

双参量孤子细胞自动机*

陈陆君 梁昌洪

西安电子科技大学, 西安 710071

1993 年 2 月 26 日收到

提出一种双参量孤子细胞自动机, 给出速度的代数表达式及裂变条件, 分析了相互作用规律和各种守恒量, 引入并阐明了基本孤子概念及其守恒特征的应用.

PACC: 0340K; 0290; 8725D

一、引 言

细胞自动机 (cellular automata) 是分析自然界复杂现象的十分有效的重要模型, 已被广泛用于物理学、化学、生物学和计算科学等各个领域^[1,2]. Jensen^[3]利用或然自动机研究了非平衡临界行为; Dab^[4]等人提出用点阵气体自动机来微观逼近耦合的反应-扩散方程. 细胞自动机是一种时间、空间及状态完全离散的系统, 在某些情况下, 当它们相互作用时, 能保持各自的特征, 因而可看成是一种最简单的孤子系统. Park 等人^[5]提出了一种新型自动机, 被称为滤渗自动机 (Filter automata), 他们发现其中的孤子碰撞行为非常普遍. 最近, Satsuma^[6]提出了一种滤渗类型的自动机, 发现自动机的任意一个状态都由孤波构成, 而且当它们相互作用时, 表现出与孤波完全相同的行为. 这种自动机的速度不能改变, 只要其长度确定, 其速度就唯一确定, 这一点非常类似于 KdV 孤子, 前者速度等于其长度, 而后者速度正比于其幅值, 由于这种自动机是二值状态系统, 因此, 其“大小”只能通过长度来表征, 从这个意义上讲, 可把长度对应成 KdV 孤子的幅值. 然而, 有许多孤子系统, 如 NLS (nonlinear Schrödinger) 方程的明孤子解, 都是双参数的, 即其幅值与速度是相互独立的, 受此启发, 我们提出一种可独立调节长度和速度的孤子细胞自动机, 并分析讨论了它们的若干守恒特性.

二、双参量孤子细胞自动机的时间演化及其相互作用

研究一维空间中二值状态细胞自动机, 设 u_j^t 取值为 0 或 1, 其中 j 代表第 j 个空间离散点, 简称第 j 个座, t 代表第 t 个时间离散点, 二者取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$, 并规定在充分左或充分右的空间区域中 $u_j^t = 0$, 规定其时间演化由下式决定:

$$u_j^{t+1} = \frac{1}{4} (|S_{j+v_2}^t - S_{j-1}^t + 1| - |S_{j+v_2}^t - S_{j-1}^t - 1|) (1 + S_{j+v_1}^t)$$

* 国家自然科学基金和国家青年自然科学基金资助的课题.

$$-S'_{j+v_1+1})(1 + \frac{1}{2}(|S'_{j+v_2} - S'_{j+1} + 1| - |S'_{j+v_2} - S'_{j+1} - 1|)), \quad (1)$$

其中

$$S'_j = \sum_{i=-\infty}^j u'_i. \quad (2)$$

计算机模拟表明,这个系统也存在两种类型的孤波,即单孤波和复合孤波,单孤波仅由一个由有限个 1 构成的序列组成,复合孤波是由任意有限个长度相同的序列组成,而且这些序列的间距必须等于或大于序列的长度,这里的“长度”代表一个序列中 1 的个数,而“间距”代表两序列之间 0 的数目,之所以要这样限制,是因为这个系统在这空间是非局域作用的,当间距过小时,相互作用使它们变成另一种终态,这点可通过后面引入的“基本孤波”作进一步分析.(1)式还代表了一种时间反演可逆系统,即可根据后一时间 $t+1$ 的状态推断前一时间 t 的状态,这时定义

$$S'_j = \sum_{i=j}^{+\infty} u'_i, \quad (3)$$

则 u'_j 的演化规律为

$$u'_j = \frac{1}{4}(|S'_{j-v_2} - S'_{j+1} + 1| - |S'_{j-v_2} - S'_{j+1} - 1|)(1 + S'_{j-v_1} - S'_{j-v_1-1})(1 + \frac{1}{2}(|S'_{j+v_2} - S'_{j+1} + 1| - |S'_{j+v_2} - S'_{j+1} - 1|)). \quad (4)$$

(1)和(4)式中的 v_1, v_2 均为任意正负整数,是控制孤波速度的参数.孤波速度可定义如下:在某一单孤波的某邻域,若 t 时刻与 $t+1$ 时刻的状态有关系 $u_j^{t+1} = u'_{j+v}$,那么 $u_j^{t+1} = u'_{j+lv}$,因此,式中 v 正是孤波的速度.由此定义,(1)式演化系统中单孤波的速度为

$$v = \begin{cases} l - v_1 - 1 & (v_1 - l + 1 \leq v_2 \leq v_2 + 1), \\ \text{裂 变} & (v_1 + 2 \leq v_2 \leq v_1 + l), \\ -v_2 & (\text{其它情况}). \end{cases} \quad (5)$$

因此,在上述参数 (v, l) 空间的一个区域中,这个系统中的孤子是不稳定的,将裂变成若干较小的“亚孤子”,这不是这个系统所特有的,光纤中的 NLS 孤子和自感应透明孤子脉冲都存在这种裂变现象^[7,8],当 NLS 方程中增加一个 Raman 项时,它造成频移与幅值 4 次方成正比,因而同一脉冲中幅值大小不同的部分有不同的速度,从而发生裂变,自感应透明脉冲在吸收介质中,只有 2π 脉冲是稳定的, $4\pi, 6\pi, \dots$ 脉冲将裂变成 $2, 3, \dots$ 个 2π 脉冲.根据(5)式,孤子速度不但可调节,而且还可以反向传播,图 1(a), (b), (c) 给出二孤子的传播及相互作用,其中图 1(a)和图 1(b)在相互作用时,二孤子交换一下位置,但图 1(c)中的孤子相互作用时需经过一个中间状态后才实现位置交换,即要经过 0110110 才由 0111010 变成 0101110.一般情况下,两孤子相互作用就是这两种类型.图 2 给出多孤子相互作用及其演化,可以看到在相互作用时无论多么混乱,但最终各孤子都恢复了各自原有的状态,这正是孤子的特征之一.与 Satsuma 等人的孤子细胞自动机一样,相互作用的唯一效应就是使各孤子产生相移,相移是除了与长度有关外,还与速度有关. Satsuma 孤子相移是:长孤子为 $2l_1$,短孤子为 $-2l_1$, l_1 为短孤子长度,但本文中不再这样,如图 2(a)中

11, # 1101 + # 0010 是守恒量, 还有 # 1110011001 + # 0111000 + # 01100 和 # 1110011001 + # 0111000 + # 011000 + # 010 等都是守恒量, 需要指出前面的守恒与初值及参数有关, 但真正要寻求的守恒量应是和初值无关的守恒, 如上述 5 种守恒量中, 第 5 种不适用于图 2(c) 的情况, 因此应舍去. 另一方面, 可由 # 1, # 11 等守恒分别构造出守恒量 $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j$ 和 $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j u_{j+1}$ 等, 如 # 1101 + # 0010 = $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j u_{j+1} (1 - u_{j+2}) u_{j+3} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1 - u_j) (1 - u_{j+1}) u_{j+2} (1 - u_{j+3})$, 用此方法可表示出任意一种字符串数的代数表达式, 并用此表达式来证明这个串的数目是否为守恒量.

我们注意到, 孤子之间的作用是“长程”(因是空间非局域的)作用, 即孤子在表观上还未接触, 就发生了相互作用并交换位置, 如图 1(b) 尤为明显, 可见孤子“周围”存在着一种“无形”的“场”, 它随孤子一起运动, 当相互作用时, 首先是这种“场”的相互作用, 因此自然就想到这种“场”被标志孤子存在的“1”字符串周围的“0”字符串所蕴含, 因此有必要引入一种被称之为“基本孤子”的字符串来完全从根本上描述“1”字符串及其尾部——无形的“0”字符串, 于是, 有 4 种方法来构造这种“基本孤子”, 构造原则是, 当孤子相互作用时, 这种“基本孤子”是不变的, 这也是一种广义的守恒量. 具体步骤可分为 6 步: 1) 对序列分组, 使每组全为 1 或全为 0, 而相邻两组中的元素不能相同, 如 110001 只能是三个组, 每个组的长度用 l_i 表示 ($i=1, 2, \dots$); 2) 找出所有满足关系 $l_i \leq l_{i+1}$ 的 i , 再取最左的 i (即最小的这种 i); 3) 把由 2) 确定的第 i 组中的所有元素拉丁化, 即若第 i 组元素是“1”就用大写拉丁字母表示, 若是“0”就用小写拉丁字母表示, 且若第 i 个组长度 $l_i=1$, 则用字母 A (或 a), 若 $l_i=2$, 则用 B (或 b), 若 $l_i=3$, 则用 C (或 c), $\dots$; 4) 把这样的第 i 组左邻的一组中与第 i 组毗邻的 l_i 个元素也按 3) 拉丁化, 如图 3 中, 满足这样条件的 $i=2$, 即 $\dots 00111 00$ 11100 $\dots$ 中的划线部分, 按 3) 应是 $\dots 00111bb11100 \dots$, 由此进一步化为 $\dots 01BBbb11100 \dots$, 注意与 bb 左邻的一组中不是全部元素 (而是其中 l_i 个元素) 被拉丁化; 5) 检查是否所有的非零元素都被拉丁化, 若是, 则对这一序列构造“基本孤子”的过程就结束; 若不是, 则进行第 6 步; 6) 重新编组, 这时编组只对未被拉丁化的元素, 而被拉丁字母隔开的元素认为是毗邻的, 如图 3 中 $\dots 0001BBbb11100010 \dots$ 中第一个“1”和 bb 之后的 111 认为是连通的, 因此编组时作 1111 处理, 但不能改变原有排列, 即第一个“1”能与 $BBbb$ 交换. 编组之后, 重复 2)—5) 的过程, 如图 3 中经过 5 步之后就实现了对这个序列的构造. 上面是方法之一. 还有三种类似的方法, 即第二种为把上述步骤 4) 中的“左邻”改为“右邻”; 第三种是把上述步骤 2) 改为: 找出所有满足关系 $l_{i-1} \geq l_i$ 的最右边的 i ; 第四种是在第三种方法基础上再作第二种方法中那种改变. 当各孤子充分远离时, 第一种与第三种是完全一样, 第二种与第四种也是, 但各孤子相互作用时, 从图 4 可看出它们的差别, 然而每一种方法所构造的“基本孤子”在演化中始终是不变的, 虽然相互作用时, 每个孤子都被别的孤子分割成几部分, 但各部分的总和是保持不变 (或守恒) 的, 因此“基本孤子”给出了一种广义的守恒量, 同时还可看到, “基本孤子”能比表观孤子 (即仅由“1”构成的串) 更适应于表达孤子的本质及其相互作用特征,

1 ...00000001110011100010000110000...
2 ...00000001BBbb11100010000110000...
3 ...00000001BBbb11100010000110000...
4 ...00000001BBbb11100010000110000...
5 ...00000001BBbb11100010000110000...

图 3 对序列构造“基本孤子”的示意图

子)表达孤子的本质及其相互作用特征,同时,还可用它来预见某一序列的渐近状态或孤子组成.

- [1] S. A. Kauffmam, *Physica D*, **10**(1984), 145.
- [2] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986).
- [3] I. Jensen, *Phys. Rev. A*, **43**(1991), 3187.
- [4] D. Dab, J. B. Boon, Y. X. Li, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 2535.
- [5] K. Park, K. Steiglitz and W. P. Thurston, *Physica D*, **19**(1986), 423.
- [6] J. Satsuma, N. Sasa and D. Takahashi, *Research Report in Physics—Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, Ed. : V. G. Makhankov, O. K. Pashaev (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1991).
- [7] K. Tai, A. Hasegawa *et al.*, *Opt. Lett.*, **13**(1988), 392.
- [8] 李福利, 高等激光物理学(合肥, 中国科学技术大学出版社, 1992).

TWO-PARAMETER SOLITON CELLULAR AUTOMATA

CHEN LU-JUN LIANG CHANG-HONG

Xidian University, Xi'an 710071

(Received 26 February 1993)

ABSTRACT

A two-parameter soliton cellular automata is proposed. The algebraic expression of soliton velocity and soliton fission condition are given. The interaction behaviors of solitons and a number of conservative quantities of the system is well analyzed. A new concept, called 'essential soliton', is introduced and discussed and the application of the properties of the conservative quantities is exhibited.

PACC: 0340K; 0290; 8725D