第 42 卷 第 2 期
1993 年 2 月
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 42, No. 2
Feb., 1993

Einstein 场方程的一个平面对称非静态标量场解*

李 鑑 增
北京广播学院，北京 100024

1991 年 12 月 11 日收到；1992 年 7 月 18 日收到修改稿

求出一个特殊的标量场 $V=V(t-z)$ 产生的平面对称度规的一个非静态解，并研究了它的对称性、奇异性等整体特性。

PACC: 0420;0440

文献[1]求得了零质量标量场产生的平面对称度规的静态通解，发现平面对称情况与球对称不同，标量场的引入与否，其时空的奇异性没有本质差别。本文则讨论零质量标量场产生的非静态时空。

在非静态的情况下，平面对称度规

$$ds^2=E(-dt^2+dz^2)+G(dx^2+dy^2) \tag{1}$$

中的 E,G 仅为 t 和 z 的函数。这时，Ricci 张量中不为零的分量有

$$\begin{aligned}
R_{00}&=\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2\right]\\
&\quad+\frac{1}{2E^2}\left[E\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2-E\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2\right],\\
R_{11}&=R_{22}=\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right),\\
R_{33}&=\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right]\\
&\quad+\frac{1}{2E^2}\left[E\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2-E\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2\right],\\
R_{03}&=\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial t}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial z}-\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z}\right],
\end{aligned} \tag{2}$$

对于满足 Klein-Gordon 方程

$$V^{a};_{a}=m^2V \tag{3}$$

的零质量 ($m=0$) 标量场 V，其能量动量张量为[2]

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$T_{ab}=V_aV_b-\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}V_cV_d, \tag{4}$$

其中 $V_a=\dfrac{\partial V}{\partial x^a}$. 将其代入 Einstein 场方程

$$R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi T_{ab},$$

得 10 个分量方程

$$R_{\mu\nu}=8\pi V_\mu V_\nu. \tag{5}$$

因为 $E(t, z), G(t, z)$ 不为 x, y 的函数，故 R_{ab} 也不为 x, y 的函数. 当 $b=a$ 时，由(5)式知，V_aV_a 也不为 x, y 的函数，即

$$\frac{\partial V_a}{\partial x}=\frac{\partial V_a}{\partial y}=0.$$

又因 $R_{01}=8\pi V_0V_1=0$，$R_{02}=8\pi V_0V_2=0$，$R_{03}=8\pi V_0V_3\neq 0$，则由(5)式易得 $V_1=V_2=0$，则

$$V_a=\left(\frac{\partial V}{\partial t}, 0, 0, \frac{\partial V}{\partial z}\right),\quad V^a=\left(-\frac{1}{E}\frac{\partial V}{\partial t}, 0, 0, \frac{1}{E}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{6}$$

将(2)，(6)式代入(5)式，得 4 个独立方程

$$\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2E^2}\left[E\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2-E\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2\right]=8\pi\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2E^2}\left[E\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2-E\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2\right]=8\pi\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial t}\right)-\frac{1}{2G^2}\left[2G\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial z}-\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z}\right]$$
$$=8\pi\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{10}$$

令 $\zeta=t+z$，$\eta=t-z$，方程(8)的通解为

$$G=f_1(\zeta)+f_2(\eta). \tag{11}$$

为了求其它方程的解，设标量场 V 仅为 η 的函数，即

$$V=V(\eta), \tag{12}$$

代入 Klein-Gorden 方程(3)得

$$f_1'(\zeta)V'(\eta)=0, \tag{13}$$

其中 $f_1'(\zeta)=df_1/d\zeta$，$V'(\eta)=dV/d\eta$. 当 V 为常数时，其能量动量张量 $T_{ab}=0$，只能得到真空平面对称的 Taub 解，略去，故由(13)式得

$$f_1'(\zeta)=0,\ f_1=a,\ G=f_2(\eta)+a=G(\eta). \tag{14}$$

将(12),(14)式代人,可把方程(7),(9),(10)化为

$$\frac{G'}{EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\partial E}{\partial z}\right)-\frac{2G''}{G}+\frac{G'^2}{G^2}=16\pi V'^2, \tag{15}$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{E^2}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2\right]=0, \tag{16}$$

$$-\frac{G'}{2EG}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\partial E}{\partial z}\right)+\frac{G''}{G}-\frac{G'^2}{2G^2}=-8\pi V'^2. \tag{17}$$

由方程(16)得

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\eta}\ln E=0,$$

则 $E=E(\zeta)$ 或 $E=E(\eta)$. 取 $E=E(\eta)$. 方程(15)和(17)实际是同一个方程, 将 $E=E(\eta)$ 代人,化为

$$\frac{E'G'}{EG}-\frac{G''}{G}+\frac{G'^2}{2G^2}=8\pi V'^2. \tag{18}$$

一个方程中有三个未知函数,具有无穷多组解. 当标量场 V 确定后,仍有无穷多个满足方程(18)的 $E(\eta)$, $G(\eta)$ 存在. 例如,令

$$V'^2=G' \qquad \frac{E'}{E}=\frac{G'}{2G}, \tag{19}$$

则可把方程(18)变为

$$G''+8\pi GG'-\frac{1}{G}G'^2=0 \tag{20}$$

进行变量代换 $p(G)=G'(\eta)$, 可进一步化为一个线性方程

$$p'+8\pi G-\frac{1}{G}p=0,$$

其解为

$$p=-8\pi G^2+c_1G. \tag{21}$$

当 $c_1=0$ 时,求出方程(20)的解为

$$G=(8\pi\eta+c_2)^{-1}. \tag{22}$$

当 $c_1\neq 0$ 时,对(21)式积分得

$$\eta+c_3=\frac{1}{8\pi}\int\frac{\mathrm{d}G}{b^2-(G-b)^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{c_1}\ln\dfrac{G}{2b-G} & (2b-G>0);\\[2ex] \dfrac{1}{c_1}\ln\dfrac{G}{G-2b} & (2b-G<0).\end{cases}$$

取 $c_3=0$ 得

$$G=\begin{cases}\dfrac{2b}{1+e^{-c_1\eta}}; & (23)\\[2ex] \dfrac{2b}{1-e^{-c_1\eta}}, & (24)\end{cases}$$

其中常数 $b=c_1/16\pi$. 因为由(22)式或(24)式得出的 $G'<0$，与(19)式矛盾，故应舍去。将(23)式代入(19)式得

$$V=-\sqrt{\frac{8b}{c_1}}\,\mathrm{arc\ tan}\,e^{-\frac{c_1}{2}\eta},\quad E=\frac{\sqrt{2b}\,c_4}{\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}}. \tag{25}$$

令 $c_4=1/\sqrt{2b}$，得满足(25)式的标量场所产生的一个平面对称的非静态时空

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}}(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2)+\frac{1}{(1+e^{-c_1\eta})}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2) \tag{26}$$

作一个简单的坐标变换，即令

$$T-z=-\frac{1}{c_1}\left(2\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}+\ln\frac{\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}-1}{\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}+1}\right),$$

可将(26)式化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\frac{1}{1+e^{-c_1\eta}}[\sqrt{1+e^{-c_1\eta}}(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2)+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2]\\&=\frac{1}{1+e^{-c_1\eta(T,Z)}}[-\mathrm{d}T^2+\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2].\end{aligned} \tag{26'}$$

说明这个时空是共形平直时空。

在(26)式中令 $c_1=0$，由 Killing 方程

$$\xi_{a;b}+\xi_{b;a}=0$$

得下面 10 个方程：

$$\begin{aligned}
&\xi_{0,0}-\frac{e^{-(t-z)}}{4[1+e^{-(t-z)}]}(\xi_0-\xi_3)=0,\\
&\xi_{0,1}+\xi_{1,0}-\frac{e^{-(t-z)}}{[1+e^{-(t-z)}]}\xi_1=0,\\
&\xi_{0,2}+\xi_{2,0}-\frac{e^{-(t-z)}}{[1+e^{-(t-z)}]}\xi_2=0,\\
&\xi_{0,3}+\xi_{3,0}+\frac{e^{-(t-z)}}{2[1+e^{-(t-z)}]}(\xi_0-\xi_3)=0,\\
&\xi_{1,1}-\frac{e^{-(t-z)}}{2[1+e^{-(t-z)}]^{3/2}}(\xi_0+\xi_3)=0,\quad \xi_{1,2}+\xi_{2,1}=0,\\
&\xi_{1,3}+\xi_{3,1}+\frac{e^{-(t-z)}}{[1+e^{-(t-z)}]}\xi_1=0,\\
&\xi_{2,3}+\xi_{3,2}+\frac{e^{-(t-z)}}{[1+e^{-(t-z)}]}\xi_2=0,\\
&\xi_{2,2}-\frac{e^{-(t-z)}}{2[1+e^{-(t-z)}]^{3/2}}(\xi_0+\xi_3)=0,\\
&\xi_{3,3}-\frac{e^{-(t-z)}}{4[1+e^{-(t-z)}]}(\xi_0-\xi_3)=0.
\end{aligned}$$

解此 10 个 Killing 方程知，此时空至少存在 6 个独立的 Killing 矢量，即除了平面对称

所固有的沿 x, y 方向的两个平移 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$ 以及在 x-y 平面内的旋转 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a$ 外,还有下面 3 个额外的 Killing 矢量:

$$ {}_{(1)}\xi^a = (1,\ 0,\ 0,\ 1), $$

$$ {}_{(2)}\xi^a = \left(-y,\ 0,\ 2\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}} + \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}}+1},\ -y\right), $$

$$ {}_{(3)}\xi^a = \left(-x,\ 2\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}} + \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-(t-z)}}+1},\ 0,\ -x\right), $$

其中 ${}_{(1)}\xi^a$ 为类光矢量场,计算其协变微分知

$$ {}_{(1)}\xi_{a;b} = 0. $$

说明度规(26)式为具有平行射线的平面波前引力波(pp 波)[3].

把度规(26)式与文献[4]中的(20)式或文献[5]中的(3)式相比较,发现它们有许多相似之处. 除了它们都是 pp 波,都至少具有 6 个 Killing 矢量场外,计算度规(26)式表示时空的曲率标量,在整个时空中也有

$$ R = R_{ab}R^{ab} = R_{abcd}R^{abcd} = 0, $$

即在整个时空中都不存在曲率奇异性. 当标量场 V 趋于零时,由(19)式知,G, E 都为常数,度规(26)式退化为 Minkowski 度规. 所有这些都与文献[4,5]的解非常相似.

[1] 李鉴增、梁灿斌,物理学报,40(1991),673.
[2] M. Wald. General Relativity (Chicago Univ. Press. Chicago, U. S. A. 1984), p. 70.
[3] D Kramer *et al.*, Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Cambridge Univ. Press. Cambridge, England 1980), p. 233.
[4] Li Jian-zeng and Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, 17(1985),1001.
[5] Kuang Zhi-quan, Li Jian-zeng and Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, 19(1987), 345.

A NONSTATIC PLANE-SYMMETRIC SOLUTION OF EINSTEIN EQUATIONS WITH A SPECIAL SCALAR FIELD

LI JIAN-ZENG
Beijing Broadcasting Institute, Beijing 100024

(Received 11 December 1991; revised manuscript received 18 July 1992)

ABSTRACT

A nonstatic solution of plane-symmetric metric generated by a special scalar field $V = V(t - z)$ has been obtained. The global properties, such as its symmetries, singularities, are also investigated.

PACC: 0420; 0440