

拟 Wronsky 行列式与扩张的 KP 及 KdV 可积序列

赵 柳

西北大学现代物理研究所, 西安 710069
1993 年 2 月 22 日收到

将 Sato 关于 KP 和 KdV 可积序列的理论推广到矩阵 Lax 算子的情形, 得到一批我们称之为扩张的 KP 和 KdV 序列的新可积方程族. 从构造过程可以得知, 这些新可积方程族的解可以用我们所称的拟 Wronsky 行列式来表达, 而这种拟 Wronsky 行列式正是不久前我们研究 2 阶扩张的广义 Toda 方程的解时得到的.

PACC: 0220; 0290; 0340K

一、引 言

2 维 Toda 理论, KP 和 KdV 序列等孤子方程(族)及它们之间的联系在过去 20 年中一直是令人关注的研究课题. 这些非线性理论的一个共同特点是, 它们的解都可以用 Wronsky 行列式来表达. 而构造 Wronsky 行列式形式的解有许多种办法, 例如 Hirota 等人发展起来的双线性方程法^[1], Leznov-Saveliev 的代数分析法^[2]以及 Gervais 等人最近提出的手征(W)曲面法^[3]等等. 除此之外, Sato 提出的方法^[4]对 KP, KdV 序列方程的构造和求解也十分有效, 而且 Sato 方法看来能将许多种求孤子方程解的方法统一在一个框架内.

最近, 从 WZNW 模型的 Hamilton 约化出发, 又导出了许多种可积的广义 Toda 类场论模型^[5]. 其中由我们得出的 2 阶约化模型(称为玻色超共形 Toda 模型)^[5,6]显示了很好的可积特性. 现已得知, 该模型的解可以用一种所谓的 2 阶拟 Wronsky 行列式及其代数余子式来表示^[7]. 本文的意图就是找出具有类似结构的解的广义 KP 和 KdV 可积序列. 我们发现, 这种广义的 KP 和 KdV 序列可以从 Sato 理论经适当的扩张而得到, 因此我们称它们为扩张的 KP 和 KdV 序列. 特别地, 对 2 阶扩张的 KP 和 KdV 序列, 一些特解导致两个独立的 KP 和 KdV 序列.

二、拟 Wronsky 行列式

考虑如下的线性方程:

$$\partial g = Jg, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ v_{N+1} & \cdots & v_2 & v_1 & \\ u_{N+1} & \cdots & u_2 & u_1 & \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中 $u_l, v_l (l=1, \dots, N+1)$ 均为坐标 x 的函数. 如果

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -u_1, \quad (2)$$

则矩阵 J 可视为李代数 $sl(N+1, R)$ 的一个元素. 这时(1)式成为 WZNW 模型的一个 Kac-Moody 流分量受约束后的表达式^[7]. 事实上(1)和(2)式合在一起给出玻色超共形 Toda 模型的 W_{N+1}^2 代数所取的一个特殊规范 (O'Raifeartaigh 规范)^[5]. 在本文中我们将不考虑(2)式给出的约束, 而只讨论(1)式给出的一般形式的 J .

将矩阵 $g(x)$ 的第 a 行第 i 列记为 g_a^i . 那么, (1)式给出

$$g_a^i = \partial g_{a-2}^i, \quad a = 3, \dots, N+1, \quad i = 1, \dots, N+1. \quad (3)$$

若进一步补充定义

$$g_{N+2}^i = \partial g_n^i, \quad g_{N+3}^i = \partial g_{N+1}^i, \quad (3a)$$

则(1)式给出

$$g_{N+2}^i = v_{N+1}g_1^i + v_N g_2^i + \cdots + v_2 g_N^i + v_1 g_{N+1}^i, \quad i = 1, \dots, N+1; \quad (4a)$$

$$g_{N+3}^i = u_{N+1}g_1^i + u_{N+2}g_2^i + \cdots + u_2 g_N^i + u_1 g_{N+1}^i, \quad i = 1, \dots, N+1. \quad (4b)$$

方程(4a)和(4b)分别构成关于 $v_l (l=1, \dots, N+1)$ 和 $u_l (l=1, \dots, N+1)$ 的线性代数方程组. 因此, 不难将 u_l 和 v_l 用 $g(x)$ 的矩阵元表示如下:

$$\begin{aligned} v_l &= \chi_i(N+2-l, N+2)/\Delta_{N+1}, \\ u_l &= \eta_i(N+2-l, N+2)/\Delta_{N+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\chi \equiv \begin{vmatrix} g'_{11} & \cdots & g_{11}^{N+1} & g_1^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g'_{N+1} & \cdots & g_{N+1}^{N+1} & g_{N+1}^i \\ g'_{N+2} & \cdots & g_{N+2}^{N+1} & g_{N+2}^i \end{vmatrix}, \quad \eta \equiv \begin{vmatrix} g'_{11} & \cdots & g_{11}^{N+1} & g_1^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g'_{N+1} & \cdots & g_{N+1}^{N+1} & g_{N+1}^i \\ g'_{N+3} & \cdots & g_{N+3}^{N+1} & g_{N+3}^i \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$\chi_i(a, b)$ 和 $\eta_i(a, b)$ 分别表示 χ_i 和 η_i 对其第 a 行第 b 列元素的代数余子式, 且

$$\Delta_{N+1} \equiv \chi_i(N+2, N+2) = \eta_i(N+2, N+2) = \det(g). \quad (7)$$

若矩阵 g 满足(3)式, 我们称它的行列式为 2 阶拟 Wronsky 行列式. 类似可定义 k 阶拟 Wronsky 行列式. 利用拟 Wronsky 行列式及其代数余子式, 可将方程组(4a), (4b)写为 $\chi_i = \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, N+1$.

注意在矩阵 g 中只有第 1, 2 两行是独立的, 因此改记为

$$\xi^i(x) = g_1^i(x), \quad \zeta^i(x) = g_2^i(x) \quad (8)$$

设矢量 $\xi(x), \zeta(x)$ 的各分量均为解析函数, 并将它们形式地写为

$$\xi^i(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!} \xi_a^i x^a, \quad \zeta^i(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!} \zeta_a^i x^a. \quad (9)$$

写下 $2 \times \infty$ 矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2/2! & 0 & x^3/3! & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & x^2/2! & 0 & x^3/3! & \cdots \end{pmatrix} \quad (10)$$

和一个 $\infty \times (N+1)$ 矩阵

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_0^1 & \xi_0^2 & \cdots & \xi_0^{N+1} \\ \zeta_0^1 & \zeta_0^2 & \cdots & \zeta_0^{N+1} \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{N+1} \\ \zeta_1^1 & \zeta_1^2 & \cdots & \zeta_1^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

有

$$h(x) \equiv \Phi \Xi = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

现在引入另一个 $\infty \times \infty$ 矩阵 Λ ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

不难看出,

$$\exp(x\Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2/2! & 0 & \cdots \\ & 1 & 0 & x & 0 & x^2/2! & \cdots \\ & & 1 & 0 & x & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (14)$$

定义

$$H(x) \equiv \exp(x\Lambda) \Xi = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \\ \partial \xi(x) \\ \partial \zeta(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (15)$$

则 $H(x)$ 的前 $N+1$ 行正是矩阵 $g(x)$, 相应地, 拟 Wronsky 行列式 Δ_{N+1} 就是 $H(x)$ 前 $N+1$ 行元素构成的子阵的行列式.

为了后文应用, 现在引入无穷多个时间变量 $t_n, n=1, \cdots, \infty$. 定义

$$\Gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n, \quad (16)$$

则

$$\exp(x\Lambda) \cdot \exp \Gamma(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \Lambda^n, \quad (17)$$

式中 ρ_n 为著名的 Schur 函数,

$$\rho_n = \sum_{a_1+2a_2+3a_3+\dots=n} \frac{(t_1+x)a_1!t_2^{a_2}t_3^{a_3}\dots}{a_1!a_2!a_3!\dots}. \quad (18)$$

Schur 函数的前几个例子为

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1, \quad \rho_1 = t_1 + x, \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(t_1 + x)^2 + t_2, \\ \rho_3 &= \frac{1}{6}(t_1 + x)^3 + (t_1 + x)t_2 + t_3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

整个 Schur 函数族满足如下关系:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t_n} = \rho_{m-n} \quad (\rho_n \equiv 0, \text{若 } n < 0). \quad (20)$$

现在将矩阵(15)推广至含时间情形. 定义

$$H(x, t) = \exp(x\Lambda) \cdot \exp \Gamma(t) \Xi \equiv \begin{bmatrix} r'_0(x, t) & r_0^2(x, t) & \dots & r_0^{N+1}(x, t) \\ s'_0(x, t) & s_0^2(x, t) & \dots & s_0^{N+1}(x, t) \\ r'_1(x, t) & r_1^2(x, t) & \dots & r_1^{N+1}(x, t) \\ s'_1(x, t) & s_1^2(x, t) & \dots & s_1^{N+1}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中 $r'_a(x, t) = \sum_{b=0}^{\infty} \xi_{a+b}^i \rho_b$, $s'_a(x, t) = \sum_{b=0}^{\infty} \zeta_{a+b}^i \rho_b$. 类似定义

$$h(x, t) = \Phi \exp \Gamma(t) \Xi = \begin{bmatrix} r_0(x, t) \\ s_0(x, t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

利用性质(20)式不难写出如下的线性微分方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right) h(x, t) = 0. \quad (23)$$

这一方程的初始条件可从(22)式中令 $t_n=0, n=1, \dots, \infty$ 得出

$$h(x, 0) = \begin{bmatrix} r_0(x, 0) \\ s_0(x, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

方程(23)和(24)构成了关于 $h(x, t)$ 的线性初值问题.

现在将 u_l, v_l 推广至含时间情形. 引入记号 $[l_1, l_2, \dots, l_{N+1}]$ 来表示矩阵 $H(x, t)$ 的第 $l_1, l_2, \dots, l_{N+1}$ 行构成的子阵的行列式, 并定义

$$\begin{aligned} v_l &\equiv (-1)^l [1, 2, \dots, N+2-(l+1), N+2-(l-1), \dots, N+1; N+2] \\ &\quad / [1, \dots, N+1], \\ u_l &\equiv (-1)^l [1, 2, \dots, N+2-(l+1), N+2-(l-1), \dots, N+1; N+3] \\ &\quad / [1, \dots, N+1], \\ l &= 1, \dots, N+1. \end{aligned} \quad (25)$$

不难看出, (25)式给出的 v_l 和 u_l 也满足形如(1)式的一个方程, 唯一不同之处在于这时 u_l, v_l 及 g 均成为含时间的函数, 矩阵 g 就是 $H(x, t)$ 的前 $N+1$ 行构成的子阵.

在后文中将看到, 由(25)式定义的函数 u_l, v_l 将给出我们所称的 2 阶扩张的 KP 序列的解.

三、推广的 Sato 方程

由于(3)式,可将方程组(4)改写为

$$\mathcal{D}(x,t)h(x,t) = \mathcal{D}(x,t)\{\Phi \exp \Gamma(t) \Xi\} = 0, \quad (26)$$

$$\mathcal{D}(x,t) \equiv \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

且

$$\begin{cases} D_{11} = \sum_{a=1}^{m+1} v_{2(m-a)+3} \partial^{a-1}, & D_{12} = \partial^m + \sum_{a=1}^m v_{2(m-a)+2} \partial^{a-1}, \\ D_{21} = \sum_{a=1}^{m+1} u_{2(m-a)+3} \partial^{a-1} + \partial^{m+1}, & D_{22} = \sum_{a=1}^m u_{2(m-a)+2} \partial^{a-1}, \end{cases} \quad (\text{若 } N = 2m) \quad (28)$$

$$\begin{cases} D_{11} = \partial^m + \sum_{a=1}^m v_{2(m-a)+2} \partial^{a-1}, & D_{12} = \sum_{a=1}^m v_{2(m-a)+1} \partial^{a-1}, \\ D_{21} = \sum_{a=1}^m u_{2(m-a)+2} \partial^{a-1}, & D_{22} = \partial^m + \sum_{a=1}^m u_{2(m-a)+1} \partial^{a-1}. \end{cases} \quad (\text{若 } N = 2m - 1)$$

注意方程(26)在右乘 $GL(N+1, C)$ 的任一常元素时不变,因此知阵 Ξ 可视为取值在集合 $\{(N+1) \text{ 秩 } \infty \times (N+1) \text{ 矩阵}\} / GL(N+1, C)$

中的一个元素. 上述集合正好是 Grassman 流形 $GM(N+1, \infty)$.

方程(26)可写为

$$W(x,t) \nabla h(x,t) = 0, \quad (29)$$

式中

$$W(x,t) \equiv \mathcal{D}(x,t) \nabla^{-1}, \quad (30)$$

且

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & \partial^m \\ \partial^{m+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (N = 2m) \text{ 或 } \nabla = \begin{pmatrix} \partial^m & 0 \\ 0 & \partial^m \end{pmatrix} \quad (N = 2m - 1). \quad (31)$$

因此,矩阵 $W(x,t)$ 的各个阵元均为赝微分算符,

$$W = \begin{pmatrix} 1 + v_2 \partial^{-1} + v_4 \partial^{-2} + \cdots + v_{2m} \partial^{-m}, \\ v_1 \partial^{-1} + v_3 \partial^{-2} + \cdots + v_{2m+1} \partial^{-(m+1)} \\ u_2 \partial^{-1} + u_4 \partial^{-2} + \cdots + u_{2m} \partial^{-m}, \\ 1 + u_1 \partial^{-1} + u_3 \partial^{-2} + \cdots + u_{2m+1} \partial^{-(m+1)} \end{pmatrix} \quad (N = 2m),$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 + v_2 \partial^{-1} + v_4 \partial^{-2} + \cdots + v_{2m} \partial^{-m}, \\ v_1 \partial^{-1} + v_3 \partial^{-2} + \cdots + v_{2m-1} \partial^{-m} \\ u_2 \partial^{-1} + u_4 \partial^{-2} + \cdots + u_{2m} \partial^{-m}, \\ 1 + u_1 \partial^{-1} + u_3 \partial^{-2} + \cdots + u_{2m-1} \partial^{-m} \end{pmatrix} \quad (N = 2m - 1).$$

可以看到,在 N 为偶数、奇数两种情况下,算子矩阵 $W(x,t)$ 的形式基本相同,唯一不同的是赝微分的截断幂次. 在孤子理论中, W 算子的截断幂次对应着多孤子解的孤子数.

引入广义的 Leibnitz 法则

$$\partial^n f(x) = f(x) \partial^n + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \frac{d^r f}{dx^r} \partial^{n-r}, \quad (32)$$

可将算子 $W(x, t)$ 的逆 $W^{-1}(x, t)$ 写为

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_0^+ \mu_2 \partial^{-1} + \mu_4 \partial^{-2} + \mu_6 \partial^{-3} + \cdots, \nu_0 + \nu_2 \partial^{-1} + \nu_4 \partial^{-2} + \nu_6 \partial^{-3} + \cdots \\ \mu_1 + \mu_3 \partial^{-1} + \mu_5 \partial^{-2} + \mu_7 \partial^{-3} + \cdots, \nu_1 + \nu_3 \partial^{-1} + \nu_5 \partial^{-2} + \nu_7 \partial^{-3} + \cdots \end{pmatrix}, \quad (33)$$

式中

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1, \nu_0 = 0; \mu_1 = 0, \nu_1 = 1; \mu_2 = -v_2, \nu_2 = -v_1; \mu_3 = -u_2, \nu_3 = -u_1; \\ \mu_4 &= v_2^2 + u_2 v_1 - v_4, \nu_4 = u_1 v_1 + v_1 v_2 - v_3; \\ \mu_5 &= u_2 v_2 + u_1 u_2 - u_4, \nu_5 = u_2 v_1 + u_1^2 - u_3; \\ \mu_6 &= -v_6 - v_2 v_2' - v_2^3 - 2u_2 v_1 v_2 - v_1(u_2' - u_4) - u_2(u_1 v_1 - v_3) + 2v_2 v_4; \\ \nu_6 &= -v_5 - v_2 v_1' + v_2 v_3 - (v_2^2 + u_2 v_1 - v_4)v_1 - v_1 u_1' + v_1 u_3 - (u_1 v_1 + v_1 v_2 - v_3)u_1; \\ \mu_7 &= -u_2 v_2' + u_2 v_4 - u_6 - u_1 u_2' + u_1 u_4 - (u_2 v_1 - u_3 + u_1^2)u_2 - (u_2 v_2 - u_4 + u_1 u_2)v_2; \\ \nu_7 &= -u_2 v_1' + u_2 v_3 - (u_2 v_2 - u_4 + u_1 u_2)v_1 - u_5 - u_1 u_1' + u_1 u_3 - (u_2 v_1 - u_3 + u_1^2)u_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (34)$$

现在讨论赝微分算子 $W(x, t)$ 的时间演化问题, 将(29)式等号两端对 t_n 求导, 并利用(23)式, 有

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_n} + W \partial^n \right) \nabla h(x, t) = 0, \quad (35)$$

式中 $\left(\frac{\partial W}{\partial t_n} + W \partial^n \right) \nabla$ 为阶数高于 $\mathcal{D}(x, t)$ 的微分算子矩阵, 由于(35)和(29)式具有相同的解 $h(x, t)$ 这一事实, 必有

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t_n} + W \partial^n \right) \nabla = B_n W \nabla, \quad (36)$$

式中 B_n 为微分算子矩阵. 将(36)式等号两端右乘 $\nabla^{-1} W^{-1}$, 得

$$B_n = \frac{\partial W}{\partial t_n} W^{-1} + W \partial^n W^{-1}. \quad (37)$$

由算子 W 的定义, (37)式等号右端第一项为纯赝微分算子, 因此有

$$B_n = (W \partial^n W^{-1})^{(\geq 0)}, \quad (38)$$

上标 (≥ 0) 表示括号中算子的微分部分. 将(37)式改写为

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W \partial^n. \quad (39)$$

(38), (39)式构成的方程称为扩张的 Sato 方程. 当算子 W 为 1×1 矩阵时, (39)式就是 Sato 本人得出的方程^[4]. 现在 W 成为 2×2 矩阵, 故称(39)式为 2 阶扩张的 Sato 方程. 类似可写出 k 阶扩张的 Sato 方程. 从构造过程易知, 方程(39)的解由(25)式中的 u_i, v_i 给出.

四、2 阶扩张的 KP 序列

在本节中继续推广 Sato 的方法来构造 2 阶扩张的 KP 序列. 首先定义算子 $L(x, t)$,

$$L \equiv W \partial W^{-1}. \quad (40)$$

直接计算可以验证算子 L 采取如下形式:

$$L = \begin{bmatrix} \partial + b_2 \partial^{-1} + b_3 \partial^{-2} + \cdots, & d_2 \partial^{-1} d_3 \partial^{-2} + \cdots \\ p_2 \partial^{-1} + p_3 \partial^{-2} + \cdots, & \partial + q_2 \partial^{-1} + q_3 \partial^{-2} + \cdots \end{bmatrix}, \quad (41)$$

式中

$$\begin{aligned} b_2 &= -v'_2, d_2 = -v'_1, p_2 = -u'_2, q_2 = -u'_1, \\ b_3 &= -v'_4 + v_2 v'_2 + u_2 v'_1, d_3 = -v'_3 + v_1 v'_2 + u_1 v'_1, \\ p_3 &= -u'_4 + u'_2 v_2 + u'_1 u_2, q_3 = -u'_3 + u_1 u'_1 + u'_2 v_1, \cdots \end{aligned} \quad (42)$$

将(40)式等号两端求导,并利用扩张的 Sato 方程(39). 有

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L]. \quad (43)$$

由定义,

$$B_n = (W \partial^n W^{-1})^{(\geq 0)} = (L^n)^{(\geq 0)}. \quad (44)$$

(43), (44)式给出一个广义的 Lax 型方程. (41)式代入上式,并对不同的 n 写出相应的分量方程,就得到无穷多个可积的方程. 这个方程族我们称为 2 阶扩张的 KP 序列.

现在给出 2 阶扩张 KP 序列的几个例子. 由(41)和(44)式不难写出前几个 B_n 的形式为

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \partial^2 + 2b_2 & 2d_2 \\ 2p_2 & \partial^2 + 2q_2 \end{bmatrix}, \\ B_3 &= \begin{bmatrix} \partial^3 + 3b_2 \partial + 3(b'_2 + b_3), & 3d_2 \partial + 3(d'_2 + d_3) \\ 3p_2 \partial + 3(p'_2 + p_3), & \partial^3 + 3q_2 \partial + 3(q'_2 + q_3) \end{bmatrix}, \cdots \end{aligned} \quad (45)$$

对于 $n=2$ ($n=1$ 情形平庸), 将(45)式中的 B_2 代入(43)式,得

$$\frac{\partial b_2}{\partial t_2} = b''_2 + 3b'_3, \quad \frac{\partial d_2}{\partial t_2} = d''_2 + 2d'_3, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t_2} = p''_2 + 2p'_3, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t_2} = q''_2 + 2q'_3, \quad (46a)$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial t_2} = b''_3 + 2b'_4 + 2b_2 b'_2 + 2d_2 p_3 - 2d_3 p_2 + 2d_2 p'_2,$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial t_2} = d''_3 + 2d'_4 + 2d_2(q_3 - b_3) - 2d_3(q_2 - b_2) + 2d'_2 b_2 + 2d_2 q'_2,$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial t_2} = p''_3 + 2p'_4 + 2p_2(b_3 - q_3) - 2p_3(b_2 - q_2) + 2p'_2 q_2 + 2p_2 b'_2,$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t_2} = q''_3 + 2q'_4 + 2q_2 q'_2 + 2p_2 d_3 - 2p_3 d_2 + 2p_2 d'_2, \cdots \quad (46b)$$

当 $n=3$ 时,相应计算得

$$\frac{\partial b_2}{\partial t_3} = b'''_2 + 3b''_3 + 3b'_4 + 3d_2 p'_2 + 3p_2 d'_2 + 6b_2 b'_2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_2}{\partial t_3} &= d'''_2 + 3d''_3 + 3d'_4 + 3[d_2(b_2 + q_2)]', \\
\frac{\partial p_2}{\partial t_3} &= p'''_2 + 3p''_3 + 3p'_4 + 3[p_2(b_2 + q_2)]', \\
\frac{\partial q_2}{\partial t_3} &= q'''_2 + 3q''_3 + 3q'_4 + 3p_2d'_2 + 3d_2p'_2 + 6q_2q'_2; \\
\frac{\partial b_3}{\partial t_3} &= b'''_3 + 3b''_4 + 3b'_5 + 6d_2p'_3 + 6b_2b'_3 + 6b_3b'_2 + 3d_2p_4 - 3d_4p_2 + 3d'_2p_3, \\
\frac{\partial d_3}{\partial t_3} &= d'''_3 + 3d''_4 + 3d'_5 + 6b_2d'_3 + 6d_2q'_3 + 3b_2d_4 + 3d_2q_4 - 3b_4d_2 - 3d_4q_2 + 3b'_2d_3 \\
&\quad + 3d'_2q_3 + 3b_3d'_2 + 3d_3q'_2, \\
\frac{\partial p_3}{\partial t_3} &= p'''_3 + 3p''_4 + 3p'_5 + 6q_2p'_3 + 6p_2b'_3 + 3q_2p_4 + 3p_2b_4 - 3q_4p_2 - 3p_4b_2 \\
&\quad + 3q'_2p_3 + 3p'_2b_3 + 3q_3p'_2 + 3p_3b'_2, \\
\frac{\partial q_3}{\partial t_3} &= q'''_3 + 3q''_4 + 3q'_5 + 6q_2q'_3 + 6q_3q'_2 + 6p_2d'_3 + 3p_2d_4 - 3p_4d_2 + 3p'_2d_3, \\
&\dots\dots
\end{aligned} \tag{47b}$$

从(46a), (46b)和(47a)式中消去 b_4, d_4, p_4, q_4 , 可得到关于 b_2, d_2, p_2, q_2 和 b_3, d_3, p_3, q_3 这 8 个变量的 8 个联立非线性偏微分方程. 这个偏微分方程组是我们所称的 2 阶扩张 KP 序列的最简单的非平庸的例子, 我们称之为 2 阶扩张的 KP 方程.

五、Zakharov-Shabat 方程

根据(44)式, 可将 L^n 写为

$$L^n = B_n - \tilde{B}_n, \tag{48}$$

式中 $\tilde{B}_n$ 是 L^n 的纯赝微分部分(可含零次导数). 由(43)式易得

$$\frac{\partial L^k}{\partial t_n} = [B_n, L^k]. \tag{49}$$

由(48)和(49)式有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^n}{\partial t_k} - \frac{\partial L^k}{\partial t_n} &= [B_k, L^n] - [B_n, L^k] \\
&= [L^k + \tilde{B}_k, L^n] - [B_n, B_k - \tilde{B}_k] \\
&= [B_k, B_n] - [\tilde{B}_k, \tilde{B}_n].
\end{aligned} \tag{50}$$

取(50)式等号两端的微分部分, 得

$$\frac{\partial B_n}{\partial t_k} - \frac{\partial B_k}{\partial t_n} = [B_k, B_n]. \tag{51}$$

这正是熟知的 Zakharov-Shabat 方程. 对于 $n=2, k=3$, (51)式给出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_2}{\partial t_2} &= b''_2 + 2b'_3, \quad \frac{\partial d_2}{\partial t_2} = d''_2 + 2d'_3, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t_2} = p''_2 + 2p'_3, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t_2} = q''_2 + 2q'_3, \\
2\frac{\partial b_2}{\partial t_3} - 3\frac{\partial}{\partial t_2}(b'_2 + b_3) &+ b'''_2 + 3b''_3 + 6d_2p_3 - 6b_2b'_2 - 6p_2(d'_2 + d_3) = 0,
\end{aligned} \tag{52a}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial d_2}{\partial t_3} - 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (d'_2 + d_3) + d'''_2 + 3d''_3 + 6b_2 d_3 + 6d_2 q_3 - 6d_2 (b'_2 + b_3) - 6q_2 (d'_2 + d_3) &= 0, \\
2 \frac{\partial p_2}{\partial t_3} - 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (p'_2 + p_3) + p'''_2 + 3p''_3 + 6q_2 p_3 + 6p_2 b_3 - 6p_2 (q'_2 + q_3) - 6b_2 (p'_2 + p_3) &= 0, \\
2 \frac{\partial q_2}{\partial t_3} - 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (q'_2 + q_3) + q'''_2 + 3q''_3 + 6p_2 d_3 - 6q_2 q'_2 - 6d_2 (p'_2 + p_3) &= 0.
\end{aligned} \quad (52b)$$

方程组(52)正是上节提到的 2 阶扩张 KP 方程,其解由(42)式给出.特别地,若取特解 $p_2 = d_2 = 0$,则(52b)式中关于 b_2 和 q_2 的方程在消去 b_3 和 q_3 后构成为通常的 KP 方程.因此 2 阶扩张的 KP 方程含有两个通常的 KP 方程作为特解.

六、2 阶扩张的 KdV 序列:KP 的约化

前两节中描述的 2 阶扩张 KP 方程是关于 x, t_2, t_3 三个自变量的偏微分方程组.当施加合适的约束条件后,有可能使方程组中的一个时间变量消失,从而约化成 1+1 维的可积方程组. KP 方程的这种约化导致 KdV 方程,类似可由 2 阶扩张的 KP 序列约化出整个 2 阶扩张 KdV 序列.

所需引入的约束条件为

$$L^k = B_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots. \quad (53)$$

对应每一个 k ,相应的约化称为 k 级约化.由于约束条件(53)式的引入,使得不同下标的 b_i, d_i, p_i, q_i 间要满足一些等式关系.例如,对 2 级约化, $L^2 = B_2$ 给出

$$b_3 = -\frac{1}{2}b'_2, \quad d_3 = -\frac{1}{2}d'_2, \quad p_3 = -\frac{1}{2}p'_2, \quad q_3 = -\frac{1}{2}q'_2, \quad (54a)$$

$$b_4 = -\frac{1}{2}[b_2^2 + d_2 p_2 - \frac{1}{2}b''_2], \quad d_4 = -\frac{1}{2}[d_2(b_2 + q_2) - \frac{1}{2}d''_2],$$

$$p_4 = -\frac{1}{2}[p_2(b_2 + q_2) - \frac{1}{2}p''_2], \quad q_4 = -\frac{1}{2}[q_2^2 + d_2 p_2 - \frac{1}{2}q''_2], \dots. \quad (54b)$$

对 3 级约化,存在

$$b_4 = -\frac{1}{3}b'_3 - b_2^2 - d_2 p_2, \quad d_4 = -\frac{1}{3}d'_3 - d_2(b_2 + q_2),$$

$$p_4 = -\frac{1}{3}p'_3 - p_2(b_2 + q_2), \quad q_4 = -\frac{1}{3}q'_3 - q_2^2 - d_2 p_2, \dots. \quad (55)$$

在 k 级约化下,方程(49)成为

$$\frac{\partial B_k}{\partial t_n} = [B_n, B_k]. \quad (56)$$

比较 Zakharov-Shabat 方程(51),得

$$\frac{\partial B_n}{\partial t_k} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (57)$$

类似地,由于

$$(L^k)' = B_k,$$

有

$$\frac{\partial B_n}{\partial t_{kl}} = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (58)$$

因此, k 级约化使得所有 B_n 失去了对 t_{kl} 的依赖性. 换言之, 上述约化是一种维数约化.

对 k 级约化, 方程(56)对所有与 k 互素的整数 n 给出无穷多个可积方程组. 这些方程组构成了 2 级扩张的 KdV 序列.

现在写出两个例子. 对 2 级约化, $n=3$ 时有如下的 2 级扩张 KdV 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_2}{\partial t_3} &= \frac{1}{4} b_2''' + 3b_2 b_2' + \frac{3}{2} (d_2 p_2)', \\ \frac{\partial d_2}{\partial t_3} &= \frac{1}{4} d_2''' + \frac{3}{2} [d_2 (b_2 + q_2)]', \\ \frac{\partial p_2}{\partial t_3} &= \frac{1}{4} p_2''' + \frac{3}{2} [p_2 (b_2 + q_2)]', \\ \frac{\partial q_2}{\partial t_3} &= \frac{1}{4} q_2''' + 3q_2 q_2' + \frac{3}{2} (d_2 p_2)'. \end{aligned} \quad (59)$$

当 d_2 或 p_2 等于零时, 第一个和最后一个方程都化为标准的 KdV 方程.

对 3 级约化, $n=2$ 的特例给出

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_2}{\partial t_2} &= b_2'' + 2b_2', \quad \frac{\partial d_2}{\partial t_2} = d_2'' + 3d_2', \quad \frac{\partial p_2}{\partial t_2} = p_2'' + 2p_2', \quad \frac{\partial q_2}{\partial t_2} = q_2'' + 2q_2', \\ 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (b_2' + b_3) &= b_2''' + 3b_2'' + 6d_2 p_3 - 6b_2 b_2' - 6p_2 (d_2' + d_3), \\ 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (d_2' + d_3) &= d_2''' + 3d_2'' + 6b_2 d_3 + 6d_2 q_3 - 6d_2 (b_2' + b_3) - 6q_2 (d_2' + d_3) = 0, \\ 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (p_2' + p_3) &= p_2''' + 3p_2'' + 6p_2 b_3 + 6q_2 p_3 - 6p_2 (q_2' + q_3) - 6b_2 (p_2' + p_3), \\ 3 \frac{\partial}{\partial t_2} (q_2' + q_3) &= q_2''' + 3q_2'' + 6p_2 d_3 - 6q_2 q_2' - 6d_2 (p_2' + p_3). \end{aligned} \quad (60)$$

这组方程可称为 2 阶扩张的 Boussinesq 方程, 因为在 d_2 或 p_2 等于零的特殊情况下, 从(60)式中消去 b_3 和 q_3 将导致两个 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial t_2^2} = -\frac{1}{3} b_2''' - 2(b_2^2)', \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial t_2^2} = -\frac{1}{3} q_2''' - 2(q_2^2)'. \quad (61)$$

七、矩阵形式的 2 阶扩张 KP, KdV 序列

在前几节中, 用算子 L 的矩阵元的分量写出 2 阶扩张的 KP 序列和 KdV 序列. 在本节中将说明, 上几节中得出的形式颇为复杂的 2 阶 KP 和 KdV 序列可用矩阵形式给予一个简单的描述. 为此将 W 写为

$$W = 1 + W_1 \partial^{-1} + W_2 \partial^{-2} + W_3 \partial^{-3} + \dots, \quad (62)$$

式中

$$W_1 = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} v_4 & v_3 \\ u_4 & u_3 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} v_6 & v_5 \\ u_6 & u_5 \end{bmatrix}, \dots \quad (63)$$

这样, W^{-1} 可写为

$$\begin{aligned}
 W^{-1} &= 1 + M_1 \partial^{-1} + M_2 \partial^{-2} + M_3 \partial^{-3} + \dots \\
 M_1 &= -W_1, \quad M_2 = W_1^2 - W_2, \\
 M_3 &= -W_3 - W_1 W_1' + W_2 W_1 + W_1 W_2 - W_1^3, \dots
 \end{aligned} \quad (64)$$

据定义(40)式,有

$$L = W \partial W^{-1} \equiv \partial + U_2 \partial^{-1} + U_3 \partial^{-2} + U_4 \partial^{-3} + \dots, \quad (65)$$

式中

$$U_2 = -W_1', \quad U_3 = -W_2' + W_1' W_1, \dots \quad (66)$$

用矩阵形式,可将前几个 B_n 写为

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \partial, \quad B_2 = \partial^2 + 2U_2, \quad B_3 = \partial^3 + 3U_2 \partial + 3(U_2' + U_3), \\
 B_4 &= \partial^4 + 4U_2 \partial^2 + (6U_2' + 4U_3) \partial + (4U_2'' + 6U_3' + 6U_2^2 + 4U_4), \dots
 \end{aligned} \quad (67)$$

因此,2 阶扩张的 KP 方程组(52)可写为

$$\frac{\partial U_2}{\partial t_2} = U_2'' + 2U_3', \quad (68a)$$

$$3 \frac{\partial}{\partial t_2} (U_2' + U_3) - 2 \frac{\partial}{\partial t_3} U_2 = U_2''' + 3U_3'' + 6[U_2, U_3] - 6U_2' U_2. \quad (68b)$$

对 2 级约化情形,

$$\frac{\partial U_2}{\partial t_2} = 0 \Rightarrow U_3 = -\frac{1}{2} U_2', \quad (69)$$

(68b)式成为

$$\frac{\partial U_2}{\partial t_3} = \frac{1}{4} U_2''' + \frac{3}{2} (U_2' U_2 + U_2 U_2'). \quad (70)$$

这就是矩阵形式的 2 阶扩张 KdV 方程. 对 3 级约化情形, $\frac{\partial U_2}{\partial t_3} = 0$, 将(68b)式等号左端的 $-2 \frac{\partial}{\partial t_3} U_2$ 去掉便得到 2 阶扩张的 Boussinesq 方程.

八、结果与讨论

在本文中利用 Sato 的办法构造了具有 2 阶拟 Wronsky 行列式解的 2 阶扩张 KP 序列和 KdV 序列. 这些序列含有比通常的 KP, KdV 序列更多的自由度. 当方程中某些变量取平庸的零解时, 剩余的变量给出两个彼此独立的 KP 或 KdV 序列. 由于本文仅仅是研究拟 Wronsky 行列式及其相应的扩张 KP, KdV 序列可积方程等问题的一个初步尝试, 还有许多有关问题本文中并未涉及, 例如我们的扩张 KP, KdV 序列的 Hirota 双线性形式, τ 函数, Backlund 变换等等. 这些问题我们将留待以后解决.

最后, 讨论高阶扩张的情形. 显然, 只要 W 算子可以用(62)式表示, 其中 $W_l (l=1, 2, \dots)$ 均为 $k \times k$ 方阵, 那么文中一切推理(除了明显使用 2×2 阵元的部分)均可推广至 k 阶扩张的情形, 而且, 根据第二节的论述, 我们有理由估计 k 阶扩张的 KP 序列的解应由 k 阶拟 Wronsky 行列式给出.

- [1] R. Hirota, J. Satsuma, *Prog. Theor. Phys., Suppl.* , **59**, (1976), 64; *Phys. Lett.* , **85A**(1981), 407; R. Hirota, J. *Phys. Soc. Japan*, **50**(1981), 3785; Springer Lecture Notes in Math. , **515**(1976), 40; J. Satsuma, R. Hirota, J. *Phys. Soc. Japan*, **51**(1982), 3090.
- [2] A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Phys. Lett.* , **79B**(1978), 294; *Lett. Math. Phys.* , **3**(1979), 207; *Commun. Math. Phys.* , **74**(1980), 111; *Lett. Math. Phys.* **6**(1982), 505; *Commun. Math. Phys.* , **89**(1983), 59.
- [3] J. —L. Gervais, Y. Matsuo, LPTENS-91/35, NBI-HE-91-50.
- [4] M. Sato, RIMS Lokuuroku, **439**(1987), 30; M. Sato and Y. Sato, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, ed H. Fujita, P. D. Lax and G. Strong (Kinokuniya/North-Holland, Tokyo, 1983), p. 259; Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, *Prog. Theor. Phys., Suppl.* , **94**(1988), 210.
- [5] B. —Y. Hou, L. Chao, *Int. J. Mod. Phys.* , **A7**, (1992), 7015.
- [6] L. Chao, *Commun. Theor. Phys.* , **20**(to appear); B. —Y. Hou, L. Chao, *Int. J. Mod. Phys.* , **A8**(1993), 1105.
- [7] B. —Y. Hou, L. Chao, Two-extended Toda theory and W surface, in preparation.

QUASI-WRONGSKY DETERMINANTES AND EXTENDED KP AND KdV HIERARCHIES

ZHAO LIU

Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069

(Received 22 February 1993)

ABSTRACT

The Sato theory of KP and KdV hierarchies is generalized to the case of matrix lax operators, leading to new hierarchies of integrable nonlinear partial differential equations, which are called extended KP and KdV hierarchies in the context. It can be seen from the construction Process, the solutions of these new hierarchies can be expressed by the so-called quasi-wrongsky determinantes, and these quasi-wrongsky determinantes are just those obtained in our recent study of 2-extended Toda field theories.

PACC: 0220; 0290; 0340K