

可变分形维广义 cantor 集合介质层对斜入射波的反射透射特性

陈陆君 梁昌洪 吴鸿适

西安电子科技大学 601 室, 西安 710071

1991 年 12 月 2 日收到

研究了一类可连续控制分形维数广义 cantor 集合介质层对斜入射波的反射透射特性. 充分利用结构的自相似性, 给出了适应于 TE 波和 TM 波的一般方法和公式以及在斜入射情况下的新型反射透射频谱, 这种谱具有频率分布周期性和自相似性, 它既是一种崭新的物理现象, 同时又蕴藏着广泛的应用价值.

PACC: 4110H; 4220; 0340K; 4280

一、引 言

分形是近十年来广泛受到自然科学家和社会科学家关注与吸收的重要概念, 1982 年, Jakeman^[1]首次将它引入皱纹表面散射的研究. 此后, Bourrely 等人^[2]及 Jaggard, Kim 和 Sun 等人^[3-5]对分形表面光散射及粗糙光纤的光散射^[6]进行了各方面的研究. Jaggard 等人在文献^[7]中分析了光波与分层 cantor 集合介质的相互作用及其散射特性, 并提出这种结构有可能用于多层综合分析, 分布反馈集成光学结构及多量子阱器件等方面, 这些器件的分析、设计及操作都依赖于光波与一种专门的复杂几何结构的相互作用. 因此, 本文将研究一种可连续控制分形维数的广义 cantor 集合介质对 TE 波和 TM 波的反射透射特性, 本文结果可能在电子对抗及薄膜光学、光电器件等领域中获得应用.

二、cantor 集合分层介质的反射透射谱

cantor 集合是具有在尺度变换或位移变换下保持不变的自相似分形结构, 这种特性可认为是一种扩大的对称性. 1990 年 Jaggard 等人^[7]提出了 1/3 居中 (middle-third^[8]) cantor 集合分形介质的波反射问题. 本文将进一步研究一类可连续控制分形维数的 $1/R$ ($R > 1$) 居中的广义 cantor 集合分层介质对 TE 波和 TM 波的反射透射特性. 按文献^[9]中的容积维数定义, 其分形维数为

$$D = \ln 2 / [\ln 2 + \ln R - \ln(R - 1)]. \quad (1)$$

因此, 通过调节实数 R , 可实现分形维数 D 的连续变化; 当 $R \rightarrow \infty$ 和 $R \rightarrow 1$ 时, $D \rightarrow 1$ 和 $D \rightarrow 0$, 当 $R = 3$ 时 $D = \ln 2 / \ln 3$ 这正是 1/3 居中 cantor 集合的分形维数^[9]. 图 1 给出 $R = 2$ 时 cantor 集合的各级构造与斜入射示意图.

设厚度为 d 折射率为 n_1 的单层介质板放置于折射率为 n_0 的背景之中,这时 TE 波在板两边界面的反射和透射系数分别为

$$R_{n_0 n_1} = \frac{n_0 \cos \theta - n_1 \cos \theta_t}{n_0 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t},$$

$$R_{n_1 n_0} = -R_{n_0 n_1}, \quad (2)$$

$$T_{n_0 n_1} = \frac{2n_0 \cos \theta}{n_0 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t},$$

$$T_{n_1 n_0} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_0 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t}. \quad (3)$$

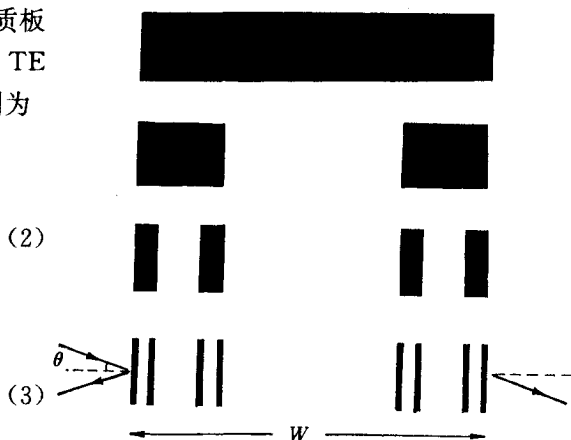


图 1 1/2 居中 cantor 集合的各级构造与斜入射示意图

对 TE 波为

$$R_{n_0 n_1} = [n_1 / \cos \theta_t - n_0 / \cos \theta] / [n_1 / \cos \theta + n_0 / \cos \theta],$$

$$R_{n_1 n_0} = -R_{n_0 n_1} \quad (4)$$

$$T_{n_0 n_1} = (2n_1 / \cos \theta_t) / [n_1 / \cos \theta_t + n_0 / \cos \theta],$$

$$T_{n_1 n_0} = (2n_0 / \cos \theta) / [n_1 / \cos \theta_t + n_0 / \cos \theta]. \quad (5)$$

考虑到斜入射波在厚度为 d 的 n_1 介质中有相移 $n_1 k d / \cos \theta_t$, 其中

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2} \sin^2 \theta}. \quad (6)$$

因此波的反射系数和透射系数为

$$R_1(d) = R_{n_0 n_1} + T_{n_0 n_1} T_{n_1 n_0} R_{n_1 n_0} e^{i 2 n_1 k d / \cos \theta_t}$$

$$\times [1 + (R_{n_1 n_0} e^{i n_1 k d / \cos \theta_t})^2 + \dots]$$

$$= R_{n_0 n_1} + \frac{R_{n_1 n_0} T_{n_0 n_1} T_{n_1 n_0} e^{i 2 n_1 k d / \cos \theta_t}}{1 - R_{n_1 n_0}^2 e^{i 2 n_1 k d / \cos \theta_t}}, \quad (7)$$

$$T_1(d) = T_{n_0 n_1} T_{n_1 n_0} e^{i n_1 k d} [1 + R_{n_1 n_0} R_{n_1 n_0} e^{i 2 n_1 k d / \cos \theta_t} + \dots]$$

$$= \frac{T_{n_0 n_1} T_{n_1 n_0} e^{i n_1 k d / \cos \theta_t}}{1 - R_{n_1 n_0}^2 e^{i 2 n_1 k d / \cos \theta_t}}. \quad (8)$$

设 W 为 cantor 集合介质层的总厚度,则 0 级集合反射透射系数为 $R_e^{(0)} = R_1(W)$, $T_e^{(0)} = T_1(W)$. 一级集合是由两块相距为 W/R , 厚度为 $\frac{W}{2}(1 - \frac{1}{R})$ 的平行介质板所组成,把(6),

(7)式用于两板之间的空隙,并考虑相移 $n_0 k d_0 / \cos \theta$,即把 $R_e^{(0)} = R_1[\frac{W}{2}(1 - \frac{1}{R})]$ 和 $T_e^{(0)} = T_1[\frac{W}{2}(1 - \frac{1}{R})]$ 作为 $R_{n_1 n_0}$ 及 $R_{n_0 n_1}$ 和 $T_{n_1 n_0}$ 及 $T_{n_0 n_1}$ 代入(6),(7)式,即可得一级集合的反射透射系数. 用同样方法可处理二级以上的集合. 事实上,如果定义

$$T_2(r, t, d) = \frac{t^2 e^{i n_0 k d / \cos \theta}}{1 - r^2 e^{i 2 n_0 k d / \cos \theta}}, \quad (9)$$

$$R_2(r, t, d) = r[1 + T_2(r, t, d)e^{in_0kd/\cos\theta}], \quad (10)$$

反复应用 $1/R$ 集合的自相似性, 则可得递推公式

$$R_e^{(i+1)} = R_2(R_e^{(i)}, T_e^{(i)}, W[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^{N-i-1} \frac{1}{R}]), \quad (11)$$

$$T_e^{(i+1)} = T_2(R_e^{(i)}, T_e^{(i)}, W[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^{N-i-1} \frac{1}{R}]). \quad (12)$$

当 i 取遍 $0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 所得 $R_e^{(N)}$ 和 $T_e^{(N)}$ 即为 N 级 cantor 集合分层介质的总反射透射系数, 递推的初始条件为

$$R_e^{(0)} = R_1(W[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^N]), \quad (13)$$

$$T_e^{(0)} = T_1(W[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^N]). \quad (14)$$

因此, 将(1)–(4)式代入(12), (13)式, 经过对(10), (11)式的递推可得到具有任意维数并可达到任意级的 cantor 集合的反射透射频谱.

三、斜入射实例与应用前景

下面将给出各种情况的反射透射谱 $|R_e(f)|$ 及 $|T_e(f)|$ (纵轴), 横轴为相对频率 $f/(c/W)$, W 和 c 分别为 cantor 集合总厚度和真空中光速, 在计算中取 $n_0=1, n_1=1.5$. 在无

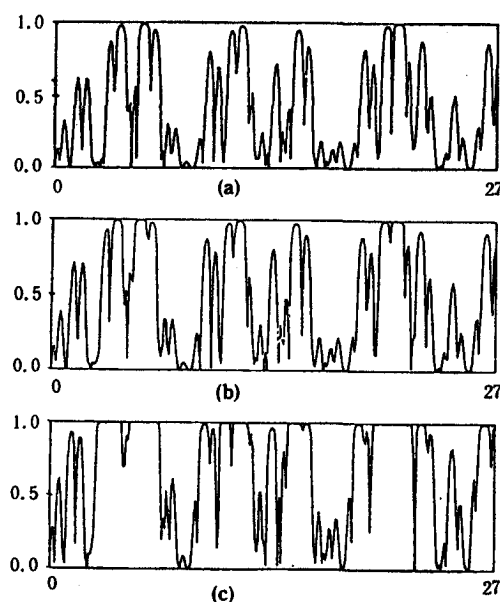


图 2 各种入射角的 TE 谱 $R=\pi, N=3$; (a) $\theta=0^\circ$; (b) $\theta=30^\circ$; (c) $\theta=60^\circ$

特别说明时都指反射谱. 图 2, 图 3 和图 4 给出当 $R=\pi$ 时, 各种入射角情况下 TE 波和 TM 波的反射透射频谱. 可以看到, 在一系列频率点或带上存在透射窗口(即几乎全透射)和反射镜面(即几乎全反射), 由图 2 和图 4, 随着入射角增加镜面带逐渐变宽, 带顶趋于平坦, 当以特别斜的角($\theta=85^\circ$)入射时, TE 波和 TM 波的透射窗口仍然存在, 且 TM 的窗口密度比 TE 波的大, 从图 3 可知, TM 波在 $\theta=57^\circ$ 附近几乎全透射, 事实上, 这时的 Brewster 角 $\theta_B=56.31^\circ$. 图 5 和图 6 给出 $\theta=45^\circ$ 时, 不同分形维 cantor 集合的反射特性, 谱随 f 的分布表现出自相似特性和准周期性, 在低维(如图 5(a), 图 6(a))情况下, 自相似性尤为明显, 即将某一局部放大后与整体轮廓相似, 图 6(c)明显地表现出谱的准周期性, 即存在多种不同周期的轮廓线, 事实上,

周期性或准周期性是一般存在的, 如果 $[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^N 2n_1/\cos\theta]$ 和 $[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{R})^N 2n_0/(R\cos\theta)]$ 是有理数, 则使二者成为整数的最小公倍数即为其周期, 若二者是无理数, 周期原

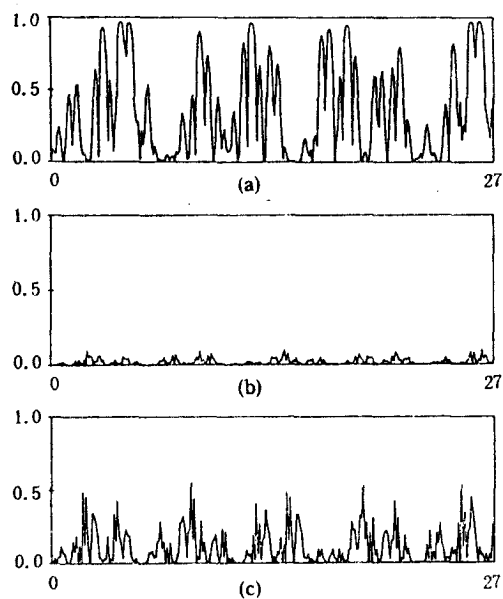


图3 各种入射角的MT谱 $R=\pi$, $N=3$; (a) $\theta=30^\circ$; (b) $\theta=57^\circ$; (c) $\theta=60^\circ$; $\theta=0^\circ$ 时,同图2(a)

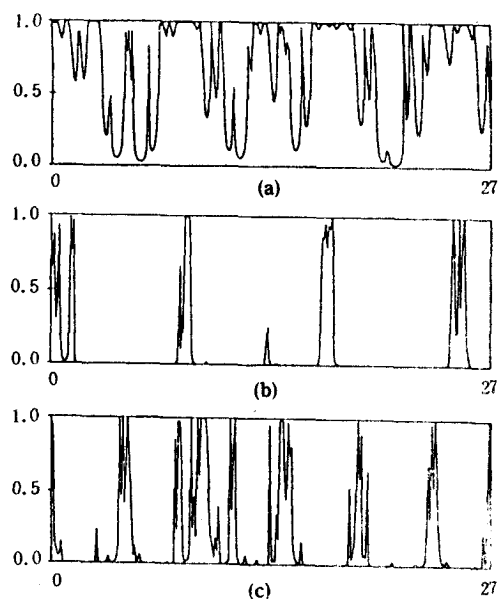


图4 两种入射角的透射谱 $R=\pi$, $N=3$; (a) TE波, $\theta=45^\circ$; (b) TE波, $\theta=85^\circ$; (c) TM波, $\theta=85^\circ$

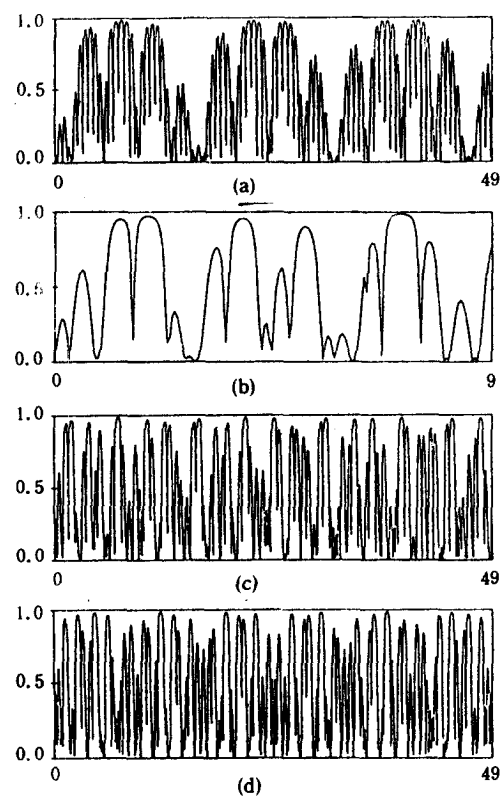


图5 不同分形维cantor集对TE波的反射谱($N=2$) (a) $R=\sqrt{2}$; (b) $R=\pi$; (c) $R=\pi$ (更宽频域); (d) $R=7$

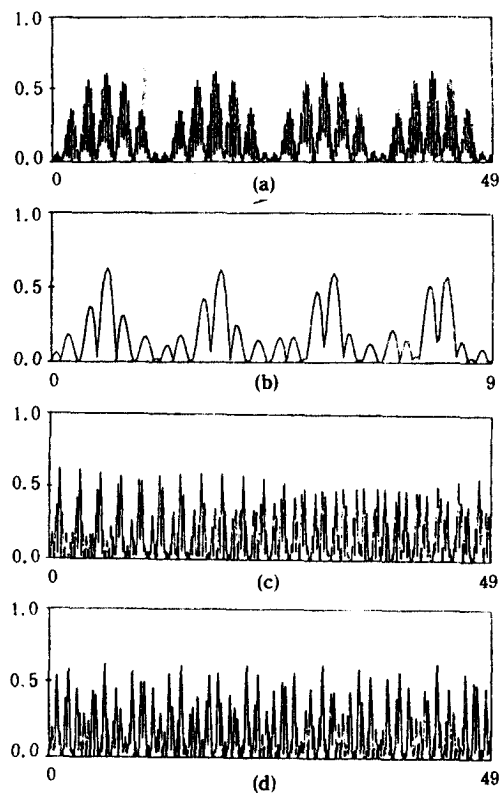


图6 不同分形维cantor集对TM波的反射谱($N=2$) (a) $R=\sqrt{2}$; (b) $R=\pi$; (c) $R=\pi$ (更宽频域); (d) $R=7$

则是无限大,但这时准周期性是存在的,即其外貌大致相同,只是每个“周期”内的微细结构不同,把无理数按精度要求用一有理数逼近可得到准周期值。

根据上述特点,这种分形介质层可用于光学镜头、光电器件,根据功能要求做适当的设计,把这种薄膜镀在这些器件上,可得到较宽频带的全反射或全透射特性,利用在大斜度入射情况下仍存在一系列窄的透射窗口的特点,可进行频率滤波从而获得单色性较好的透射波;利用谱的自相似性及局域随机性,可望探索一类新型的电磁干扰源。有关这些方面的研究正在进行之中,希望有关学者能提出其它方面的应用。

总之,本文给出一类连续可调分形维数的 cantor 集合介质层对 TE, TM 波的反射透射频谱的一般计算方法、公式和一类新型反射透射谱,这是一种自相似谱和准周期谱,这既是一种崭新的物理现象,而且又蕴藏着宽广的实用价值。

- [1] E. Jakeman, *J. Opt. Soc. Amer.*, **72**(1982), 1034.
- [2] C. Bourrely, D. Chiappetta and B. Torresani, *J. Opt. Soc. Amer.*, **A3**(1986), 250.
- [3] D. L. Jaggard, Y. Kim, *J. Opt. Soc. Amer.*, **A4**(1987), 1055.
- [4] D. L. Jaggard, X. Sun, *J. Opt. Soc. Amer.*, **A7**(1990), 1131.
- [5] D. L. Jaggard, On fractal electrodynamics, in *Recent Advance in Electromagnetic Research*, H. N. Kritikos and D. L. Jaggard eds. (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [6] D. L. Jaggard, X. Sun, *IEEE Trans.*, **AP-37**(1989), 1591.
- [7] D. L. Jaggard, X. Sun, *Opt. Lett.*, **15**(1990), 1428.
- [8] K. Falconer, *Fractal Geometry* (John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1990).
- [9] 高安秀树著,沈步明,常子文译,分数维(北京,地震出版社,1989).

REFLECTION PROPERTIES OF OBLIQUE-INCIDENT WAVES IN CONTINUOUSLY-CHANGABLE-DIMENSION FRACTAL CANTOR LAYERS

CHEN LU-JUN LIANG CHANG-HONG WU HONG-SHI

Xidian University, Xi'an 710071

(Received 2 December 1991)

ABSTRACT

Reflection and transmission spectra of oblique-incident waves at a kind of general continuously-Changeable-dimension fractal cantor Layers are investigated. With the self-similarity, a generalized method and formulae as well as a new type of reflection and transmission spectra, i. e. the self-similar spectra, are obtained. This is a new physical phenomena which would find some application.

PACC: 4110H; 4220; 0340K; 4280