

评“Einstein-Cartan 引力理论中的 广义协变守恒定律”

李 承 尧

西安电子科技大学物理系, 西安 710071

1992 年 1 月 13 日收到

本文证明: 如果以坐标的广义位移变换和标架场的 Lie 微商作为对称变换, 则不可能利用 Noether 定理得出所谓 Einstein-Cartan 引力理论中广义协变的能量动量守恒定律。

PACC: 0450; 0420

一、引 言

段一士等人^[1]从系统的一般引力作用量

$$I_G = \int_G \mathcal{L}_G(e_a^\mu, e_{a,\nu}^\mu; \phi^A, \phi_{,\mu}^A) b_x^\mu, \quad (1)$$

对下列微变换:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \\ e_a'^\mu(x) &= e_a^\mu(x) + \delta_0 e_a^\mu(x), \quad e_a'^\mu(x') = e_a^\mu(x) + \delta e_a^\mu(x), \quad \delta e_a^\mu = \delta_0 e_a^\mu + e_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu, \\ \phi'^A(x) &= \phi^A(x) + \delta_0 \phi^A(x), \quad \phi'^A(x') = \phi^A(x), \quad \delta \phi^A = \delta_0 \phi^A + \phi_{,\mu}^A \delta x^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

的不变性, 并假设 $\delta \phi^A$ 和 δe_a^μ 在四维体积 G 的边界上为零, 得到 Noether 定理

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\mathcal{L}_G \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} \delta_0 e_a^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{,\mu}^A} \delta_0 \phi^A \right) \\ + [\mathcal{L}_G]_{e_a^\mu} \delta_0 e_a^\mu + [\mathcal{L}_G]_{\phi^A} \delta_0 \phi^A = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $[\mathcal{L}_G]_{\phi^A}$ 代表 $\mathcal{L}_G$ 对 ϕ^A 变分的欧拉式

$$[\mathcal{L}_G]_{\phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{,\mu}^A} \right).$$

在(2)式的变换下, 场函数的 Lie 微商分别为

$$\delta_0 e_a^\mu = e_a^\nu \delta x_{,\nu}^\mu - e_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu; \quad (4)$$

$$\delta_0 \phi^A = -\phi_{,\mu}^A \delta x^\mu. \quad (5)$$

将上两式代入(3)式可得

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L}_G \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_{a,\sigma}^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\sigma}^A \right) \delta x^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{a,\mu}^\nu} e_a^\nu \delta x_{,\sigma}^\mu \right] \\ + [\mathcal{L}_G]_{e_a^\mu} (e_a^\nu \delta x_{,\nu}^\mu - e_{a,\nu}^\mu \delta x^\nu) - [\mathcal{L}_G]_{\phi^A} \phi_{,\mu}^A \delta x^\mu = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

以任意微变换 $\chi'^{\mu} = \chi^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$ 中的 $\varepsilon^{\mu}(x)$ 替换上式中的 $\delta\chi^{\mu}$, 可得三个恒等式, 合并它们可得一个恒等式

$$[\mathcal{L}_0]_{e^{\mu}_{\nu}, \mu} + [\mathcal{L}_0]_{\phi^A} \phi^A_{,\mu} + \partial_{\nu}([\mathcal{L}_0]_{e^{\mu}_{\nu}} e^{\nu}_{\sigma}) = 0. \quad (7)$$

以上式代入(6)式, 得到引力理论中的广义守恒定律

$$\partial_{\mu} \left[\left(\mathcal{L}_0 \delta^{\mu}_{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial e^{\nu}_{\sigma, \mu}} e^{\nu}_{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi^A_{,\mu}} \phi^A_{,\mu} + [\mathcal{L}_0]_{e^{\mu}_{\nu}} e^{\nu}_{\sigma} \right) \delta\chi^{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial e^{\nu}_{\sigma, \mu}} e^{\nu}_{\sigma} \delta\chi^{\mu}_{,\sigma} \right] = 0. \quad (8)$$

如果引入

$$I^{\mu}_{\sigma} \equiv \mathcal{L}_0 \delta^{\mu}_{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial e^{\nu}_{\sigma, \mu}} e^{\nu}_{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi^A_{,\mu}} \phi^A_{,\mu} + [\mathcal{L}_0]_{e^{\mu}_{\nu}} e^{\nu}_{\sigma}, \quad (9)$$

$$V^{\mu\sigma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial e^{\nu}_{\sigma, \mu}} e^{\nu}_{\sigma}, \quad (10)$$

则广义守恒定律可从(8)式简化为

$$\partial_{\mu} (I^{\mu}_{\sigma} \delta\chi^{\sigma} + V^{\mu\sigma} \delta\chi^{\mu}_{,\sigma}) = 0. \quad (11)$$

还可得到重要关系

$$V^{\mu\sigma} = -V^{\sigma\mu} \quad (12)$$

和

$$I^{\mu}_{\sigma} = -\partial_{\nu} V^{\nu\mu}_{\sigma} - \partial_{\nu} V^{\mu\nu}_{\sigma}. \quad (13)$$

最后从 Einstein-Cartan 引力理论的引力作用量对广义位移变换

$$\chi'^{\mu} = \chi^{\mu} + \delta\chi^{\mu}, \quad \delta\chi^{\mu} = e^{\mu}_{\sigma} b^{\sigma} \quad (14)$$

的不变性, 利用广义守恒定律(8)或(11)式, 可得该理论的广义协变的能量动量守恒定律

$$\partial_{\mu} [e(T^{\mu}_{\sigma} + t^{\mu}_{\sigma})] = 0, \quad (15)$$

其中 T^{μ}_{σ} 和 t^{μ}_{σ} 分别为物质和引力场的能量动量张量

$$e(T^{\mu}_{\sigma} + t^{\mu}_{\sigma}) = \partial_{\mu} V^{\mu\nu}_{\sigma}, \quad (16)$$

$V^{\mu\nu}_{\sigma}$ 为反对称超势

$$V^{\mu\nu}_{\sigma} = V^{\mu\nu}_{\sigma} e^{\sigma}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial e^{\sigma}_{\alpha, \mu}} e^{\sigma}_{\alpha} e^{\nu}_{\sigma}. \quad (17)$$

二、对于广义位移变换不存在所谓 Einstein-Cartan 引力理论中广义协变的能量动量守恒定律

从引言可知, 段一士等人是以坐标的无穷小变换和场量的 Lie 微商

$$\chi'^{\mu} = \chi^{\mu} + \delta\chi^{\mu}, \quad e'^{\mu}_{\sigma}(x) = e^{\mu}_{\sigma}(x) + \delta_0 e^{\mu}_{\sigma}(x), \quad \phi'^A(x) = \phi^A(x) + \delta_0 \phi^A(x)$$

为对称变换。在上述变换下, 场量的总改变量分别为

$$e'^{\mu}_{\sigma}(x') = e^{\mu}_{\sigma}(x) + \delta_0 e^{\mu}_{\sigma}(x), \quad \delta e^{\mu}_{\sigma} = \delta_0 e^{\mu}_{\sigma} + e^{\mu}_{\sigma, \nu} \delta\chi^{\nu},$$

$$\phi'^A(x') = \phi^A(x), \quad \delta_0 \phi^A = -\phi^A_{,\nu} \delta\chi^{\nu}, \quad \delta\phi^A = 0.$$

这是因为场量 $\phi^A_{,\nu}$ 为标量函数。然后从一般引力作用量(1)式对他们的对称变换的不变性, 得出了引力理论中的广义守恒定律(8)或(11)式。再类推经典物理学中能量动量守

恒定律, 对应于时空坐标的平移不变性, 假设包含挠率的引力作用量对广义位移变换(14)式保持不变, 即以包含挠率的拉氏密度替换(8)式中的 $\mathcal{L}_g$; 以(14)式中的 $e_a^\mu b^a$ 替换(8)式中的 δX^μ 从而建立他们在 Einstein-Cartan 引力理论中广义协变的能量动量守恒定律的。下面我们将证明这是不可能成功的。

将(4)式

$$\delta_0 e_a^\mu = e_a^\nu \delta X_{,\nu}^\mu - e_{a,\nu}^\mu \delta X^\nu$$

与矢量场 Y 相对于矢量场 X 的 Lie 微商公式^[2]

$$(L_X Y)^\mu = [X, Y]^\mu = (XY - YX)^\mu = X^\nu Y_{,\nu}^\mu - Y^\nu X_{,\nu}^\mu \quad (18)$$

相比较, 显然(4)式是标架场 e_a 相对于 δX 的 Lie 微商的负分量表达式。在广义位移变换中 $\delta X^\mu = e_a^\mu b^a$, 于是(4)式表示标架场 e_a 相对于 $e_a b^a$ 的 Lie 微商。利用公式

$$L_{bX} Y = [bX, Y] = b[X, Y] = bL_X Y, \quad (19)$$

其中 b 为常数, 可知对广义位移变换, (4)式的计算结果应为(见附录)

$$\begin{aligned} \delta_0 e_a^\mu &= -(L_{e_a b^a} e_a)^\mu = -b^d (L_{e_d} e_a)^\mu = -b^d [e_d, e_a]^\mu \\ &= -b^d (e_d e_a - e_a e_d)^\mu = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

将上式和(5)式代入 Noether 定理(3)式, 则得

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L}_g \delta X^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\mu}^A \delta X^\mu \right) - [\mathcal{L}_g]_{\phi_{,\mu}^A} \phi_{,\mu}^A \delta X^\mu = 0. \quad (21)$$

考虑到恒等式(7), 上式化为

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L}_g \delta_0^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\mu}^A + [\mathcal{L}_g]_{e_a^\mu} e_a^\mu \right) \delta X^\mu \right] + [\mathcal{L}_g]_{e_a^\mu} \\ \cdot (e_a^\mu \delta X^\mu - e_a^\nu \delta X_{,\nu}^\mu) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

将广义位移变换中的 $\delta X^\mu = e_a^\mu b^a$ 代入上式, 考虑到(20)式, 最后得到引力理论中的能量动量守恒定律

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L}_g e_a^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\mu}^A e_a^\mu + [\mathcal{L}_g]_{e_a^\mu} e_a^\mu e_a^\mu \right) = 0. \quad (23)$$

如果令

$$eT_a^\mu \equiv [\mathcal{L}_g]_{e_a^\mu} e_a^\mu e_a^\mu, \quad (24)$$

$$e\tau_a^\mu \equiv \mathcal{L}_g e_a^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{,\mu}^A} \phi_{,\mu}^A e_a^\mu, \quad (25)$$

虽然也可以将守恒定律(23)式化简为

$$[e(T_a^\mu + \tau_a^\mu)]_{,\mu} = 0, \quad (26)$$

但由于(23)式不包含超势, 即

$$e(T_a^\mu + \tau_a^\mu) \approx V_a^{\mu\nu},$$

所以能量动量守恒定律(23)或(26)式与段一士等人的守恒定律(15)式之间毫无共同之处。这就决定了守恒定律(26)式不可能利用反对称超势化为广义协变的形式

$$[e(T_a^\mu + \tau_a^\mu)]_{,\mu} = V_a^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0.$$

此外, 在一切考虑自旋和挠率的引力理论中, 包括 Einstein-Cartan 引力理论, 由于联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 不对称,

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$$

式中 $T_{\mu\nu}^{\lambda}$ 为挠率张量。也就排除了通过逆变矢量的普通四维散度可以化为协变四维散度的途径,将守恒定律(26)式化为广义协变形式

$$\frac{1}{e} [e(T_{\alpha}^{\alpha} + t_{\alpha}^{\alpha})]_{;\mu} = (T_{\alpha}^{\alpha} + t_{\alpha}^{\alpha})_{;\mu} = 0$$

的任何可能性。这表明在包含挠率的一切引力理论中,包括 Einstein-Cartan 引力理论,引力体系的能量动量守恒定律(26)式不可能是广义协变的。

从上面的讨论可以清楚地看出,段一士等人所谓 Einstein-Cartan 引力理论中广义协变的能量动量守恒定律(15)式,实际上是没有注意到对于广义位移变换标架场的 Lie 微商恒为零而得出的一个错误结果。但是这一点非常重要,正是它消去了守恒定律中的超势项,才使得能量动量守恒定律(26)式不可能具有广义协变性。所以它可能是段一士等人在理论上产生失误的根本原因。

三、结 语

上节的结论,在理论上很重要,可以概括为一个规律:如果以坐标的广义位移和标架场的 Lie 微商作为对称变换,则在考虑到自旋和挠率的一切引力理论中,包括 Einstein-Cartan 引力理,通过 Noether 定理所得到的引力体系的能量动量守恒定律不可能是广义协变的。

附 录

此处将证明,如果 e_a 与 e_d 为活动标架的任意二基矢量场,则 $L_{e_d} e_a = 0$ 。

证明: 根据定理^[2]

$$L_X Y = \frac{dY^c(t)}{dt} \bigg|_{t=0} e_c,$$

式中 e_c 为沿 X 生成的流 α_t 移动的活动标架在点 $\alpha(0, p) = p$ 的标架, $Y^c(t)$ 为任意矢量场 Y 在各标架 $e_c(t)$ 上的分量,即 $Y(\alpha_t(p)) = Y^c(t)e_c(t)$ 。

由于活动标架选择的任意性,可设 $X = e_d$, 则 e_a 相对于 e_d 的 Lie 微商应为

$$L_{e_d} e_a = \frac{dY^c(t)}{dt} \bigg|_{t=0} e_c,$$

式中 $Y^c(t)$ 为 $e_a(t)$ 在各标架 $e_c(t)$ 上的分量,

因为 $e_a(t) = 1 \cdot e_a(t) + 0 \cdot e_c(t)$ 即 $Y_c^c(t) = \begin{cases} 1, & c = a; \\ 0, & c \neq a. \end{cases}$

所以 $L_{e_d} e_a = 0$ <证完>。

【1】 段一士、刘继承、董学耕,物理学报, 36(1987), 760.

【2】 W. D. Curtis and F. R. Miller, Differential Manifolds and Theoretical Physics (Academic Press, Orlando, 1985), p. 132;
D. Kramer, H. Stephani and E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Cambridge University Press, Cambridge, 1980), p. 37.

A COMMENT ON “GENERAL CONSERVATION LAWS IN EINSTEIN-CARTAN THEORY”

LI CHENG-YAO

Department of Physics, Xidian University, Xi'an 710071

(Received 13 January 1992)

ABSTRACT

In this paper, it is proved that if both general displacement of coordinates and the Lie derivative of vierbeins are treated as symmetric transformation, then it is impossible to obtain the called general covariant energy-momentum conservation laws in Einstein-Cartan theory by Noether theorem.

PACC: 0450; 0420