

激光系统的 Ginzburg-Landau 方程及其 相位扩散方程

汪 凯 戈

北京师范大学物理系, 北京 100875

1991 年 12 月 9 日收到; 1992 年 6 月 4 日收到修改稿

讨论了激光系统 Ginzburg-Landau 方程的主要动力学行为, 它描述激光系统的自发时空对称性破缺. 当方程有非均匀静态解时, 它存在合作频率锁定效应; 而当方程有时空振荡解时, 各横模仍有一个共同的光学载频. 此模型还表明, 混沌解可以发生在低抽运条件下. 在较小失谐时, 该方程的约化相位扩散方程能较精确地再现原方程的全程动力学行为. 这说明在激光横向图形分布的自发形成中, 电场的相位分布引导其动力学行为.

PACC: 4255; 4260; 4250T; 4265

一、引 言

在过去 30 年中, 关于光学系统中的不稳定性现象的研究已有大量文献. 其中大部分工作是讨论光场强度的时间不稳定性行为, 即在控制参数都已稳定的光学系统中自产生输出光强的脉冲和振荡行为. 在这些工作中, 大多采用了平面波近似或单模近似, 因而空间变量被消去, 使数学问题的处理大为简化. 这种简化虽然可以描述光学系统的主要动力学特征, 但也存在一些理论与实验结果不相一致的地方. 例如, 实验发现气体激光器中发生不稳定振荡的阈值远低于平面波近似 Maxwell-Bloch 方程所预言的结果^[1]. 在观察光学双稳的无源系统中也存在着类似的问题^[2].

最近几年中, 非线性光学系统中另一类不稳定性现象引起了人们广泛的兴趣. 在一个物理条件均匀或对称的光学系统中发生空间或时空的对称性破缺, 形成具有横向空间分布的图案^[3-8]. 这种对称性破缺行为完全是自发形成的, 因为系统本身仍保持其物理对称性条件不变, 而只改变某些控制参数的数值. 在分叉理论中, 时间域中发生的振荡行为可归之为硬模不稳定性 (Hopf 分叉), 其特征是在不稳定性的边界上, 一对复共轭本征值的实部为零. 而上面提及的自发空间对称性破缺行为则是同软模不稳定性相联系, 其特征是在不稳定性的边界上, 其实数本征值为零.

事实上, 类似的现象在流体力学、化学反应及生物系统中曾较早地被观察到, 通常称之为远离平衡态的耗散结构现象. 从数学模型的角度看, 产生自发空间对称性破缺的动力学系统要求同时包含时间和空间变量的非线性偏微分方程来描述. 对于不同的系统, 空间项来自于不同的机制: 在流体动力学中, 空间项来自于流体的对流; 在化学反应中,

它来自于物质的扩散过程;而在光学系统中,空间项是由于电磁波的衍射。同其它机制相比较,在许多情况下,光的衍射效应更容易被忽略掉。这可能是非线性光学系统中不稳定性研究的发展,没有完全平行于其他学科的原因之一。

物理系统中的相变一般总是与某种对称性破缺相联系,寻找具有普适性的方程来描述非平衡态的相变显然十分有意义。过去的研究表明,在一定的近似下,流体力学中描述非线性对流的方程及化学系统中的反应扩散方程都可以简化为复变量 $W(\mathbf{r}, t)$ 的 Ginzburg-Landau 方程(简称 G-L 方程)^[9-11]

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = AW(\mathbf{r}, t) + B\nabla^2 W(\mathbf{r}, t) + C|W(\mathbf{r}, t)|^2 W(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中 A , B 和 C 为复参数。此方程反应时空平移不变性的总破缺^[10]。

进一步研究表明,如果将 $W(\mathbf{r}, t)$ 写成模量和相位的形式

$$W(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t) \exp[i\Theta(\mathbf{r}, t)],$$

G-L 方程可以约化为只含有相位变量 $\Theta(\mathbf{r}, t)$ 的相位扩散方程,通常称为 Kuramoto-Sivashinsky 方程(简称 K-S 方程)^[11-14]。

最近的研究表明,激光系统中自发横向空间分布形成的行为仍可用 G-L 方程来描述^[5],并且它也可约化为一个相位扩散方程^[15,16]。

本文将数值求解激光 G-L 方程及其相位扩散方程,并对它们表现的主要动力学行为进行比较。

二、激光 Ginzburg-Landau 方程

考虑一种最简单的激光腔模型,即由平面镜围成的矩形腔结构。模型既可设置为环形腔,也可为 Fabry-Pérot 腔。设激光传播的纵向沿 z 轴方向,在与 x 轴垂直的侧面安置两个平面镜,而在 y 方向腔完全开放。设腔内的工作介质为均匀加宽的两能级原子,其跃迁频率为 ω_A 。在一定的近似下,此激光系统的动力学行为可以用激光 G-L 方程来描述^[5]

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = -E(x, t)(1 - i\Delta)(|E(x, t)|^2 - p) + ia \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

其中 $E(x, t)$ 为无量纲的慢变包络电场振幅, x 和 t 分别被侧面镜之间的距离 b 和腔损耗 κ 归一化。 Δ 为原子失谐参数, p 为抽运参数, a 为腔结构参数,它反映横模之间的频率间隔

$$a\pi^2\pi^2 = (\omega_n - \omega_R)/\kappa, \quad (3)$$

其中 ω_n 为第 n 阶横模的频率, ω_R 为纵模频率。

场强 $E(x, t)$ 满足 Neumann 边界条件,

$$\partial E / \partial x = 0 \quad (x = 0, 1), \quad (4)$$

因此它可以用三角函数的完备集展开

$$E(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \zeta_n(x), \quad (5a)$$

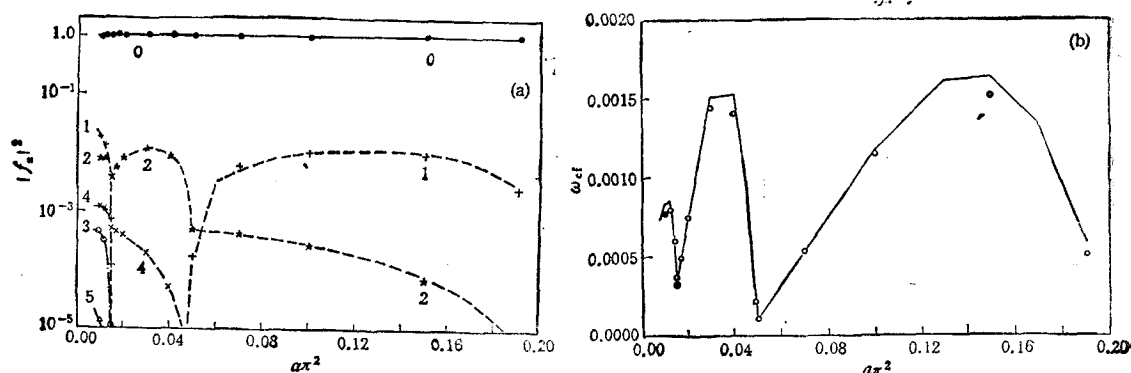


图 1 当 $p=1.0$, $\Delta=0.1$ 时, 非均匀静态解的 (a) 各模式的强度 $|f_n|^2$, (b) 合作工作频率 ω_{cf} 随参数 $a\pi^2$ 的变化. 实线和虚线表示激光 G-L 方程的数值结果; 各种符号为激光 K-S 方程的数值结果; 数字 0—5 为模式序数 n .

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 & n=0, \\ (1/\sqrt{2}) \cos(n\pi x) & n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5b)$$

显然方程 (2) 有均匀静态解

$$E_s(x) = \sqrt{p} e^{i\phi} S_0(x) = \sqrt{p} e^{i\phi}, \quad (6)$$

ϕ 为任意位相值. 对均匀解的线性稳定性分析表明, 在自聚焦条件下 ($\Delta > 0$), 它发生不稳定的条件为^[9]

$$a n^2 \pi^2 < 2 p \Delta. \quad (7)$$

数值解 (2) 和 (5) 式表明, 均匀解失稳后自发形成稳定的场强非均匀横向分布, 即场强为均匀模和若干非均匀模的叠加, 如图 1(a) 所示. 数值结果中有两个值得注意的现象: 一个是合作频率锁定效应; 另一个是偶对称解的破缺行为.

合作频率锁定效应是由 Lugiato 等人首先提出的^[9]. 按谐振腔的模式理论, 空腔时不同的横模有不同的频率. 但当激光系统实现多个横模共同运行并达到稳定时, 由于这些模式之间的非线性耦合, 使它们不能按自己的固有频率彼此独立地振荡, 而共同选择一个合作频率 ω_{cf} 振荡. 在激光 G-L 方程中, 此合作频率为^[9]

$$\omega_{cf} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 a \pi^2 n^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2}. \quad (8)$$

上式等号右端分母实际上是对空间坐标的积分总强度 $\int_0^1 |E(x)|^2 dx$. 因此, ω_{cf} 是以各工作模式的强度为权重的各模式频率的平均. 事实上, 数值结果中的非均匀静态解有如下形式:

$$E_s(x, t) = E_s(x) \exp(-i \omega_{cf} t). \quad (9)$$

图 2(b) 为合作频率 ω_{cf} 随参数 $a\pi^2$ 的变化.

由于存在工作模式的合作频率锁定效应, 因此对于激光器中的横模及它们对应的频率应有更细致的认识. 当若干横模共同激发时, 空间强度分布已呈不规则形状, 但激光

频谱仍可能是单频谱线。在过去的实验观察中,常把这种现象归诸于激光器本身的不均匀性。按照目前的理论,这种现象也可能是均匀激光器中发生合作频率锁定效应。

方程(2)有明显的奇偶对称性:如果 $E(x, t)$ 是方程的解,则 $E(1-x, t)$ 也是方程的解,这两个解对于中点 $x=0.5$ 互相镜像对称。如果满足 $E(x, t) = E(1-x, t)$,则为偶对称解,因为它对于中点自身镜像对称。偶对称解由(5)式展开时,所有的奇数阶模为零。本模型所考虑的物理系统为均匀对称,它应包括偶对称。然而在形成非均匀的空间分布时,偶对称解可能在某些参数范围内稳定,例如图 1(a) 中的 $0.0151 < a\pi^2 < 0.051$ 。在此范围内,任何奇数模的微扰都将衰变到零。在此范围之外,奇数模的微扰开始增长,而形成两个对应解 $E(x)$ 与 $E(1-x)$ 中的一个,这取决于初始条件的选择。在模式展开中,这两个对应解的区别仅在于所有的奇数模的振幅仅相差一个负号,因此在图 1(a) 的模式强度曲线中,不能区分它们。事实上,由 $E(x)$ 与 $E(1-x)$ 形成的双稳是平庸的。另外,数值结果没有发现仅由奇数阶模组成的奇对称解。

随着参数 a 的减小,非均匀静态解失稳而形成时空振荡解。我们发现在这种情况下,随时间振荡的各模式振幅 $f_n(t)$ 仍有一个共同的光学载频,即它可以写成如下形式:

$$f_n(t) = f'_n(t) \exp(-iQ_t), \quad (10)$$

其中 Q 与模式序数 n 无关。例如,对于激光 G-L 方程的时空周期解,在消去了共同载频因子 $\exp(-iQ_t)$ 后的模式振幅 $f'_n(t)$ 在复数平面上的轨迹为闭合的极限环,如图 2 所示。

进一步减小参数 a , 周期解发生倍周期分叉,最后形成时空混沌解。尽管各模式振幅已呈无规则的振荡,但仍能保持(10)式的形式。图 3 为方程(2)发生时空混沌解时,其中一个模式是

$n=2$ 的振幅 $f_2(t)$ 的时间演化行为。图 3(a) 为 $f_2(t)$ 在复数平面上的轨迹,它在绕原点旋转。图 3(b) 为 $f_2(t)$ 的实部和虚部随时间的变化,从图 3 中依稀可辨认无规则振荡叠加在一个单频振荡上。为了更清楚地展现这一事实,可计算模式振幅 $f_n(t)$ 的自相关函数

$$A_n(\tau) = \frac{\langle f_n^*(t+\tau) f_n(t) \rangle}{\langle f_n^*(t) f_n(t) \rangle}. \quad (11a)$$

如果(10)式成立,则有

$$A_n(\tau) = \frac{\langle f'_n{}^*(t+\tau) f'_n(t) \rangle}{\langle f'_n{}^*(t) f'_n(t) \rangle} \exp(iQ\tau), \quad (11b)$$

即自相关函数 $A_n(\tau)$ 也应包含相同频率的规则振荡因子。由于自相关函数的计算是对

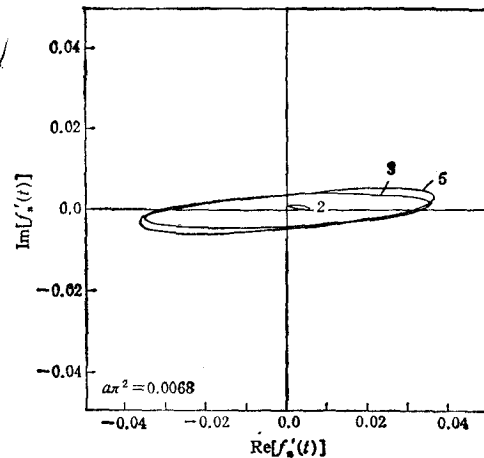
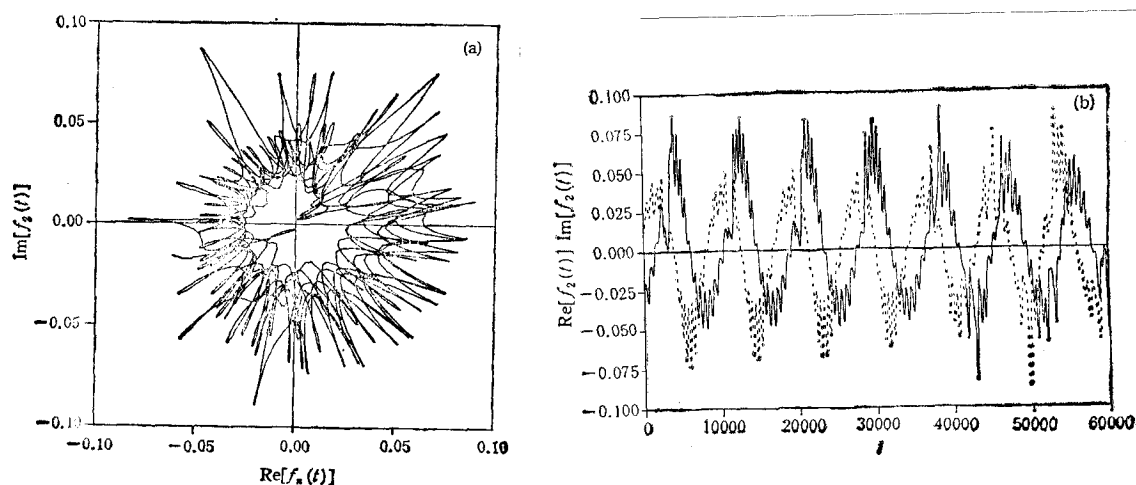
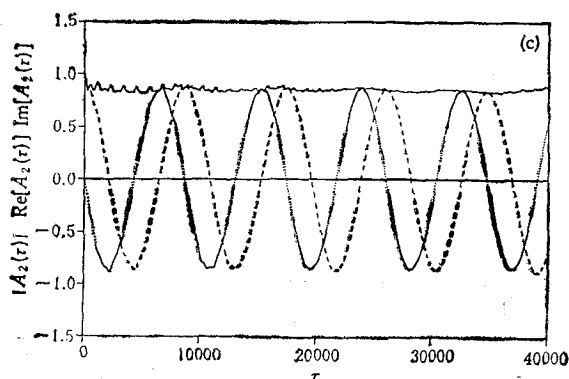


图 2 当 $p=1.0$, $\Delta=0.1$ 和 $a\pi^2=0.0068$ 时,激光 G-L 方程的周期解 模式振幅 $f'_n(t)$ 在复数平面上的轨迹为极限环,图中画出 $n=2, 3, 5$ 三个模式;消去的共同载频为 $Q=2\pi/4979$

(a) $f_2(t)$ 在复数平面上的轨迹(b) $f_2(t)$ 的实部(实线)和虚部(虚线)随时间的变化(c) $f_2(t)$ 的自相关函数 $A_2(\tau)$ 随 τ 的变化,实线、虚线和点线分别为 $A_2(\tau)$ 的模量、实部和虚部图 3 当 $p = 1.0$, $\Delta = 0.1$ 和 $a\pi^2 = 0.006$ 时,激光 G-L 方程的混沌解 图中画出 $n = 2$ 模式振幅 $f_2(t)$ 随时间的演化

足够长的时间取平均, $f_n(t)$ 中的不规则振荡部分的调制度被大大压缩,因而能较明显地展现出规则振荡部分,如图 3(c) 所示。对其它各模式的分析表明,它们也都有这一相同频率的载频因子。图 3(c) 还表明,相关函数的模量 $|A_2(\tau)|$ 除开始有一明显的衰变外,一直保持不衰变的无规则振荡,这正是混沌解相关函数的主要特征。

时空振荡解中各模式含有相同频率的光学载频因子这一事实表明,时空振荡的成形并不是产生于不同横模工作频率之间的拍频效应。更合理的解释是,时空振荡解是由于非均匀静态解发生 Hopf 分叉,而时空振荡解中的共同载频是合作频率锁定效应的延伸。

以往报道的激光系统中的混沌解,常以激光 Haken-Lorenz 模型为基础^[17]。这个模型采用了平面波近似,忽略了电磁场的衍射效应,其动力学行为是基于光场与原子变量的相互作用。这些模型中的混沌解发生在抽运较高的情况下。在激光 G-L 方程中,原子变量已被消去,其动力学行为完全决定于光场的衍射和非线性效应,混沌解能在低抽运条

件下实现,这与实验观察相一致。

腔结构参数 a 在激光自发时空对称性破缺中起了举足轻重的作用。由(3)式, a 的减小使模式之间的频率间隔减小,因而较多的模式能参与激发和耦合,这是系统能出现较复杂的动力学行为的直接原因。

三、相位扩散方程: 激光 Kuramoto-Sivashinsky 方程

激光 G-L 方程可以被进一步约化为相位扩散方程——激光 Kuramoto-Sivashinsky 方程(简称 K-S 方程)。如将场强 $E(x, t)$ 写成

$$E(x, t) = R(x, t) \exp[i\Theta(x, t)], \quad (12)$$

代入激光 G-L 方程,并对模量 $R(x, t)$ 绝热消去和用微扰方法截止二级小量,就得到激光 K-S 方程^[15,16]

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -a\Delta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - a \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{a^2 \Delta}{p} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{a^2}{2p} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4}. \quad (13)$$

对于静态解,场强的模量分布 $R(x)$ 可以由相位分布 $\Theta(x)$ 导出

$$R(x) = \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{a^2}{2p^2} \left[\frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (14)$$

因此由激光 K-S 方程可以近似确定静态解的场强分布 $E(x)$ 。

文献[16]表明在较大失谐条件下 ($\Delta = 0.5$), 激光 K-S 方程近似地反映激光 G-L 方程的主要动力学行为。本文采用较小失谐参数 $\Delta = 0.1$, 数值解表明,这时激光 K-S 方程能较精确地反映激光 G-L 方程的全程动力学行为。在图 2 中以符号形式表示的数值点,是方程(13)和(14)的数值解,它们与方程(2)的数值解较好地符合。

两个方程的时间振荡解有几乎一致的分叉点,例如都在 $a\pi^2 \leq 0.0061$ 时出现混沌解。直接比较两个不同方程混沌解的时间演化的一致性难以获得明确的判断标准,本文采用作图法,将时间演化转化为平面上的图样 (map)。这实际上展现了混沌吸引子的几何结构。具体的作法是将场强的相位分布 $\Theta(x, t)$ 展开为模式函数

$$\Theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) S_n(x), \quad (15)$$

$S_n(x)$ 已由 (5b) 式定义, $g_n(t)$ 为相位分布的模式振幅。然后选择一个时间延迟值 T , 对于每一个时刻 t , 令 $g_n(t)$ 和 $g_n(t+T)$ 分别为平面上一个点的模坐标和纵坐标。随着 t 的变化,这些点的集合在平面上形成一个图样。

图 4 画出混沌解的相位分布 $\Theta(x, t)$ 的两个模式振幅 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的图样,其中图 4(a) 和图 4(b) 解自于激光 G-L 方程,图 4(c) 和 (d) 解自于激光 K-S 方程。比较这些图样可以看出,不同的模式振幅有不同的吸引子结构,而解自两个不同方程的对应模式有相似的结构。其它模式振幅的图样也符合这些规律。

从数学形式来看,方程(2)和(13)如此地不同(方程(13)的维数比方程(2)减小了二分之一),但它们能保持动力学行为的基本一致性,这一事实反映了激光系统在自发时空对称性破缺的分叉行为中,场强的相位分布起主导作用,而场强的模量分布从属于相位分

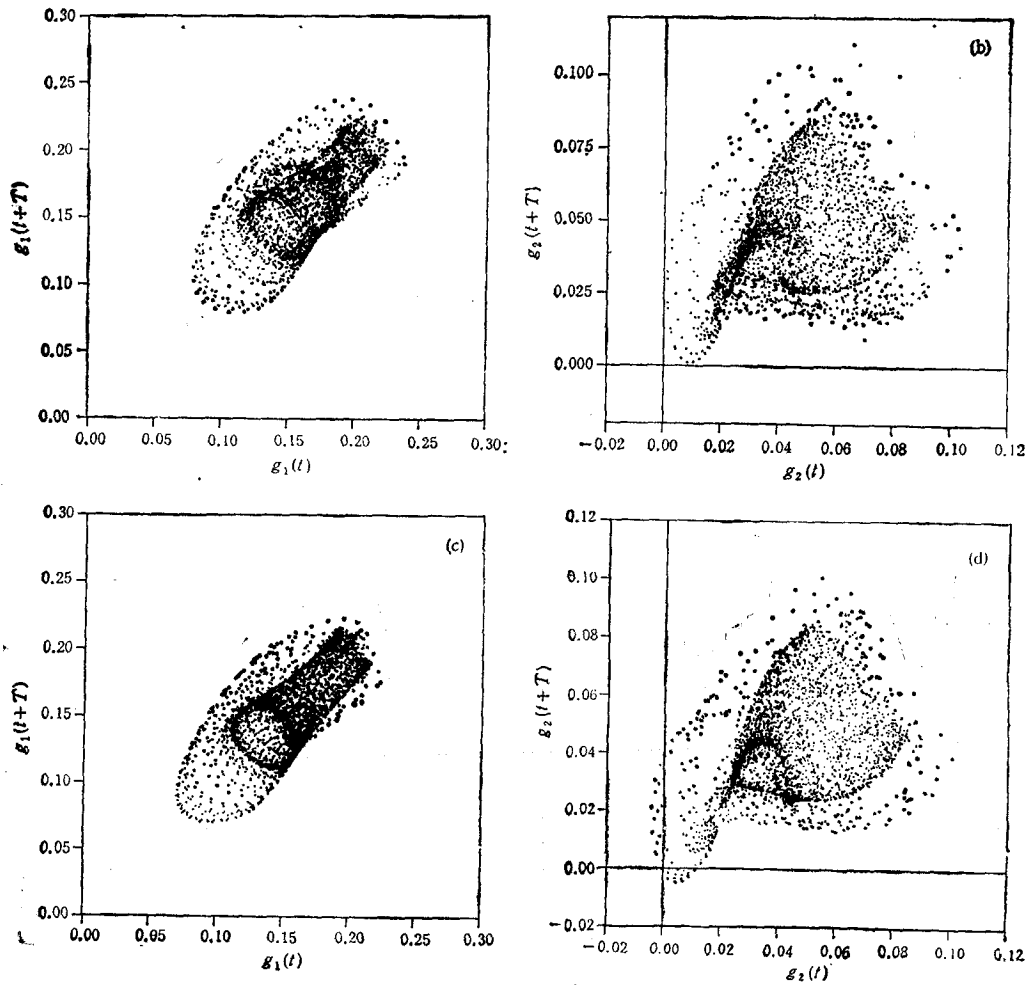


图4 混沌解相位分布 $\Theta(x, t)$ 的模式振幅 $g_n(t)$ 的图样 横坐标为 $g_n(t)$, 纵坐标为 $g_n(t+T)$, $T=100$ (a) 和 (c) 为 $n=1$ 模式的 $g_1(t)$; (b) 和 (d) 为 $n=2$ 模式的 $g_2(t)$; (a) 和 (b) 解自于激光 G-L 方程; (c) 和 (d) 解自于对应的激光 K-S 方程; 所用参数值同图 3

布。激光 G-L 方程的混沌解的各模式吸引子具有明显的相位特征性, 因此它们能够在对应的相位扩散方程中保持其吸引子结构的一致性。从物理机制方面来解释, 电磁场的衍射是与相位分布的变化相联系, 但从更普遍意义上来看, 决定吸引子结构的动力学内含有待于进一步揭示。

- [1] G. L. Lippi, N. B. Abraham, J. R. Tredicce, L. M. Narducci, G. P. Puccioni and F. T. Arecchi, in *Optical Chaos* edited by J. Chrostowski and N. B. Abraham, SPIE vol. 667 (SPIE, Bellingham 1986), p. 41.
- [2] (a) D. E. Grant and H. J. Kimble, *Opt. Lett.*, **7**(1982), 353;
 (b) D. E. Grant and H. J. Kimble, *Opt. Comm.*, **44**(1983), 415;
 (c) L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy and C. A. Pennise, *Opt. Comm.*, **43**(1982), 281.
- [3] Special issues on "Transverse effects in nonlinear optical system", ed. by N. B. Abraham and W. J. Firth, *J. Opt. Soc. Am. B*, **7** June and July, (1990).
- [4] L. A. Lugiato and R. Letever, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2209.
- [5] L. A. Lugiato, C. Oldano and L. M. Narducci, *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**(1988), 879.

- [6] L. A. Lugiato and C. Oldano, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 3896.
- [7] L. A. Lugiato, F. Prati, L. M. Narducci and G.-L. Oppo, *Opt. Comm.*, **69**(1989), 387.
- [8] J. R. Tredicce, E. J. Quel, A. M. Ghazzawi, C. Green, M. A. Perrigo, L. M. Narducci and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1274.
- [9] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **54**(1975), 687.
- [10] P. Coullet and L. Gil, in *Partial Integrable Evolution Equations in Physics* ed. by R. Conte and N. Boccara, NATO ASI Series C, vol. 310 (Kluwer Academic Publishers 198), p. 261.
- [11] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Prog. Theor. Phys.*, **55**(1976), 356.
- [12] G. I. Sivashinsky, *Acta Astronautica*, **4**(1977), 1177; 1207.
- [13] G. I. Sivashinsky and D. M. Michelson, *Prog. Theor. Phys.*, **63**(1980), 2112.
- [14] J. M. Hyman and B. Nicolaenko, *Physica*, **18D**(1986), 113.
- [15] R. Lefever, L. A. Lugiato, Wang Kaige, N. B. Abraham and P. Mandel, *Phys. Lett. A*, **135**(1989), 254.
- [16] R. Lefever, L. A. Lugiato, Wang Kaige, N. B. Abraham and P. Mandel, in *Dynamical of Nonlinear Optical Systems*, edited by L. Pesquera and F. J. Bermejo (World Scientific, Singapore, 1988), p. 175.
- [17] H. Haken, *Phys. Lett. A*, **53**(1975), 77.

LASER GINZBURG-LANDAU EQUATION AND ITS PHASE DIFFUSION EQUATION

WANG KAI-GE

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 9 December 1991; revised manuscript received 4 June 1992)

ABSTRACT

The dynamical behavior of laser Ginzburg-Landau equation, which describes the spontaneously spacial temporal symmetry breaking, has been investigated. In the case of inhomogeneous stationary solution, it shows the cooperative frequency locking; and in the case of spacial-temporal oscillatory solution, all the transverse modes have a common optical carrier frequency. However, a chaotic solution can be generated at lower pumping, due to the diffraction of electro-magnetic field and nonlinearity. The numerical results show that, in the situation of small detuning, the reduced phase diffusion equation of this model can more precisely duplicate its global dynamical behavior. It illustrates that the phase pattern of field guides the dynamics in spontaneous formation of the transverse pattern of field.

PACC: 4255; 4260; 4250T; 4265