

共形不变标量场在 Reissner-Nordström 时空的 Boulware 态中的重整化能动张量

黄 超 光

中国科学院高能物理研究所, 北京 100039
1992 年 3 月 19 日收到

利用 Page-Zannias 方法并借助微机和 REDUCE 语言计算了共形不变标量场在 Reissner-Nordström (R-N) 时空中 Boulware 态的重整化能动张量。

PACC: 0460; 9760

一、引 言

众所周知,在弯曲时空量子场论中,量子化的物质场与经典引力场通过半经典爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} \quad (1)$$

联系在一起^[1],其中 $G_{\mu\nu}$ 为爱因斯坦张量, Λ 为宇宙常数, $g_{\mu\nu}$ 为时空度规, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ 为物质场的重整化能动张量, G 为牛顿引力常数。显然,欲求半经典爱因斯坦场方程的解,首先要知道在弯曲时空中物质场的重整化能动张量的形式。因而,如何计算弯曲时空中的重整化能动张量就成为弯曲时空量子场论中的核心问题之一。

自 70 年代中期,人们就开始研究如何计算重整化能动张量的问题。1982 年 Page 给出了共形不变物质场的重整化能动张量在共形变换下的一般变换规律,同时还建立了一种计算超静态时空(即 $g_{00} = 1$ 的静态时空)中共形不变标量场的重整化能动张量的解析近似表达式的方法^[2],并首先给出了 Schwarzschild 时空的整个渐近平直区域内共形不变标量场在 Hartle-Hawking 态^[3]的重整化能动张量的近似表达式。这一结果与后来从模函数展开出发,利用数值计算的方法得到的严格结果相当好地符合^[4]。80 年代中期, Zannias^[5], Brown, Ottewill 和 Page^[6] 分别发展了构造超静态时空中物质场重整化能动张量的方法。此后, Frolov 和 Zel'nikov^[7,8], Barrios 和 Vaz^[9] 等人也建立了一些计算物质场重整化能动张量的方法。然而,这方面的大多数文献都集中在讨论 Schwarzschild 时空中不同物质场在不同态的重整化能动张量上^[6-12],或仅给出黑洞视界附近重整化能动张量的渐近行为^[13,14],只有文献[5]给出了极端 R-N 时空的渐近平直区域内共形不变标量场的重整化能动张量的表达式,但这一结果还是错误的^[15]!

本文的主要目的是借助 IBM-PC/XT 兼容机和 REDUCE 语言处理在重整化能动张量的计算中遇到的极其冗长乏味的常规计算, 并给出在 R-N 时空中共形不变标量场在 Boulware 态^[15]的重整化能动张量的解析近似表达式。为了便于阅读, 先简单介绍 Page-Zannias 计算重整化能动张量的方法, 然后给出按照 Page-Zannias 方法计算重整化能动张量的 REDUCE 程序框图, 最后给出计算结果并讨论重整化能动张量的渐近行为。全文采用文献[1]的符号系统, 即用 Misner, Thorne, Wheeler 的术语^[16]就是 $(-, -, -)$ 。

二、Page-Zannias 方法

共形不变标量场的重整化能动张量在共形变换

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \bar{g}_{\mu\nu} \quad (2)$$

下, 按如下规律变换^[2,17]:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\nu}[g] \rangle_{\text{ren}} = & \Omega^{-4} \langle \bar{T}_{\mu}^{\nu}[\bar{g}] \rangle_{\text{ren}} + \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{4}{3} \alpha (3^{(2)}H_{\mu}^{\nu} - {}^{(1)}H_{\mu}^{\nu}) \ln \Omega \right. \\ & - 8\alpha [C_{\mu}^{\alpha\beta}(\ln \Omega)_{;\alpha\beta} + 2C_{\mu}^{\alpha\beta}{}_{;\alpha}(\ln \Omega)_{;\beta}] \\ & \left. - \frac{\alpha}{9} ({}^{(1)}H_{\mu}^{\nu} - \Omega^{-4}{}^{(1)}\bar{H}_{\mu}^{\nu}) - 2\beta ({}^{(3)}H_{\mu}^{\nu} - \Omega^{-4}{}^{(3)}\bar{H}_{\mu}^{\nu}) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中分号(;)代表协变微分, 横线“-”代表在 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 几何上定义的量。

$${}^{(1)}H_{\mu}^{\nu} = 2R_{\mu}^{\nu} - 2\delta_{\mu}^{\nu} \square R - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R^2 + 2RR_{\mu}^{\nu}, \quad (4)$$

$${}^{(2)}H_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \square R - \square R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + 2R_{\beta}^{\alpha} R_{\mu\alpha}^{\nu\beta}, \quad (5)$$

$${}^{(3)}H_{\mu}^{\nu} = R_{\alpha\mu} R^{\alpha\nu} - \frac{2}{3} RR_{\mu}^{\nu} + \delta_{\mu}^{\nu} \left(\frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \right) + 2R_{\beta}^{\alpha} C_{\mu\alpha}^{\nu\beta}, \quad (6)$$

$$\alpha = -3\beta = \frac{1}{120}. \quad (7)$$

对于超静几何, 共形不变标量场的 Boulware 态的重整化能动张量(与 Hartle-Hawking 态的重整化能动张量只差一标准的热辐射项^[10,13])为^[2]

$$\langle T_{\mu}^{\nu}[g] \rangle_{\text{ren}} = - \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{a_2}{3} \delta_{\mu}^{\nu} \delta_0^0, \quad (8)$$

其中

$$a_2 = \frac{1}{60} (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \square R). \quad (9)$$

熟知, R-N 度规为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (10)$$

它通过共形因子 $\Omega^2 = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}$ 与超静态度规

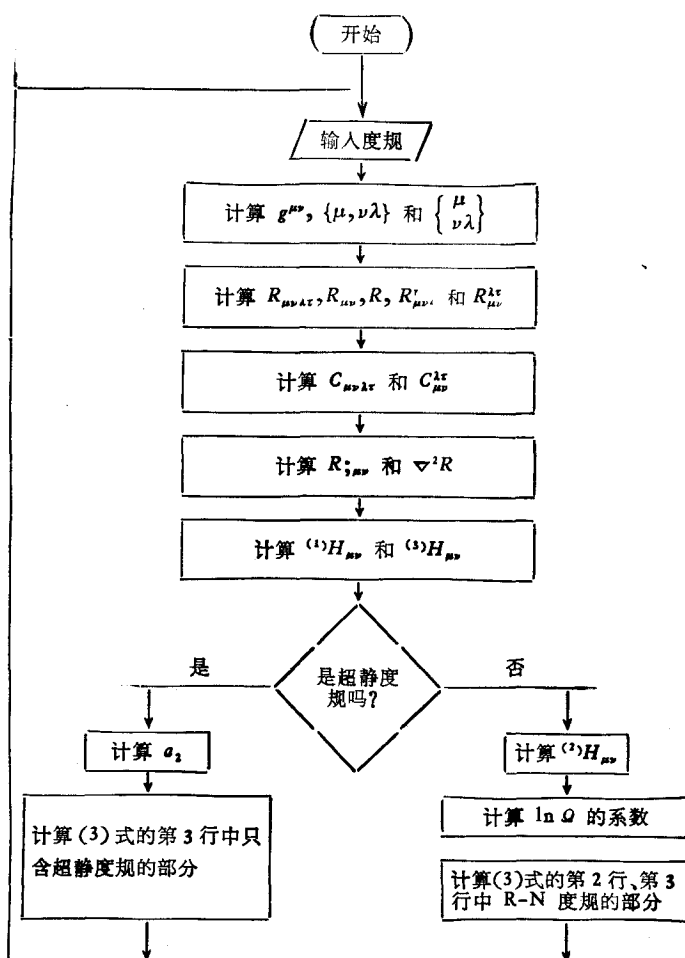
$$ds^2 = dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-2} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (11)$$

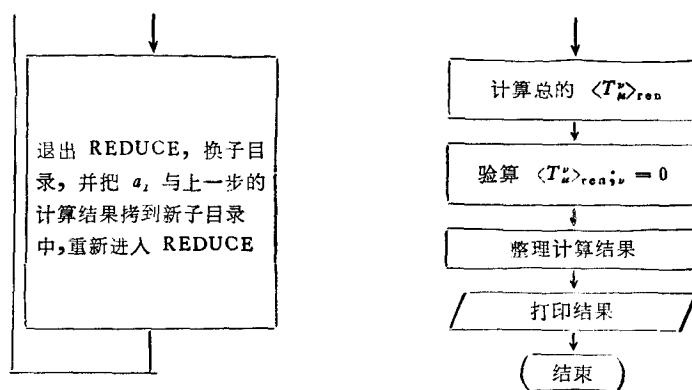
相联系。

下面根据这些基本关系计算共形不变标量场在 R-N 时空中的 Boulware 态的重整化能动张量。由于这一计算极其冗长,我们利用微机来完成这一计算。

三、对计算程序的说明

我们现有的计算机是一台 IBM-PC/XT 兼容机。为克服微机内存小的弱点,把整个计算过程分解成若干步,每计算完一步就将结果存入磁盘,同时将这些结果和中间步骤从内存中清除掉。图 1 是计算程序框图。框图中的每一步都是一个或者两个独立的程序。因而可以在计算过程的任一步停下来,在重新进入计算状态时可直接进行下一步计算。





四、计算结果

对 R-N 度规

$$^{(1)}H_{\mu}^{\nu} = 0, \quad (12)$$

$$^{(2)}H_{\mu}^{\nu} = \frac{4q}{r^4} (1 - w + q) (2\delta_{\mu}^{\nu} - 5\delta_{\mu}^0\delta_0^{\nu} - 3\delta_{\mu}^1\delta_1^{\nu}), \quad (13)$$

$$^{(3)}H_{\mu}^{\nu} = \frac{q}{r^4} (4w - 9q)\delta_{\mu}^{\nu} - \frac{8q}{r^4} (w - 2q)(\delta_{\mu}^0\delta_0^{\nu} + \delta_{\mu}^1\delta_1^{\nu}), \quad (14)$$

其中 $w = 2M/r$, $q = e^2/r^2$. Weyl 张量的非零分量为

$$C_{01}^{01} = -2C_{02}^{02} = -2C_{03}^{03} = -2C_{12}^{12} = -2C_{13}^{13} = C_{23}^{23} = (w - 2q)/r^2 \quad (15)$$

和那些由 Weyl 张量的对称性及上式得到的分量. 若用 P_{μ}^{ν} 记(3)式方括号内的量, 则

$$P_0^0 = -\frac{1}{4r^4} \frac{1}{1 - w + q} (5w^3 - 36w^2q + 72wq^2 - 40q^3 - 6w^2 + 36qw - 48q^2), \quad (16a)$$

$$P_1^1 = \frac{1}{4r^4} \frac{(w - 2q)^2}{(1 - w + q)^2} (3w^2 - 7wq + 4q^2 - 5w + 6q + 2), \quad (16b)$$

$$P_2^2 = P_3^3 = -\frac{1}{2r^4} (2w^2 - 11wq + 14q^2). \quad (16c)$$

度规(11)式的 $^{(1)}H_{\mu}^{\nu}$ 和 $^{(3)}H_{\mu}^{\nu}$ 的非零分量分别为

$$^{(1)}\bar{H}_0^0 = \frac{18}{r^4} \left(-\frac{33}{16} w^4 + 4w^3q - 2w^2q + 4w^3 + \frac{9}{2} w^2q - 16wq^2 + 8q^3 - 2w^2 - 16wq + 15q^2 + 8q \right), \quad (17a)$$

$$^{(1)}\bar{H}_1^1 = \frac{6}{r^4} \left(\frac{81}{16} w^4 - 11w^3q + 6w^2q^2 - 9w^3 - \frac{21}{2} w^2q + 44wq^2 - 24q^3 + 4w^2 + 36wq - 39q^2 - 16q \right), \quad (17b)$$

$$^{(1)}\bar{H}_2^2 = ^{(1)}\bar{H}_3^3 = \frac{6}{r^4} \left(-\frac{135}{16} w^4 + \frac{35}{2} w^3q - 9w^2q^2 + \frac{33}{2} w^3 \right)$$

$$+ \frac{33}{2} w^2 q - 90 w q^2 + 36 q^3 - 8 w^2 - 66 w q + 69 q^2 + 32 q), \quad (17c)$$

$${}^{(5)}\bar{H}_0^0 = \frac{3}{r^4} \left(-\frac{47}{16} w^4 + 18 w^3 q - 39 w^2 q^2 + 36 w q^3 - 12 q^4 + 6 w^3 \right. \\ \left. + \frac{61}{2} w^2 q + 48 w q^2 - 24 q^3 - 3 w^2 + 12 w q - 11 q^2 \right), \quad (18a)$$

$${}^{(5)}\bar{H}_1^1 = \frac{1}{r^4} \left(-\frac{33}{16} w^4 + 9 w^3 q - 15 w^2 q^2 + 12 w q^3 - 4 q^4 + 3 w^3 \right. \\ \left. - \frac{15}{2} w^2 q + 4 w q^2 - w^2 + 3 q^2 \right), \quad (18b)$$

$${}^{(5)}\bar{H}_2^2 = {}^{(3)}\bar{H}_3^3 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{39}{16} w^4 - \frac{27}{2} w^3 q + 27 w^2 q^2 - 24 w q^3 + 8 q^4 \right. \\ \left. - \frac{9}{2} w^3 + \frac{39}{2} w^2 q - 26 w q^2 + 12 q^3 + 2 w^2 - 6 w q + 3 q^2 \right). \quad (18c)$$

$$a_2 = \frac{6}{5} q r^{-4} (1 - w + q)^3. \quad (19)$$

将(12)–(19)式代入(3)式,并整理得

$$\langle T_{\mu\nu}^{\nu} \rangle_{ren} = \frac{1}{2880\pi^2} \left\{ \frac{12}{r^4} q (1 - w + q) \ln(1 - w + q) (2\delta_{\mu}^{\nu} - 5\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} - 3\delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu}) \right. \\ + \left[\frac{-w^2(4 - 3w)^2 + 8q(1 - w)(8 - 4w - w^2) + 16q^2(3 - 2w)}{8r^4(1 - w + q)^2} \right. \\ \left. + \frac{8q(1 - 2w + 3q)}{r^4} \right] (4\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu}) + \frac{1}{r^4} [(48 - 70w + 91q)q\delta_{\mu}^{\nu} \\ \left. - (3w^2 + 48q - 82wq + 104q^2)(3\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} + \delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu})] \right\}. \quad (20)$$

此即 R-N 时空中共形不变标量场 Boulware 态的重整化能动张量的解析近似表达式。不难验证(20)式满足协变守恒律同时具有正确的迹,其对数项的形式也与 Frolov 和 Zelmkov 给出的形式相同^[9]。当 $e = 0$ 时,此式立即回到 Schwarzschild 时空中共形不变标量场的 Boulware 态的重整化能动张量的形式^[10]。当 $e^2 = M^2$ 时,此式给出极端 R-N 时空中共形不变标量场的重整化能动张量

$$\langle T_{\mu\nu}^{\nu} \rangle_{ren} = \frac{1}{2880\pi^2} \left\{ \frac{24}{r^4} x^2 (1 - x)^2 \ln(1 - x) (2\delta_{\mu}^{\nu} - 5\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} - 3\delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu}) \right. \\ + \frac{1}{r^4} x^2 [8(1 - x)(1 - 3x)(4\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu}) \\ + (48 - 140x + 91x^2)\delta_{\mu}^{\nu} - 4(1 - x)(15 - 26x) \\ \left. \times (3\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} + \delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu})] \right\}, \quad (21)$$

其中 $x = M/r$ 。由于 Boulware 态与 Hartle-Hawking 态只差一个标准的辐射项,而极端 R-N 时空的 Hawking 辐射温度为零,故极端 R-N 时空的 Boulware 态与

Hartle-Hawking 态应是相同的¹⁾。

在渐近平直区域(即 $r \rightarrow \infty$ 的区域), (20) 式趋于零, 这正好符合 Boulware 态是平直时空的真空态在弯曲时空内渐近平直区域直接推广的要求。为了解重整化能动张量(20) 式在事件视界附近的行为, 引入如下参数:

$$\xi = r_+/r, \quad b^2 = r_-/r_+, \quad (22)$$

其中 $r_{\pm} = M \pm (M^2 - e^2)^{1/2}$ 。对于非极端 R-N 时空, 当 $\xi \rightarrow 1$ 时

$$\langle T_{\alpha\beta} \rangle_{ren} \rightarrow \frac{1}{2880\pi^2} \left(\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} \right)^2 \frac{2\xi^6(6\xi - 7)}{(1 - \xi)^2(1 - 6\xi)^2} (4\delta_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} - \delta_{\alpha}^{\gamma\gamma} - \delta_{\beta}^{\gamma\gamma}) + \text{有限项}。 \quad (23)$$

正如预期的那样 Boulware 态的重整化能动张量在视界上是发散的。对于极端 R-N 时空, 其 Boulware 态与 Hartle-Hawking 态相同, 文献[18]中已对 Hartle-Hawking 态的重整化能动张量在视界上的有限性作了讨论, 这里不再赘述。只给出结论: 重整化能动张量在视界上发散。

总之, 借助计算机我们给出了在 R-N 时空中共形不变标量场在 Boulware 态的重整化能动张量的解析近似表达式。这一表达式满足对 Boulware 态的基本要求。利用这一表达式, 有可能计算标量场的真空极化对 R-N 时空的反作用。

- [1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [2] D. N. Page, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 1499.
- [3] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2188.
- [4] K. W. Howard and P. Candelas, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1604; K. W. Howard, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 2532.
- [5] T. Zannias, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 1161.
- [6] M. R. Brown and A. C. Ottewill, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 2514; M. R. Brown, A. C. Ottewill and D. N. Page, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 2840.
- [7] V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, *Phys. Lett.*, **193B**(1987), 171.
- [8] V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3031.
- [9] F. A. Barrios and C. Vaz, *Phys. Rev.*, **B40**(1989), 1240.
- [10] V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, in *Quantum Gravity, Proceedings of the Third Seminar, Moscow, 1984*, edited by V. A. Berezin, V. P. Frolov and M. A. Markov (World Scientific, Singapore, 1985), p. 437.
- [11] V. P. Frolov and N. Sanchez, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 1604; C. Vaz, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 1776.
- [12] T. Elster, *Class. Quant. Grav.*, **1**(1984), 43; B. Jensen and A. C. Ottewill, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 1130.
- [13] P. Candelas, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2185; P. Candelas, P. Chrzanowsky and K. M. Howard, *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 297.
- [14] V. P. Frolov, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 3150; V. P. Frolov and K. S. Thorne, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 2125.
- [15] D. G. Boulware, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 1404.
- [16] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco 1973).
- [17] Chao-guang Huang, Comment on Conformal Transformation of Renormalised Stress-Energy Tensor, preprint, BIHEP/TH-91-11.
- [18] Chao-guang Huang, *Phys. Lett.*, **164A**(1992), 384.

1) (21) 式与文献[5]中给出的极端 R-N 时空的 Hartle-Hawking 态的重整化能动张量有所不同, 验算发现文献[5]的结果并不满足协变守恒律, 其含对数的项的行为也不满足 Frolov 和 Zel'nikov 对这一项所提出的要求。

RENORMALISED STRESS-ENERGY TENSOR OF CONFORMAL SCALAR FIELD IN BOULWARE STATE IN REISSNER- NORDSTRÖM SPACE-TIME

HUANG CHAO-GUANG

Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039

(Received 19 March 1992)

ABSTRACT

The renormalised stress-energy tensor of a conformal invariant scalar field in the Boulware state in Reissner-Nordström space-time is calculated by using the Page-Zannias method and with the help of a personal computer and REDUCE language. The tensor vanishes in the asymptotically flat region and is not regular at the event horizon.

PACC: 0460; 9760