

Fateev-Zamolodchikov 量子自旋链的 潜藏定域规范不变性*

管习文 熊 庄 周焕强

四川师范大学物理系, 成都 610066

1992年1月20日收到

详细研究了自旋为 1 的 Heisenberg XXZ 模型 (Fateev-Zamolodchikov 模型) 的潜藏定域规范不变性。发现与自旋为 1/2 的情形相类似, 该模型允许 $AbelU(1)$ 规范变换, 且其能谱在规范变换下保持不变, 而其本征矢却与规范变换明显相关。

PACC: 7510J; 0290; 0590

一、引 言

近年来, 人们对完全可积系统的研究有着广泛的兴趣^[1-7]。特别是, 70 年代末由苏联 Faddeev 学派和美国国家费密加速器实验室 Thacker 等人建立的量子反散射方法 (QISM)^[8-10] 已成功地应用于具有不同物理背景的可积模型, 使得完全可积系统理论的研究业已具备极其丰富的内容。

本文将在量子反散射方法的框架内研究自旋为 1 的 Heisenberg XXZ 格子自旋链, 亦即 Fateev-Zamolodchikov 模型的潜藏定域规范不变性。潜藏定域规范不变性这一概念最先是 de Vega 和 Lopes^[11,12] 于 1987 年在对自旋为 1/2 的 Heisenberg XXZ 模型的研究中引入的。

二、预备知识

设 V 为某个有限维线性空间, 并设算符值函数 $R: C \rightarrow \text{End}(V \otimes V)$ 为量子杨-Baxter 方程 (QYBE)

$$R_{12}(u_1)R_{13}(u_1 + u_2)R_{23}(u_2) = R_{23}(u_2)R_{13}(u_1 + u_2)R_{12}(u_1) \quad (1)$$

的解, 其中 $R_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 作用在空间 V_1, V_2 和 V_3 的张量积 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 上, 即 $R_{12} = R \otimes 1, R_{13} = (id \otimes P)R_{12}, R_{23} = 1 \otimes R$, 而 P 为作用在 $V \otimes V$ 上的置换算符

$$P(x \otimes y) = y \otimes x, \quad \forall x, y \in V. \quad (2)$$

对于 QYBE(1) 式的每一个解 $R(u)$, 存在一个相应的结合代数 T , 其生成元为

$$T_{\alpha\beta}(u)(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \dim V)$$

* 四川省教育委员会基金资助的课题。

(可以看作是某个方阵的矩阵元),并满足如下的定义关系(量子杨-Baxter 代数(QYB-A)):

$$R_{12}(u_1 - u_2) \overset{1}{T}(u_1) \overset{2}{T}(u_2) = \overset{2}{T}(u_2) \overset{1}{T}(u_1) R_{12}(u_1 - u_2), \quad (3)$$

其中对于任意矩阵 $X \in \text{End}(V)$, 有

$$\overset{1}{X} \equiv X \otimes \text{id} V_2; \quad (4a)$$

$$\overset{2}{X} \equiv \text{id} V_1 \otimes X. \quad (4b)$$

QISM 的代数基础基于如下的事实: 若 $T_+(u)$ 和 $T_-(u)$ 分别为代数 T 在空间 W_+ 和 W_- 内的表示, 则量 $\tau(u) \equiv \text{Tr} T_+(u) T_-(u)$ 对于谱参数 u 的不同值彼此对易. 因此, 可以将 $\tau(u)$ 看成是具有量子态空间(Hilbert 空间) $W_+ \otimes W_-$ 的量子系统的守恒量的生成泛函. 特别地, 代数 $T(u)$ 的一类重要的实现是通常的二维格子统计模型及其相应的一维格子磁性链. 这可以表述成如下的结果:

若 $R(u)$ 满足 QYBE(1) 式, 则由下式定义的单值(Monodromy) 矩阵:

$$T_{N0}(u) = L_{N0}(u) \cdots L_{10}(u) \quad (5)$$

给出了代数 T 的实现, 其中

$$L_{n0}(u) = R_{n0}(u) \quad n = 1, 2, \cdots, N. \quad (6)$$

特别地, 转移矩阵 $\tau_N(u) = \text{Tr}_0 T_{N0}(u)$ 对于不同的 u 值彼此对易, 即 $\tau_N(u_1)$ 与 $\tau_N(u_2)$ 对易. 这里已引入了记号 $W_0 \equiv V$, 且求迹运算 Tr_0 是对辅助空间 W_0 进行的.

三、Fateev-Zamolodchikov 模型的潜藏定域规范不变性

为了方便起见, 将 QYBA(3) 式改写成

$$\overset{V}{R}(u_1 - u_2) T(u_1) \otimes T(u_2) = T(u_2) \otimes T(u_1) \overset{V}{R}(u_1 - u_2), \quad (7)$$

其中 $\overset{V}{R}(u) = P R(u)$, P 为(2)式中定义的置换算符. 注意到, QYBA 对于生成元

$$T_{\alpha\beta}(u)(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, \dim W_0)$$

的下述变换:

$$T(\mathcal{G}) = g T(u) h^{-1} \quad (8)$$

是不变的, 只要 $n \times n (n = \dim W_0)$ 阶矩阵 g 和 h 满足

$$[g \otimes g, R] = 0; \quad (9a)$$

$$[h \otimes h, R] = 0. \quad (9b)$$

据此, 有 QYBA 的左对称(g)和右对称(h). 事实上, 可以将 g, h 看成 QYBA 的一类基本表示(fundamental representation). 故若 $T(u)$ 生成 QYBA, 那么由下式定义的

$$T^{(s)}(u) = \prod_{i=1}^s T_i^{(s)}(u) \quad (10)$$

也生成 QYBA, 其中

$$T_i^{(s)}(u) = g(k_i) T_i(u) h^{-1}(l_i). \quad (11)$$

下面具体讨论 Fateev-Zamolodchikov 模型的潜藏定域规范不变性. 该模型的

Hamiltonian 量为

$$H = \sum_{n=1}^N H_{n,n+1}, \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{n,n+1} = & \{J_n^x J_{n+1}^x + J_n^y J_{n+1}^y + J_n^z J_{n+1}^z - (J_n^x J_{n+1}^x + J_n^y J_{n+1}^y + J_n^z J_{n+1}^z)^2 \\ & + 2\text{sh}^2 \eta [J_n^x J_{n+1}^x + (J_n^x)^2 + (J_{n+1}^x)^2 - (J_n^x J_{n+1}^x)^2] - 4\text{sh}^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) \\ & \cdot [(J_n^x J_{n+1}^x + J_n^y J_{n+1}^y) J_n^z J_{n+1}^z + J_n^z J_{n+1}^z (J_n^x J_{n+1}^x + J_n^y J_{n+1}^y)] \\ & + 2(1 - \text{ch} 2\eta)\}, \end{aligned} \quad (13)$$

J_n^x , J_n^y 和 J_n^z ($n=1, 2, \dots, N$) 为李代数 $SU(2)$ 自旋为 1 的生成元,

$$\begin{aligned} J^x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^y = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ J^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

根据 Baxter-Lüscher 关系

$$H = \text{sh} 2\eta \frac{\partial}{\partial u} \ln {}_s\tau_N(u) |_{u=0}, \quad (15)$$

可以将 Hamiltonian 量(14)式与转移矩阵

$${}_s\tau_N(u) = \text{Tr}_s L_N(u) \cdots {}_sL_1(u) \quad (16)$$

联系起来,其中

$${}_sL_n(u) = {}_{ss}R_{n0}(u), \quad (17)$$

而

$${}_{ss}R(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & d & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & f & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & d & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\text{sh} u}{\text{sh}(u+2\eta)}, \quad b = \frac{\text{sh} u \text{sh}(u-\eta)}{\text{sh}(u+\eta) \text{sh}(u+2\eta)}, \quad c = \frac{\text{sh} 2\eta}{\text{sh}(u+2\eta)}, \\ d &= \frac{\text{sh} u \text{sh} 2\eta}{\text{sh}(u+\eta) \text{sh}(u+2\eta)}, \quad e = \frac{\text{sh} \eta \text{sh} 2\eta}{\text{sh}(u+\eta) \text{sh}(u+2\eta)}, \quad f = a + e. \end{aligned}$$

注意,这里及以后,为了简洁起见,已略去了 L 矩阵的下标“0”。

据此,不难证明,对于 Fateev-Zamolodchikov 模型, QYBA 在下述变换下:

$${}_s L_i^{(g)} = g_s(k_i) {}_s L_i(u) h_i^{-1}(l_i) \quad (19)$$

保持不变,只须

$$\begin{aligned} g_s(k_i) = h_i(k_i) &= \begin{pmatrix} e^{ik_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_i} \end{pmatrix} \\ &\equiv \exp(ik_i J_0^z). \end{aligned} \quad (20)$$

相应地,由此可以得到规范变换后的 Fateev-Zamolodchikov 模型的 Hamiltonian 量为

$$H^{(g)} = \sum_{n=1}^N H_{n,n+1}^{(g)}, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{n,n+1}^{(g)} &= \{ [J_n^+ J_{n+1}^z + \exp[i(k_n - l_{n+1})] J_n^+ J_{n+1}^- + \exp[-i(k_n - l_{n+1})] J_n^- J_{n+1}^+] \\ &\quad + [J_n^z J_{n+1}^z + \exp[i(k_n - l_n)] J_n^+ J_{n+1}^- + \exp[-i(k_n - l_{n+1})] J_n^- J_{n+1}^+]^2 \\ &\quad + 2\text{sh}^2 \eta [J_n^z J_{n+1}^z + (J_n^z)^2 + (J_{n+1}^z)^2 - (J_n^+ J_{n+1}^z)^2] \\ &\quad - 4\text{sh}^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) [(\exp[i(k_n - l_{n+1})] J_n^+ J_{n+1}^- \\ &\quad + \exp[-i(k_n - l_{n+1})] J_n^- J_{n+1}^+) J_n^z J_{n+1}^z \\ &\quad + J_n^z J_{n+1}^z (\exp[i(k_n - l_{n+1})] J_n^+ J_{n+1}^- + \exp[-i(k_n - l_{n+1})] J_n^- J_{n+1}^+)] \\ &\quad + 2(1 - \text{ch} 2\eta) \}, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$J_n^\pm = J_n^\pm \pm i J_n^y. \quad (22b)$$

象通常一样,该 Hamiltonian 量可以通过 Baxter-Lüscher 关系

$$H^{(g)} = \text{sh} 2\eta \frac{\partial}{\partial u} {}_s \tau_N^{(g)}(u) \Big|_{u=0} \quad (23)$$

与转移矩阵 ${}_s \tau^{(g)}(u)$ 相联系,而

$${}_s \tau_N^{(g)}(u) = \text{Tr} \prod_{j=1}^N {}_s L_j^{(g)}(u). \quad (24)$$

显然,规范变换后的 Hamiltonian 量仍然是描述具有最近邻相互作用的定域算符. 下面进一步研究如何将转移矩阵 ${}_s \tau_N^{(g)}(u)$ 对角化的问题.

四、Bethe-Ansatz 方程与能谱关系

对于 Fateev-Zamolodchikov 模型,其辅助空间为 3 维. 由于标准的代数 Bethe-Ansatz 方法仅限于辅助空间为 2 维的情形. 为了克服这一困难,构造一个辅助性的“自旋为 1/2”转移矩阵 ${}_s \tau_N^{(g\sigma)}(u)$,它与转移矩阵 ${}_s \tau_N^{(g)}(u)$ 彼此对易. 故它们具有共同的本征矢,而辅助转移矩阵 ${}_s \tau_N^{(g\sigma)}(u)$ 可以通过标准的代数 Bethe-Ansatz 方法予以对角化,从而问题转化为如何用 ${}_s \tau_N^{(g\sigma)}(u)$ 来表示 ${}_s \tau_N^{(g)}(u)$.

为此目的,需要利用所谓的 fusion procedure^[11],可以证明,单值矩阵 $T_N^{(g\sigma)}(u)$ 满足

$$T_N^{(g)}(u) = [\text{sh}(u + \eta)\text{sh}(u + 2\eta)]^{-N} A P_{12}^+ T_N^{(g\sigma)}\left(u - \frac{1}{2}\eta\right)_\sigma T_N^{(g\sigma)}\left(u + \frac{1}{2}\eta\right) P_{12}^+ A^{-1}, \quad (25)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (26a)$$

$$P_{12}^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm P_{12}), \quad (26b)$$

且

$$T_N^{(g)}(u) = \prod_{j=1}^N L_j^{(g)}(u); \quad (27a)$$

$${}_\sigma T_N^{(g\sigma)}(u) = \prod_{j=1}^N {}_\sigma L_j^{(g\sigma)}(u); \quad (27b)$$

$${}_\sigma L_j^{(g\sigma)}(u) = g_\sigma(k_j) {}_\sigma L_j(u) h_\sigma^{-1}(l_j). \quad (27c)$$

这里

$$g_\sigma(k_j) = h_\sigma(k_j) = \begin{pmatrix} e^{ik_j/2} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j/2} \end{pmatrix}, \quad (28a)$$

$${}_\sigma L_j(u) = {}_\sigma R_{j0}(u), \quad (28b)$$

$${}_\sigma R(u) = \begin{bmatrix} \text{sh}\left(u + \frac{3}{2}\eta\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sh}\left(u + \frac{1}{2}\eta\right) & 0 & (\text{sh}\eta\text{sh}2\eta)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sh}\left(u - \frac{1}{2}\eta\right) & 0 & (\text{sh}\eta\text{sh}2\eta)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\text{sh}\eta\text{sh}2\eta)^{\frac{1}{2}} & 0 & \text{sh}\left(u - \frac{1}{2}\eta\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\text{sh}\eta\text{sh}2\eta)^{\frac{1}{2}} & 0 & \text{sh}\left(u + \frac{1}{2}\eta\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sh}\left(u + \frac{3}{2}\eta\right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

故此,可以得到 ${}_\sigma \tau_N^{(g)}(u)$ 与 ${}_\sigma \tau_N^{(g\sigma)}(u)$ 之间的关系

$$\begin{aligned} {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u) &= [\text{sh}(u+\eta)\text{sh}(u+2\eta)]^{-N} [{}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}\left(u - \frac{1}{2}\eta\right) {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)} \\ &\quad \cdot \left(u + \frac{1}{2}\eta\right) - \delta\{{}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u)\}], \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$${}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u) = \text{Tr}_{\sigma} T_N^{(g\sigma)}(u) = \text{Tr} \prod_{j=1}^N {}_{\sigma}L_j^{(g\sigma)}(u), \quad (31)$$

$\delta\{{}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u)\}$ 为 ${}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u)$ 的量子行列式,

$$\begin{aligned} \delta\{{}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u)\} &= \text{Tr}_{12} [P_{12}^{-1} T_N^{(g\sigma)}\left(u - \frac{1}{2}\eta\right) {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}\left(u + \frac{1}{2}\eta\right)] \\ &= [\text{sh}(u+2\eta)\text{sh}(u-\eta)]^N. \end{aligned} \quad (32)$$

现在可以利用标准的代数 Bethe-Ansatz 方法将转移矩阵 ${}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u)$ 对角化.

令

$${}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u) = \begin{pmatrix} A_N^{(g\sigma)}(u) & B_N^{(g\sigma)}(u) \\ C_N^{(g\sigma)}(u) & D_N^{(g\sigma)}(u) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

由 QYBA 得

$${}_{\sigma\sigma}R(u_1 - u_2) {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u_1) \otimes {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u_2) = {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u_2) \otimes {}_{\sigma}T_N^{(g\sigma)}(u_1) {}_{\sigma\sigma}R(u_1 - u_2), \quad (34)$$

其中

$${}_{\sigma\sigma}R(u) = \frac{1}{\text{sh}\eta} \begin{pmatrix} \text{sh}(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sh}u & \text{sh}\eta & 0 \\ 0 & \text{sh}\eta & \text{sh}u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sh}(u+\eta) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

可得到下列对易关系:

$$\begin{aligned} [A_N^{(g\sigma)}(u_1), A_N^{(g\sigma)}(u_2)] &= [B_N^{(g\sigma)}(u_1), B_N^{(g\sigma)}(u_2)] \\ &= [C_N^{(g\sigma)}(u_1), C_N^{(g\sigma)}(u_2)] = [D_N^{(g\sigma)}(u_1), D_N^{(g\sigma)}(u_2)] = 0, \end{aligned} \quad (36a)$$

以及

$$\begin{aligned} A_N^{(g\sigma)}(u_1) B_N^{(g\sigma)}(u_2) &= \frac{\text{sh}(u_1 - u_2 - \eta)}{\text{sh}(u_1 - u_2)} B_N^{(g\sigma)}(u_2) A_N^{(g\sigma)}(u_1) \\ &\quad + \frac{\text{sh}\eta}{\text{sh}(u_1 - u_2)} B_N^{(g\sigma)}(u_1) A_N^{(g\sigma)}(u_2), \end{aligned} \quad (36b)$$

$$\begin{aligned} D_N^{(g\sigma)}(u_1) B_N^{(g\sigma)}(u_2) &= \frac{\text{sh}(u_1 - u_2 + \eta)}{\text{sh}(u_1 - u_2)} B_N^{(g\sigma)}(u_2) D_N^{(g\sigma)}(u_1) \\ &\quad - \frac{\text{sh}\eta}{\text{sh}(u_1 - u_2)} B_N^{(g\sigma)}(u_1) A_N^{(g\sigma)}(u_2). \end{aligned} \quad (36c)$$

若选取真空态为

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_N, \quad (37)$$

按照标准的代数 Bethe-Ansatz 方法,有

$$A_N^{(g\sigma)}(u)|0\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \text{sh}^N\left(u + \frac{3}{2}\eta\right)|0\rangle, \quad (38)$$

$$D_N^{(g\sigma)}(u)|0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \text{sh}^N\left(u - \frac{1}{2}\eta\right)|0\rangle, \quad (39)$$

$$C_N^{(g\sigma)}(u)|0\rangle = 0. \quad (40)$$

因此可以分别将 $B_N^{(g\sigma)}(u)$ 和 $C_N^{(g\sigma)}(u)$ 看作真空态 $|0\rangle$ 上元激发的产生算符和湮没算符. 若取 ${}_{\sigma}\tau^{(g\sigma)}(u)$ 的本征态为

$$|Q\rangle^{(g\sigma)} = \prod_{i=1}^M B_N^{(g\sigma)}(u_i)|0\rangle, \quad (41)$$

由对易关系(36)式可得

$$A_N^{(g\sigma)}(u)|Q\rangle^{(g\sigma)} = \Lambda_+^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M)|Q\rangle^{(g\sigma)} + \sum_{i=1}^M \Lambda_i^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M)|Q^i\rangle^{(g\sigma)}; \quad (42a)$$

$$D_N^{(g\sigma)}(u)|Q\rangle^{(g\sigma)} = \Lambda_-^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M)|Q\rangle^{(g\sigma)} + \sum_{i=1}^M \Lambda_i^{(g\sigma)'}(u; u_1 \cdots u_M)|Q^i\rangle^{(g\sigma)}, \quad (42b)$$

其中

$$\Lambda_+^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M) = \exp\left[\frac{1}{2}i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \text{sh}^N\left(u + \frac{3}{2}\eta\right) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(u - u_j - \eta)}{\text{sh}(u - u_j)}, \quad (43a)$$

$$\Lambda_-^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M) = \exp\left[-\frac{1}{2}i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \text{sh}^N\left(u - \frac{1}{2}\eta\right) \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}(u - u_j + \eta)}{\text{sh}(u - u_j)}. \quad (43b)$$

因此 $|Q\rangle^{(g\sigma)}$ 确为辅助转移矩阵 ${}_{\sigma}\tau_N^{(g\sigma)}(u)$ (从而也是 ${}_{\sigma}\tau_N^{(g\sigma)'}(u)$) 的本征矢, 其相应的本征值为

$${}_{\sigma}\tau^{(g\sigma)}(u) = \Lambda_+^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M) + \Lambda_-^{(g\sigma)}(u; u_1 \cdots u_M). \quad (44)$$

只要其谱参数 $u_i (i = 1, 2, \cdots, M)$ 满足如下的 Bethe 方程:

$$\left(\frac{\text{sh}\left(u_i - \frac{1}{2}\eta\right)}{\text{sh}\left(u_i + \frac{3}{2}\eta\right)}\right)^N = \exp\left[i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{\text{sh}(u_i - u_j - \eta)}{\text{sh}(u_i - u_j + \eta)} \\ i = 1, 2, \cdots, M, \quad (45)$$

由 ${}_{\sigma}\tau_N^{(g\sigma)}(u)$ 与 ${}_{\sigma}\tau_N^{(g\sigma)'}(u)$ 的关系(30)式可以得到转移矩阵 ${}_{\sigma}\tau_N^{(g\sigma)'}(u)$ 的本征值

$${}_{\sigma}\tau^{(g\sigma)'}(u) = \exp\left[i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j) \prod_{i=1}^M \frac{\text{sh}\left(u - u_i - \frac{3}{2}\eta\right)}{\text{sh}\left(u - u_i + \frac{1}{2}\eta\right)}\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}\left(u - u_j + \frac{3}{2}\eta\right) \text{sh}\left(u - u_j - \frac{3}{2}\eta\right)}{\text{sh}\left(u - u_j + \frac{1}{2}\eta\right) \text{sh}\left(u - u_j - \frac{1}{2}\eta\right)} \text{sh}^N u \text{sh}^{-N}(u + 2\eta) \\
& + \exp\left[-i \sum_{j=1}^N (k_j - l_j)\right] \prod_{j=1}^M \frac{\text{sh}\left(u - u_j + \frac{3}{2}\eta\right)}{\text{sh}\left(u - u_j - \frac{1}{2}\eta\right)} \\
& \cdot \text{sh}^N(u - \eta) \text{sh}^N u \text{sh}^{-N}(u + \eta) \text{sh}^{-N}(u + 2\eta). \quad (46)
\end{aligned}$$

由 Baxter-Lüscher 关系(23)式可得能量本征值为

$$E_z = - \sum_{j=1}^M \frac{2\text{sh}2\eta}{\text{ch}(2u_j + \eta) - \text{ch}2\eta}. \quad (47)$$

为了讨论规范变换对能谱的影响,引入动量算符:

$$P_z = -i \ln \tau^{(z)}(u), \quad (48)$$

与其相应的本征值为

$$P_z = \sum_{j=1}^N (k_j - l_j) - i \sum_{j=1}^M \ln \frac{\text{sh}\left(u_j + \frac{3}{2}\eta\right)}{\text{sh}\left(u_j - \frac{1}{2}\eta\right)}. \quad (49)$$

对于单粒子激发态 ($M = 1$), 经过若干代数运算, 最终可得单粒子元激发的能谱关系为

$$E_z(P) = \frac{2(\text{ch}2\eta - 2\cos P_z)}{\text{sh}2\eta}, \quad (50)$$

其中已对 P_z 作了如下变换:

$$P_z \rightarrow P_z + \sum_{j=1}^N (k_j - l_j).$$

五、结 论

我们已在 QISM 框架内详细研究了周期性边界条件下 Fateev-Zamolodchikov 模型的潜藏定域规范不变性。结果表明,模型的可积性,亦即量子 R -矩阵的存在性,与整体规范不变性的结合导致了潜藏定域规范不变性。在规范变换下,该模型的 Hamiltonian 量,本征矢和本征值均受到影响,且 Bethe 方程中出现了规范因子,从而影响模型平衡态热力学行为(有限尺寸修正(finite size correction)的情形)^[4],但单粒子元激发相对于定域规范变换却是不变的。

[1] B. S. Shastri, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1529.

[2] F. C. Pu and B. H. Zhao, *Phys. Lett.*, **A118**(1986), 77.

[3] M. Wadati, E. Olmedilla and Y. Akutsu, *J. Phys. Soc. Japan*, **56**(1987), 1340.

[4] K. Sogo, *Phys. Lett.*, **A104**(1984), 51.

[5] H. Q. Zhou, L. J. Jiang and P. F. Wu, *Phys. Lett.*, **A137**(1989), 244.

- [6] H. Q. Zhou, Z. Xiong and L. J. Jiang, *J. Phys. A*, 21(1988), 3385.
- [7] H. Q. Zhou, L. J. Jiang and P. F. Wu, *J. Math. Phys.*, 31(1990), 1544.
- [8] L. D. Faddeev, *Sov Sci Rev. Math. Phys.*, C1(1981), 107.
- [9] H. B. Thacker, *Rev. Mod. Phys.*, 53(1982), 253.
- [10] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Lecture Notes in physics* (Berlin, Springer, 1982), p. 151.
- [11] H. J. de Vega and E. Lopes, *Phys. Lett.*, B186 (1987), 180.
- [12] H. J. de Vega, *Int. J. Mod. Phys.*, A4(1989), 2371.

HIDDEN LOCAL GAUGE INVARIANCE IN FATEEV-ZAMOLODCHIKOV QUANTUM SPIN CHAIN

GUAN XI-WEN XIONG ZHUANG ZHOU HUAN-QIANG

Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066

(Received 20 January 1992)

ABSTRACT

Hidden local gauge invariance in Fateev-Zamolodchikov quantum spin chain is studied in detail in the framework of the quantum inverse scattering method (QISM). It is found that, similar to the case of spin $1/2$, this model admits an Abelian $U(1)$ gauge transformation and that the energy spectrum is gauge invariant whereas the eigenvectors are explicitly gauge dependent.

PACC: 7510J; 0290; 0590