的影响,以及热噪声激发的连续模. 采用的方法是孤子微扰理论和标准的无规过程的分析方法.

二、热噪声中的孤子振荡

窄环结中的行波孤子解,作为方程(2)的零级近似,可以表示为[10]

$$\varphi=2\sin^{-1}[cn(\pm z,k)], \tag{4}$$

其中 $z=(x-ut)/[k(1-u^2)^{1/2}]$,$u$ 是行波速度,k 是 Jacobian 椭圆函数的模. 空间周期性要求 $l/(1-u^2)^{1/2}=2nkK(k)$, $l=L/\lambda_J$ 是约化周长,n 是族转数,即正孤子与反孤子数目之差,而 $K(k)$ 是第一类完整椭圆积分. 如果孤子间分开很远,即 $l\gg1$,且 $n=1$,则方程(4)退化为一维无限长系统中的单孤子解

$$\varphi=4\arctan\exp(\sigma z), \tag{5}$$

其中 $k=1,\sigma=\pm1$(孤子极性). 此后我们将不考虑在极限 $l\gg1$ 下由于有极的 l 带来对(5)式的微小修正. 如果 $\eta\neq0$,作一个变换

$$\varphi\rightarrow\varphi-\arcsin\eta,$$

并代入方程(2)得到重规整的微扰

$$\varepsilon R[\varphi]=(1-\cos\varphi)\eta+\alpha\varphi_t+n(x,t). \tag{6}$$

其中略去了 η 的二阶项,即 $-\frac{\eta^2}{2}\sin\varphi$,因为它可以通过重新对 x,t 定标而包含进去. 重规整的微扰项的好处在于下面考虑连续模激发时不至于引起发散,物理上的实质是重规整过程扣除了系统的"真空"部分 $-\arcsin\eta$.

SGE(未微扰)具有无穷个局域守恒定律[11],其中能量和动量是两个重要的守恒量. 能量 H 和动量 P 分别定义如下:

$$H=\frac{E_0}{8}\int\left[\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_t^2)+1-\cos\varphi\right]\mathrm{d}x; \tag{7}$$

$$P=-\frac{1}{8}\int\varphi_x\varphi_t\mathrm{d}x, \tag{8}$$

为下面方便起见,其中 P 已经约化(单位是 $E_0/\lambda_J\omega_p$). 由(5),(7),(8)式,孤子未微扰的能量和动量为

$$H=E_0\gamma(u);$$
$$P=u\gamma(u), \tag{9}$$

其中 $\gamma(u)=(1-u^2)^{1/2}$ 是 Lorentz 因子. 在绝热近似下从修正的守恒律出发求孤子的发展方程比从反散射理论更直截了当. 事实上对 P 求时间微分并利用方程(2)和(5)得到

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=-\alpha p+\frac{1}{4}\pi\eta+\varepsilon(t), \tag{10}$$

其中 $\varepsilon(t)$ 是上面这个 Langevin 方程中的噪声项,来源于 $n(x,t)$,

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{8}\int\varphi_x n(x,t)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

如果暂忽略热噪声,则(2)式有一个以恒定速度运动的 2π-kink 解,从(9),(10)式得到其动量严格为

$$P(u)=\pi\eta/4x=u\gamma(u). \tag{12}$$

另一方面,对 H 微分并用类似的技巧也可以得到相同的结果,这一方法即所谓 power-balance(功率平衡)方法[3].

方程(2)中的噪声项的作用是使孤子的运动速度、动量有涨落. 从(3),(5),(11)式可以得到等效噪声 $\varepsilon(t)$ 的自关联函数

$$R_\varepsilon(t-t')=\langle\varepsilon(t)\varepsilon(t')\rangle=\Gamma\gamma(u)\delta(t-t'), \tag{13}$$
$$\Gamma=2\alpha k_B T/E_0,$$

其中,因子 $\gamma(u)$ 反映了孤子的 Lorentz 收缩. 噪声 $\varepsilon(t)$ 的谱是

$$S_\varepsilon(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\omega t}R_\varepsilon(t)\mathrm{d}t=\Gamma\gamma(u). \tag{14}$$

显然方程(10)描述动量 P 绕平均值 $P_0=u_0\gamma(u_0)=\pi\eta/4\alpha$ 的涨落. 标准的无规过程分析方法给出涨落 $\Delta P=P-P_0$ 的谱为

$$S_{\Delta P}(\omega)=\Gamma\gamma(u_0)/(\omega^2+\alpha^2). \tag{15}$$

由于热噪声很小,$\Delta u=\Delta P\partial u_0/\partial P_0$,从而速度的涨落 $\Delta u=u-u_0$ 的谱为

$$\begin{aligned}S_{\Delta u}(\omega)&=(\partial u_0/\partial P_0)^2 S_{\Delta P}(\omega)\\&=\Gamma\gamma(u_0)(\partial u_0/\partial P_0)^2/(\omega^2+\alpha^2).\end{aligned} \tag{16}$$

速度涨落 Δu 的自关联函数相应为

$$\begin{aligned}R_{\Delta u}(t-t')&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\Delta u}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\alpha}\Gamma\gamma(u_0)(\partial u_0/\partial P_0)^2\mathrm{e}^{-\alpha|t-t'|}.\end{aligned}$$

我们注意到文献[12]中的作者考虑孤子在有限隧道结中的热噪声问题时完全没有考虑这一关联,然而我们认为那只有在关联时间 $\tau=1/\alpha$ 远小于孤子的振荡周期 $\langle T\rangle$ 以致于孤子在边界的反射不引起统计上可观的影响的条件下,其结果才是有保证的.另一方面孤子有可能在边界附近由于孤子-虚孤子的碰撞而湮没[3,8].因此对有限结中的热噪声问题理论处理上应考虑边界因素,处理上需更谨慎.

孤子速度的涨落引起振荡频率的涨落(也对应于直流电压的涨落).我们定义绕平均频率 $f_0=u_0/l$(以 ω_p 为单位约化)的瞬时频率涨落为

$$\Delta f(t)=\frac{1}{\langle T\rangle}\int_t^{t+\langle T\rangle}\mathrm{d}t'\Delta u/l, \tag{17}$$

其中 $\langle T\rangle=l/u_0$.由频率调制噪声理论(参阅文献[13])

$$S_{\Delta f}(\omega)=\frac{1}{\langle T\rangle^2l^2}\frac{4\sin^2[\omega\langle T\rangle/2]}{\omega^2}S_{\Delta u}(\omega). \tag{18}$$

涨落 Δf 的标准偏差 $\sigma_{\Delta f}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}(\sigma_{\Delta f})^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\Delta f}(\omega)\mathrm{d}\omega\\&=(\sigma_{\Delta U})^2\frac{2u_0}{\alpha l^2}\left[1-u_0\frac{1-\exp(-\alpha l/u_0)}{\alpha l}\right],\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}(\sigma_{\Delta u})^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\Delta u}(\omega)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{k_BT}{E_0}\frac{P_0}{u_0}\left(\frac{\partial u_0}{\partial P_0}\right)^2,\end{aligned} \tag{20}$$

在最后一步用了等式 $\Gamma=2\alpha k_BT/E_0$ 和 $\gamma(u_0)=P_0/u_0$.有趣的是,在低速极限 $u_0\ll1$(即 $\eta\ll\alpha$),我们得到孤子的平均动能 $\langle H-E_0\rangle\approx\frac{1}{2}E_0\langle(\Delta u)^2\rangle=\frac{1}{2}E_0(\sigma_{\Delta u})^2=\frac{1}{2}K_BT$,这正是一维空间中布朗粒子的结果.而相应的扩散系数可由 Einstein 关系从方程(16)(在极限 $u_0\to0$ 下)得出为 $D=k_BT\alpha/E_0$.

我们注意到 $\sigma_{\Delta f}$,$\sigma_{\Delta u}$ 隐含地与 I_{dc},V_{dc} 有关,即与 I-V 特性有关,因为

$$\begin{aligned}I_{dc}&=JWL\eta=4JWL\alpha P_0/\pi,\\V_{dc}&=\varphi_0\bar{c}u_0/L.\end{aligned} \tag{21}$$

而静态电阻 R_s 在偏置点为

$$R_s=V_{dc}/I_{dc}=R_0u_0/P_0, \tag{22}$$

动力学电阻 R_D 则为

$$R_D = \partial V_{dc}/\partial I_{dc} = R_0 \partial u_0/\partial P_0. \tag{23}$$

在上两式中 $R_0=\pi\varphi_0\bar{c}/(4JWL^2\alpha)$ 是一个常数电阻. R_s, R_D, R_0 可由实验得到. 因此 $\sigma_{\Delta u}, \sigma_{\Delta f}$ 可以表示为实验可观测量的函数，这为理论的实验检验提供了可能. 例如 $\sigma_{\Delta u}$ 可表示为

$$(\sigma_{\Delta u})^2 = k_B T R_D^2/(E_0 R_0 R_s),$$

而 $\sigma_{\Delta f}$ 也可相应表示出. 直观的物理解释是，电流热涨落谱 $S_{\Delta I}\sim 2k_B T/R_s$ 经由动力学电阻 R_D，转化为电压涨落谱[12].

$$S_{\Delta V} = R_D^2 2k_B T/R_s$$

频率标准偏差与功率谱半宽度的关系是[14]

$$\Delta f_{1/2} = \sqrt{8\ln 2}\sigma_{\Delta f}, \tag{24}$$

其中已设 Δf 是正态分布的(normally distributed).

值得指出的是，因为假定了热噪声是小的，我们没有考虑热噪声使孤子湮没的可能性.

三、伴随着孤子的连续模

上一节的结果是在绝热近似下得到的. 这里再考虑连续模的激发，一方面它本身是个有趣的问题，另一方面也可以检验绝热近似的可行性. 在反散射理论的框架中[8,9,11]，连续模由 Jost 函数定义的系数 $b(\lambda)$ 描述(详见附录)，其中 λ 是实数，它与连续模波矢 k 和频率 ω 的关系是

$$\omega = \lambda + 1/4\lambda, \quad k = \lambda - 1/4\lambda,$$

显然有色散关系 $\omega^2=1+k^2$. 对于纯粹孤子解，$b(\lambda)\equiv 0$(称为散射问题中的无反射势)，而有微扰情况下，其变化为[8,9]

$$\mathrm{d}B(\lambda)/\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{4}\exp(\mathrm{i}\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon R[\varphi]W(\sigma_1\varphi,\bar{\psi}), \tag{25}$$

其中 $B(\lambda)\equiv b(\lambda)\exp(\mathrm{i}\omega t)$，而 $\varepsilon R[\varphi]$ 先前已经定义，另外 $\varphi=(\phi_1,\phi_2)^T$，$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$ 是二分量 Jost 函数(见附录)，σ_1 是第一 Pauli 矩阵. φ,ψ 的变量 $(x,t;\lambda)$ 为方便起见略而未标. 方程(25)中 W 代表 Wronskian，对任意二分量函数 f,g，有 $W(f,g)=f_1g_2-f_2g_1$. 值得指出的是 (25)式对任意数目的孤子均适用. 我们注意到文献[15]中从另外方法入手考虑连续模问题，但这里给出的方法似乎更普遍和直观. 一些 Jost 函数在附录中给出(见方程 A.2 和 A.3). 就我们考虑的单孤子情况，$W(\sigma_1,\phi,\psi)$ 的零级形式是简单的，

$$W(\sigma_1\varphi,\psi) = \frac{a(\lambda)}{(\lambda-\mathrm{i}\nu)^2}\exp(-\mathrm{i}kx)(\lambda^2-\nu^2-2\mathrm{i}\nu\lambda\tanh z), \tag{26}$$

其中 z 定义同第二节，$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{(1+u)/(1-u)}$ 联系着孤子的运动速度，同时也联系系数 $a(\lambda)$ 在上半复平面的零点. $a(\lambda)$ 的定义见附录. 在 ε 的零级近似下，$a(\lambda)=(\lambda-\mathrm{i}\nu)/(\lambda+\mathrm{i}\nu)$.

由于连续模的激发，对 φ 的一级修正 $\varphi^{(1)}$ 可以表示为(参阅文献[9]，[16]，[17])

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)}(\psi_1^2-\psi_2^2)\mathrm{d}\lambda, \tag{27}$$

其中 $b(\lambda)$ 是一级的，$b(\lambda)\sim\varepsilon$. $B(\lambda)$[从而 $b(\lambda)$]的暂态响应是在 $t'=0$ 时微扰加上后从 $t'=0$ 到 $t'=t$ 积分 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t'$. 不过我们感兴趣的是稳态响应，这可以对 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t'$ 从 $t'=-t$ 积分到 $t'=t$，再取极限 $t\to\infty$. 很容易检验在不考虑热噪声情况下微扰项 $(1-\cos\varphi)\eta+\alpha\varphi_t$ 不会激发离开孤子传播的连续模，只是在孤子中心周围产生极小的局域修正 $\varphi^{(1)}$[3,8,9,18]，即 $\varphi^{(1)}\sim\varphi^{(1)}(x-u_0t)\ll 1$，$u_0$ 是孤子的平衡运动速度. 显见的解释是自由连续模的激发有一个频率间隙(gap)，$\omega^2=1+k^2\geqslant 1$，而刚提到的微扰不产生任何频率达到 1 的振荡，因此下面考虑热噪声效应时对此项不予考虑.

考虑热噪声时 $B(\lambda)$ 的响应不再是平庸的，但与上面不同的是，$B(\lambda)$ 只能统计地加以考虑. 由于涨落与耗散总是关联的，方程(25)需改写为[8]

$$\mathrm{d}B(\lambda)/\mathrm{d}t+\alpha B(\lambda)/2=\varepsilon(t);$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{i}}{4}\int_{-l/2}^{l/2}n(x,t)W(\sigma_1\varphi,\bar{\psi})\mathrm{d}x, \tag{28}$$

其中已考虑几何因素 l，但仍取 $l\gg 1$. (28)式中 x 的原点取为孤子的中心位置. 利用附录中的有关公式可以得到 $\varepsilon(t)$ 的自关联函数为

$$R_\varepsilon(t-t')=\Gamma l/2\ \delta(t-t');$$

故 $\varepsilon(t)$ 的谱为

$$S_\varepsilon(\Omega)=\Gamma l/2,$$

$\Gamma=2\alpha k_{\mathrm{B}}T/E_0$. 再由(28)式得到 $B(\lambda)$ 的谱为

$$S_B(\Omega)=S_\varepsilon(\Omega)/(\Omega^2+\frac{\alpha^2}{4}).$$

如果假定是自洽的，则 $|B(\lambda)|^2$ 在过程中的平均值为

$$\langle|B(\lambda)|^2\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega S_B(\Omega)=k_{\mathrm{B}}Tl/E_0. \tag{29}$$

其中已假定 $k_{\mathrm{B}}Tl/E_0\ll 1$，因为对通常情况 $L\approx 10\lambda_{\mathrm{J}}$. 这也是微扰处理的条件.

连续模的激发的基本特征是伴随着能量流，其谱密度为[8,9]

$$E(k)\approx\frac{E_0}{8}\frac{4}{\pi}|B(\lambda)|^2, \tag{30}$$

其中 $\lambda\equiv[k+(1+k^2)^{1/2}]/2$. 对我们考虑的窄环结，波数 k 本身由于空间周期性的要求，也是分立的，$k_n=n2\pi/l$. 因此每个模式的能量为

$$E_n=E(k_n)\Delta k=\frac{2\pi}{l}E(k_n). \tag{31}$$

从(29)式和(30)式得到每个模式的平均能量为

$$<E_n>=k_{\mathrm{B}}T\ll E_0, \tag{32}$$

这正是文献[19]中从路径积分方法得到的结果，也与文献[15]中的线性展开方法的结果一致.

最后我们指出，如果对孤子与连续模进行所谓半量子化(Semi-quantization)，两者有很不同的性质. 若视孤子为在长 L 的盒子中具有静止质量 $E_0/\bar{c}^2$ 的粒子，则量子化能级间隙约为 $\hbar^2\omega_{\mathrm{p}}^2/E_0\ll k_{\mathrm{B}}T$，即热噪声湮没了量子能级，孤子仍表现为粒子性；另一方面连续模量子化后的能级间隙约为 $\hbar\omega_{\mathrm{p}}\sim k_{\mathrm{B}}T$，因此量子效应是明显的[15].

四、总 结

考虑了热噪声对窄环结中的孤子和连续模的影响．得到了这种振荡器的辐射频带宽度，并表示为实验可观测量的函数．连续模的研究使用很有效且普遍性强的反散射微扰理论．解释了低速孤子的平均动能是$\frac{1}{2}k_BT$，象经典粒子情况，而每个连续模的平均能量是k_BT．这项工作对Josephson器件的应用有参考意义．

附 录

对于sine-Gordon方程，Jost函数ϕ,ψ是本征方程$\hat{L}f=0$的本征函数，这里[8,9,16]

$$\hat{L}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}[(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\cos\varphi)\sigma_3-\frac{\sigma_2}{4\lambda}\sin\varphi+\frac{\sigma_1}{2}(\varphi_x-\varphi_t)],$$

其中t在这里理解为本征方程的参数，$\sigma_i(i=1,2,3)$是Pauli矩阵．在$\varphi\to 0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$，$\varphi_t\to 0$随$|x|\to\infty$是速度足够快的条件下，可以定义两套Jost函数($\mathrm{Im}\lambda=0$)

$$\Psi_\pm(x,\lambda)=\exp[\frac{1}{2}k(\lambda)\sigma_3 x]，当\ x\to\pm\infty,$$

其中$k=\lambda-1/4\lambda$．显然$\Psi_\pm$具有如下对称性：

$$\sigma_2\Psi_\pm(x,\lambda)\sigma_2=\Psi^*_\pm(x,\lambda). \tag{A.1}$$

因此可以记$\Psi_+=(\psi,\bar{\psi})$，$\Psi_-=(-\bar{\phi},\phi)$，其中$\phi,\psi$是二分量Jost函数，另外有

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\Rightarrow\bar{\psi}=\begin{pmatrix}-\psi_2^*\\ \psi_1\end{pmatrix}.$$

$\Psi_\pm$可由一个公正转移矩阵$T(\lambda)$联系起来，$\Psi_-(x,\lambda)=\Psi_+(s,\lambda)T(\lambda)$．对于具有对称性(A.1)式的算符$\hat{L}$，转移矩阵引入如下：

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix}a^*(\lambda) & b(\lambda)\\ -b^*(\lambda) & a(\lambda)\end{pmatrix},|a(\lambda)|^2+|b(\lambda)|^2=1,$$

从而ϕ,ψ之间的关系为

$$\phi(x,\lambda)=a(\lambda)\bar{\psi}(x,\lambda)+b(\lambda)\psi(x,\lambda).$$

可以证明$\psi(x,\lambda)$，$\phi(x,\lambda)$和$a(\lambda)$均可向λ的上半复平面延拓．对复数λ(分立值)，散射问题的解随$x\to\pm\infty$而指数下降．这些分立的$\lambda_n(\mathrm{Im}\lambda>0)$与函数$a(\lambda)$的零点是一致的，这时$\phi,\psi$线性相关

$$\phi(x,\lambda_n)=b_n\psi(x,\lambda_n).$$

一个纯孤子解对应的"散射势"(即$\hat{L}$中的$\varphi,\varphi_x,\varphi_t$等)称为无反射势，即$b(\lambda)=0$对实数$\lambda$，且$a(\lambda)$有唯一的简单零点，即$a(\lambda)=\frac{\lambda-i\nu}{\lambda+i\nu}$，$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{(1+u)/(1-u)}$($u$是孤子速度)．相应的Jost函数为

$$\psi=\frac{1}{\lambda+i\nu}\exp[\frac{i}{2}k(\lambda)x]\begin{pmatrix}\lambda+i\nu\tanh z\\ \sigma\nu\,\mathrm{sech}\,z\end{pmatrix}; \tag{A.2}$$

$$\phi=\frac{1}{\lambda+i\nu}\exp[-\frac{i}{2}k(\lambda)x]\begin{pmatrix}-\sigma\nu\,\mathrm{sech}\,z\\ \lambda-i\nu\tanh z\end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

其中$\sigma=\pm1$是孤子极性，$z=(x-ut)/\sqrt{1-u^2}$．利用以上诸式可以方便地计算连续模的一阶响应．

[1] T. Fulton and R. Dynes, *Solid State Commun.*, **12**(1973), 57.
[2] N. Pedersen and D. Welner, *Phys. Rev.*, **B29**(1984), 2551.

[3] D. MacLaughlin and A. Scott, *Phys. Rev.*, **A18**(1978), 1652.
[4] J. Stewart, *Proc. TRE*, **42**(1954), 1539.
[5] M. Buttiker and R. Landauer, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 1397.
[6] M. Ablowitze, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30**(1973), 1262.
[7] V. Karpman and E. Maslov, *Sov. Phys. JETP*, **46**(1977), 281.
[8] Y. Kivshar and B. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989), 763.
[9] F. Bass, Y. Kivshar, V. Konotop and Y. Sinityn, *Phys. Rept.*, **157**(1988), 63.
[10] R. Parmentier, Solitons in Action, eds. K. Lonngeren and A. Scott, Academic Press, NY, (1978), p. 173.
[11] M. Ablowitze, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SLAM Studies in Appl. Mathematics **4** (Philadelphia).
[12] E. Joergensen, V. Koshelets, R. Monoca, J. Mygind and M. Samuelsen, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1093.
[13] N. Pedersen, M. Samuelsen and D. Welner, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 4057.
[14] F. If, P. Christiansen, R. Parmentier, O. Skovgard and P. Soerensen, *Phys. Rev.*, **B32**(1985), 1512.
[15] M. Salerno, E. Joergensen and M. Samuelsen, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 2635.
[16] L. Takhatajian and L. Fadeev, *Theor. Math. Phys. (USSR)*, **21**(1974), 1046.
[17] V. Zakharov, S. Manakov, S. Novikov and L. Pitaexsky, Theory of Solitons, Nauka, Moscow(1980), in Russian, English Translation, Consultants Bureau, NY(1984).
[18] A. Golukov, I. Serpuchenko and A. Ustinov, *Sov. Phys. JETP*, **67**(1988), 1256.
[19] S. Trullinger, M. Miller, R. Guyer, A. Bishop, F. Palmer and J. Krumhansal, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 206.

ON THERMAL FLUCTUATIONS IN A JOSEPHSON-FLUXON OSCILLATOR

WANG QIANG-HUA YAO XI-XIAN

Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210008

(Recieved 23 December 1992)

ABSTRACT

Thermal fluctuations in a Josephson-fluxon oscillator are considered with emphasises on the stochastic dynamics of fluxon and the non-trivial continuum-mode excitations. Analytical expressions for the radiation line-width of the oscillator are derived from perturbation theory and standard stochastic process theory. The averaged kinetic energy of a low-velocity fluxon is shown to be $\kappa_B T/2$. The continuum excitations are explored in the framework of the inverse scattering transform approach. The averaged energy per wave mode turns out to be $\kappa_B T$, and this justifies the adiabatic approximation applied in the fluxon stochastic dynamics.

PACC: 7450; 0540; 8440