

二维超对称模型的超对称破缺和 Witten 指数*

余扬政¹⁾ 陈熊熊

厦门大学物理系, 厦门 361005

1991 年 8 月 26 日收到

构造了一类超势 $W = (1/n)g\phi^n$ 的二维 $O(N)$ 对称超对称模型, 详细计算了此类模型的 Witten 指数 Δ . 结果表明, 当 n 为偶数时, 超对称一定不能破缺, 而当 n 为奇数时, 超对称可以破缺. 利用大 N 展开法, 还研究了上述模型的超对称自发破缺机制, 同时给出了相应的粒子谱.

PACC: 1130; 1200; 0450

一、引 言

这些年来, 低维物理越来越成为物理学界感兴趣的研究领域之一, 其中包括二维超对称场论. 众所周知, 任何现实的超对称模型应具有超对称自发破缺的机制, 而此问题与 Witten 指数定理密切相关^[1]. 研究表明, 一个超对称模型能否产生超对称破缺, 是场的整体行为, 其中超势的性质起着关键作用. 本文构造了一类超势 $W = (1/n)g\phi^n$ 的 $O(N)$ 对称超对称模型, 并具体计算了相应的 Witten 指数 Δ . 同时, 利用大 N 展开法, 详细地讨论此类模型的超对称自发破缺行为, 给出了临界耦合常数及质量谱.

二、 $O(N)$ 对称超对称模型

利用超 Poincaré 张量运算方法^[2]到整体超对称情况, 构造一个二维 $N=1$ $O(N)$ 对称超对称模型, 其拉氏函数可表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\phi_i \otimes T(\phi_i)]_F + g[\phi_0 \otimes \phi_0^2]_F + N[W(\phi_0) + \lambda\phi_0]_F, \quad (1)$$

式中 ϕ_i 为 $O(N)$ 矢量超场, ϕ_0 为 $O(N)$ 标量超场, 即

$$\phi_i(x, \theta) = A_i(x) + \theta\phi_i(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F_i(x) \equiv (A_i, \phi_i, F_i), \quad (2)$$

$$\phi_0(x, \theta) = (A_0, \phi_0, F_0), \quad (3)$$

* 国家自然科学基金和福建省自然科学基金部分资助的课题.

1) 中国科学院理论物理研究所客座, 北京 100080.

而 $T(\phi_i)$ 为 $O(N)$ 对称的动能多重态, 其形式为

$$T(\phi_i) = (F_i, i\gamma^\mu \partial_\mu \phi_i, -\square A_i), \quad (4)$$

$W(\phi_0)$ 为超势, 采用一般多项式形式

$$W(\phi_0) = (1/n)g\phi_0^n. \quad (5)$$

此模型包含以下几种熟知的模型: 1) $n=1$, 超对称非线性 σ 模型; 2) $n=2$, 超对称 ϕ^4 模型; 3) $n=3$, 超对称 Wess-Zumino 模型.

将(1)式写成分量形式, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu A_i \partial^\mu A_i + \frac{i}{2} \phi_i \gamma^\mu \partial_\mu \phi_i + \frac{1}{2} F_i^2 + NF_0[W'(A_0) + \lambda] \\ & - \frac{N}{2} W''(A_0) \phi_0 \phi_0 + g(2A_0 F_i A_i - A_0 \phi_i \phi_i - 2\phi_0 \phi_i A_i + F_0 A_i^2), \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$W(A_0) = \frac{1}{n} g A_0^n.$$

利用辅助场 F_i 和 F_0 的运动方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = F_i + 2g A_0 A_i = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_0} = NW'(A_0) + N\lambda + g A_i^2 = 0, \quad (8)$$

可将拉氏函数(6)式改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i + \phi_i i\gamma^\mu \partial_\mu \phi_i) - 2g^2 A_0^2 A_i^2 \\ & - g A_0 \phi_i \phi_i + 2g^2 \frac{1}{NW''(A_0)} (A_i \phi_i)(\phi_i A_i). \end{aligned} \quad (9)$$

现在研究在树图近似下, 此类模型的超对称破缺与否的问题. 我们知道, 超对称破缺的充要条件是基态能量大于零, 即

$$\langle 0 | H | 0 \rangle > 0, \quad (10)$$

即基态能量可作为破缺的序参量.

由(9)式可知, 在树图近似下, 其势能为

$$V_{tree} = 2g^2 A_0^2 A_i^2. \quad (11)$$

A_0 和 A_i 间应满足约束条件(8)式, 即

$$W'(A_0)/g + A_i^2/N = -\lambda/g. \quad (12)$$

显然, 有满足(11)和(12)两式的零能态解存在, 可见, 对于超势 $W = (1/n)g\phi_0^n$ 的超对称模型, 在树图近似下, 超对称不产生破缺.

有兴趣的问题是, 在树图近似下超对称不破缺的模型, 当考虑到量子效应时, 在高一级的近似下, 能否产生超对称自发破缺呢? 本文打算从两方面讨论此问题. 首先, 通过 Witten 指数 Δ 来判定, 在什么条件下超对称能产生自发破缺. 事实上, 这属于模型的整体拓扑行为. 然后, 再具体研究模型在高一级近似下(算至领头阶), 超对称自发破缺行为.

三、Witten 指数的计算

文献[1]中, Witten 引入一个拓扑指数, 即 Witten 指数 Δ , 其定义为零能玻色态和费密态数之差, 即

$$\Delta = \text{Tr}(-1)^{N_F} = n_B^{E=0} - n_F^{E=0}, \quad (13)$$

式中 N_F 为费密数算符, 而 $n_B^{E=0}$ 和 $n_F^{E=0}$ 分别为零能玻色态数和费密态数。

超对称自发破缺的必要条件为 $\Delta = 0$ 。

Witten 指数 Δ 是一个拓扑指数, 在场的参数变换下是绝热不变的。有许多计算 Δ 的方法^[1,3,4], 对于 $O(N)$ 对称的超对称模型, 计算指数 Δ 的主要困难是如何消除 $O(N)$ 对称所引起的零能态简并的问题。本文采用的方法是, 在拉氏函数(1)式上, 加上一项超对称但 $O(N)$ 不对称的 $\delta\mathcal{L}_N = 2h\phi_N$, 其中 $\phi_N = (A_N, \phi_N, F_N)$, 即得变形后的拉氏函数 $\mathcal{L}_N$ 为

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{L} + 2h\phi_N, \quad (14)$$

写成分量形式, 上式变成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N = & \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i + \bar{\psi}_i i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i) \\ & - 2g^2 \sum_{i=1}^{N-1} A_0^2 A_i^2 - g A_0 \phi_i \phi_i - 2(g A_0 A_N + h)^2 \\ & + 2g^2 (1/N W''(A_0)) (A_i \phi_i) (\phi_i A_i). \end{aligned} \quad (15)$$

树图近似下, 势具有以下形式:

$$V = 2g^2 \sum_{i=1}^{N-1} A_0^2 A_i^2 + 2(g A_0 A_N + h)^2 \geq 0. \quad (16)$$

此外, A_0 和 A_i 尚需满足约束条件(8)式, 即

$$\sum_{i=1}^N g A_i^2 / N + W'(A_0) = -\lambda.$$

由于势 V 为正定的, 故存在零能态必须满足

$$\begin{aligned} A_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \\ A_0 A_N &= -h/g. \end{aligned} \quad (17)$$

事实上, 上述条件也可从 $O(N-1)$ 对称性得到。

最后, 求得零能态的条件为

$$A_0 A_N = -h/g, \quad A_N^2 / N + W'(A_0) / g = -\lambda/g. \quad (18)$$

文献[1]指出, 零能态是玻色的还是费密的, 取决于费密质量 m_F 的符号。当 $m_F > 0$, 为零能玻色态 $|0\rangle_B$; 而当 $m_F < 0$, 则为费密零能态 $|0\rangle_F$ 。这里就二维情况作一个简单的说明。

首先讨论 $m_F > 0$ 的情况, 显然与通常场论一样, 对于零能基态 $|0\rangle_B$, 有

$$b|0\rangle_B = 0, \quad (19)$$

式中 b 为费密湮没算符。其次, 当 $m_F < 0$ 时, 引入变换

$$\tilde{\phi}(x) = \gamma_s \phi(x), \quad (20)$$

式中 $\tilde{\phi}(x)$ 有正质量. 这种情况下, 对零能基态 $|0\rangle_F$, 自然有

$$\tilde{b}|0\rangle_F = 0, \quad (21)$$

式中 $\tilde{b}$ 为相应于 $\tilde{\phi}(x)$ 的湮没算符. 但是, 由(20)式, 容易得到

$$\tilde{b} = b^+, \quad \tilde{b}^+ = b. \quad (22)$$

因而(21)式成为

$$b^+|0\rangle_F = 0. \quad (23)$$

现在可自然引入费密子算符的定义为

$$N_F \equiv b^+ b^-. \quad (24)$$

显然有

$$N_F|0\rangle_B = 0, \quad (25)$$

$$N_F|0\rangle_F = |0\rangle_F.$$

由此可见, $|0\rangle_B$ 为玻色零能态 ($N_F = 0$), 而 $|0\rangle_F$ 为费密零能态 ($N_F = 1$).

现在, 按超势的奇偶性来计算 Witten 指数 Δ .

1) $n = 2m (m = 1, 2, \dots)$

这时零能条件(18)式变为

$$A_0 A_N = -h/g, \quad A_N^2/N + A_0^{2m-1} = -\lambda/g. \quad (26)$$

上式可用图解法求解, 因为参数 h 的大小并不影响 Witten 指数 Δ 的大小, 故可令 h 足够大, 使两组曲线只有一个交点, 如图 1 所示, 得到真空解 I , 其费密质量项为

$$-g A_0 \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i \phi_i - g A_0 (1 - A_N^2/N A_0^{2m-1}) \phi_N \phi_N. \quad (27)$$

由上分析可知, 零能态 I 的费密子数 $N_F = N$, 故得 Δ 为

$$\Delta = (-1)^N \neq 0. \quad (28)$$

结论是, 当 n 为偶数时, 超对称一定不能发生破缺.

2) $n = 2m + 1 (m = 1, 2, \dots)$

这时零能条件为

$$A_0 A_N = -h/g, \quad A_N^2/N + A_0^{2m} = -\lambda/g. \quad (29)$$

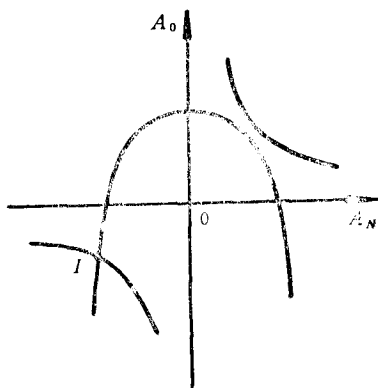


图 1 $n = 2m$ 情况

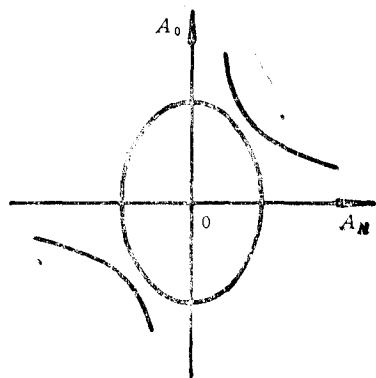


图 2 $n = 2m + 1$ 情况

费密子质量项为

$$-gA_0 \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\psi}_i \psi_i - gA_0(1 - A_N^2/NA_0^2) \bar{\psi}_N \psi_N. \quad (30)$$

为了计算简便起见,可令 h 足够大,使两组曲线没有交点(图 2), 故有

$$\Delta = 0. \quad (31)$$

结论是,当 n 为奇数时 ($n \neq 1$), 超对称可产生破缺.

当 $m=1$ 时,这些结果分别为超对称 ϕ^4 模型和超对称 Wess-Zumino 模型^[5].

现在很清楚,超势的奇偶性决定了模型的超对称破缺行为,是一种拓扑性质.事实上,在超对称量子力学中,也有非常类似的结论^[6].

下面具体研究上述模型的超对称自发破缺机制,并给出临界耦合常数.

四、有效势与超对称自发破缺

采用非微扰的大 N 展开法,计算至领头阶.

$O(N)$ 对称超对称模型的生成泛函为

$$Z = \int dA_i d\phi_i dF_i dA_0 d\phi_0 dF_0 \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}\right), \quad (32)$$

对 $O(N)$ 矢量场积分后,可得

$$Z = \int dA_0 d\phi_0 dF_0 \exp\left(iN \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}\right), \quad (33)$$

式中有有效拉氏函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & F[W(A) + \lambda] - \frac{1}{2} W''(A) F \phi - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu \partial_\mu - 2gA) \\ & + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln[-\partial^2 - 4g^2 A^2 + 2gF - 4g^2 \phi(i\gamma^\mu \partial_\mu - 2gA)^{-1} \phi]. \end{aligned} \quad (34)$$

这里已将 A_i , ϕ_i 和 F_i 分别简化为 A , ϕ 和 F .

根据半经典近似法,有效势 V_{eff} 为标量场 A 和辅助场 F 的函数. 利用大 N 展开, 计算出 $\text{Tr} \ln$ 至领头阶, 容易得到

$$V_{\text{eff}} = -W'(A)F + \frac{1}{8\pi} \{m_\phi^2 \ln(m_\phi^2/eM^2) - m_A^2 \ln(m_A^2/eM^2)\}, \quad (35)$$

式中 M 为重整化不变质量标度, 即

$$M^2 = \mu^2 \exp(4\pi\lambda_r(\mu)/g), \quad (36)$$

而 λ_r 为重整化耦合常数

$$\lambda_r = \lambda + \delta\lambda(\mu) = (g/4\pi) \ln(M^2/\mu^2), \quad (37)$$

式中 $\delta\lambda(\mu)$ 为反项.

在(35)式中, 还引入质量符号

$$m_A^2 = 4g^2 A^2 - 2gF, \quad m_\phi = 2gA. \quad (38)$$

在满足稳定点的条件下, m_A 和 m_ϕ 就是 $O(N)$ 矢量场 A_i 和 ϕ_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的质量. 而稳定点的条件由方程 $\partial V_{\text{eff}}/\partial F = 0$ 和 $\partial V_{\text{eff}}/\partial A = 0$ 给出, 即

$$W'(A) - (g/4\pi)\ln(m_A^2/M^2) = 0, \quad (39)$$

$$W''(A)F - (Ag^2/\pi)\ln(m_\psi^2/m_A^2) = 0. \quad (40)$$

超对称要求 $m_A = m_\psi$, 故由(38)式可知, 超对称破缺的充要条件是, 在稳定点, $F \neq 0$. 由此可知, 可选择 F 作为破缺的序参量.

F 与 A 的函数关系可由(39)式求得

$$F(A) = \frac{1}{2g} [4g^2 A^2 - M^2 \exp(4\pi W'(A)/g)]. \quad (41)$$

现在可将 V_{eff} 改写为

$$V_{\text{eff}}(A, F(A)) = \frac{1}{8\pi} [m_\psi^2 \ln(m_\psi^2/m_A^2) - (m_\psi^2 - m_A^2)]. \quad (42)$$

显然, 当超对称不破缺时, $F = 0$, $m_A = m_\psi$, 有 $V_{\text{eff}} = 0$, 由此可见用 H 或用 F 作为破缺的序参量是等价的.

现在按超势的奇偶性来讨论超对称破缺的行为.

1) $n = 2m$

方程 $F(A) = 0$ 的具体形式为

$$-gA^{2m-1} + (g/4\pi)\ln(4g^2 A^2/M^2) = 0. \quad (43)$$

利用图解法, 不难得出以下结论: 对于任意 M , 如图 3 所示, 方程(43)至少有一个解, 故 n 为偶数时超对称一定不能产生破缺.

2) $n = 2m + 1$

方程 $F(A) = 0$ 有形式

$$-gA^{2m} + (g/4\pi)\ln(4g^2 A^2/M^2) = 0. \quad (44)$$

类似利用图解法, 由图 4 可见, 此时 M 存在一个临界值, 记为 M_c . 通过简单的计算可得此临界常数为

$$M_c^2 = 4g^2 \left(\frac{1}{4\pi m e} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (45)$$

且当 $M \leq M_c$ 时, $F(A) = 0$ 有解, 超对称不产生破缺, 而当 $M > M_c$ 时, 超对称可产生自发破缺. 图 5 所示为 $V_{\text{eff}}^{\text{min}}$ 与 M 的关系图.

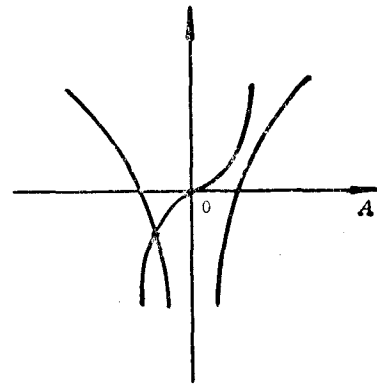


图 3 $n = 2m$ 情况

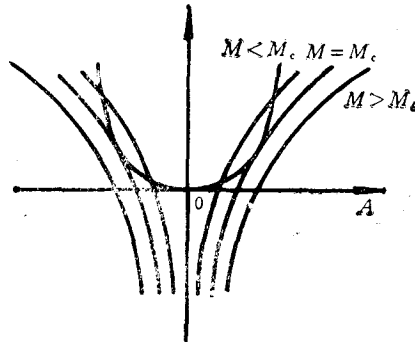


图 4 $n = 2m + 1$ 情况

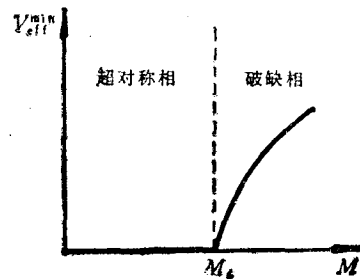


图 5 相图

例如,当 $W(\phi_0) = \frac{g}{3} \phi_0^3$, 即当 $n=3$ 时, 就是著名的超对称 Wess-Zumino 模型, 与在 d 为四维时情况不同, 当 $d=2$ 时能产生超对称动力学自发破缺, 这时临界常数为

$$M_c^2 = g^2/\pi e. \quad (46)$$

五、粒 子 谱

用通常场论方法, 计算有效拉氏量, 保留 A , F 和 ϕ 的二次项, 容易得出动量空间的传播子的逆 $S_{\phi\phi}^{-1}(p)$ 以及 $D_B^{-1}(p^2)$.

具体而言, 对于费密场 ϕ_0 , 有

$$S_{\phi\phi}^{-1}(p) = A(p^2)\gamma^\mu p_\mu + B(p^2), \quad (47)$$

式中

$$A(p^2) = \frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{1-x}{xm_A^2 + (1-x)m_\phi^2 - x(1-x)p^2}, \quad (48)$$

$$B(p^2) = -(n-1)gA^{n-2} + \frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{m_\phi^2}{xm_A^2 + (1-x)m_\phi^2 - x(1-x)p^2}. \quad (49)$$

对于玻色场 (A_0, F_0) , 有

$$D_B^{-1}(p^2) = \begin{pmatrix} D_{AA}^{-1}(p^2) & D_{AF}^{-1}(p^2) \\ D_{FA}^{-1}(p^2) & D_{FF}^{-1}(p^2) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

式中

$$\begin{aligned} D_{AA}^{-1}(p^2) &= (n-1)(n-2)gA^{n-3}F \\ &\quad + \frac{g^2}{\pi} \left[I(p^2, m_\phi^2) - \frac{4m_\phi^2}{4m_A^2 + p^2} I(p^2, m_A^2) + \ln \frac{m_A^2}{m_\phi^2} \right], \\ D_{FA}^{-1}(p^2) &= D_{AF}^{-1}(p^2) = (n-1)gA^{n-2} + \frac{2g^2}{\pi} \frac{m_\phi}{4m_A^2 + p^2} I(p^2, m_A^2), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} D_{FF}^{-1}(p^2) &= -\frac{g}{\pi} \frac{1}{4m_A^2 + p^2} I(p^2, m_A^2), \\ I(p^2, m^2) &= \sqrt{\frac{4m^2 + p^2}{p^2}} \left/ n \frac{\sqrt{4m^2 + p^2} - \sqrt{p^2}}{\sqrt{4m^2 + p^2} + \sqrt{p^2}} \right. \end{aligned} \quad (52)$$

下面按超对称破缺和不破缺两种情况作进一步详细说明.

1) $F \neq 0$, 超对称破缺情况

根据超对称场论, 当超对称产生破缺时, 应伴随存在一个零质量的 Goldstone 费密子. 即要求方程 $B(p^2) = 0$, 在 $p^2 = 0$ 处有解. 事实确是如此, 在 $p^2 = 0$ 处, (48) 和 (49) 式分别成为

$$\begin{aligned} A(0) &= (g^2/\pi) \{1 - [m_\phi^2/(m_A^2 - m_\phi^2)]/\pi(m_A^2/m_\phi^2)\}/(m_A^2 - m_\phi^2), \\ B(0) &= -(n-1)m_\phi^{n-2}/2(2g)^{n-3} + (m_\phi g^2/\pi) \ln(m_A^2/m_\phi^2)/(m_A^2 - m_\phi^2). \end{aligned} \quad (53)$$

而从最小值条件(40)式, 不难得到

$$-(n-1)m_\phi^{n-2}/2(2g)^{n-3} + (m_\phi g^2/\pi) \ln(m_A^2/m_\phi^2)/(m_A^2 - m_\phi^2) = 0,$$

故有 $B(0) = 0$, 但 $A(0) \neq 0$. 因此, $S_{\phi\phi}(p)$ 有零质量极点, 即 ϕ_0 是一个零质量的

Goldstone 费密子, 它是费密子 ϕ_i 和玻色子 A_i 的束缚态.

2) $F = 0$, 超对称不破缺情况

这时, $m_A = m_\phi$, 且当 $p^2 = 0$ 时, 有

$$A(0) = 1/8\pi A^2, B(0) = (g/2\pi A)(1 - 2\pi(n-1)A^{n-1}). \quad (54)$$

由(54)式可知, 如 $A^{n-1} \neq 1/2\pi(n-1)$, $B(0) \neq 0$, 故没有零质量费密子极点; 如 $A^{n-1} = 1/2\pi(n-1)$, 这相当于临界点的 A 值, 即 $M^2 = M_c^2 = 4g^2(1/2\pi(n-1)e)^{2/n-1}$. 这时 $B(0) = 0$, 存在零质量费密子极点, 但它并非 Nambu-Goldstone 费密子, 因为这时伴随有零质量的玻色子 A_0 .

综上所述, 将 n 为奇数时的超对称模型的质量谱分别表示为图 6 和图 7 的形式.

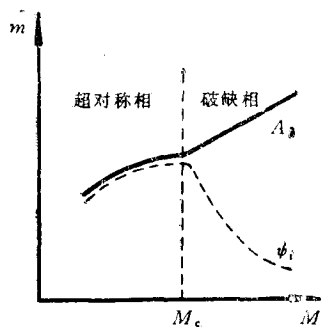


图 6 $O(N)$ 矢量粒子 (A_i, ϕ_i) 的质量谱

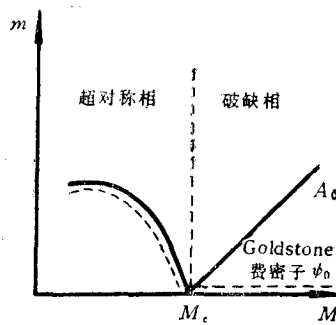


图 7 $O(N)$ 单态粒子 (A_0, ϕ_0) 的质量谱

六、结 论

一般超对称模型在树图近似下, 超对称不破缺, 但通过微扰或非微扰量子效应能否产生超对称破缺, 这是场的拓扑行为. 由本文讨论可见, 超势的奇偶性起着决定性的作用. 本文从 Witten 指数定理和非微扰的大 N 展开法均得到相同的结论. 这一结论与超对称量子力学的情况非常相似^[6], 从超对称场论的无穷维分析着手也可得到类似的结论^[7]. 作为场的整体行为, 超对称破缺与 Morse 理论有非常密切的关系^[8]. 可以期待, 通过同伦群, 即超势的同伦性质的研究也能得到类似的结果.

本文作者之一(余扬政)衷心感谢日本京都大学 T. Uematsu 教授的有益讨论.

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, B202 (1982), 253.
- [2] K. Higashijima, T. Uematsu and Yang-zheng Yu, *Phys. Lett.*, 139B (1984), 161.
- [3] L. Alvarez-Gaumé, *Commun. Math. Phys.*, 90(1983), 161.
- [4] S. Cecotti and L. Girardello, *Phys. Lett.*, 110B (1982), 39; *Nucl. Phys.*, B239 (1984), 573.
- [5] Yu Yang-zheng and Lin Ting-ting, *Chin. Phys. Lett.*, 8(1991), 168.
- [6] A. Lahiri and P.K. Roy, *Int. J. Mod. Phys.*, A5(1990), 1383.
- [7] A. Jaffe and A. Lesniewski, in *Nonperturbative Quantum Field Theory*, eds. G. 't Hooft *et al.* (Plenum Press, 1989), p. 227.
- [8] E. Witten, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 661.

BREAKING OF SUPERSYMMETRY AND WITTEN INDEX IN TWO-DIMENSIONAL SUPERSYMMETRIC MODELS

YU YANG-ZHENG¹⁾ CHEN XIONG-XIONG

Department of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005

(Received 26 August 1991)

ABSTRACT

We construct a wider class of $O(N)$ supersymmetric (SUSY) models with superpotential $W = (1/n)g\phi^n$ in two-dimensions. The witten index Δ of the models is evaluated in detail. It is shown that SUSY breaking does not occur when n is even, and can occur when n is odd. By using large- N expansion, a mechanism for spontaneous SUSY breaking is investigated. Finally, we present the particle spectra.

PACC: 1130; 1200; 0450