第42卷 第3期　　物理学报　　Vol. 42, No. 3
1993年3月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Mar., 1993

无序细观结构在体积中与截面上尺度分布函数之间的关系的统计诠释*

白以龙　夏蒙棼[1)]　柯孚久[2)]　郭文海　凌　中
中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室，北京 100080

1992年3月18日收到

研究材料中的无序细观微结构在体积中的尺度分布函数与在截面上观测到的尺度分布函数之间的变换关系，导出了变换方程，并阐明了对它应作统计解释．还给出了分布函数的矩的变换关系，讨论了粗糙面分维数与它和截面的交的分维数之间的关系．

PACC: 0540

一、引　言

在很多材料内部，存在着细观尺度的复杂微结构，如二相粒子、微损伤等．这些微结构通常表现出两个重要特征，一是数量很大，二是无序性(空间位置无序分布，尺度、形状及取向的无序分布等)．近年来已逐渐查明，材料内的各种无序细观微结构往往会强烈影响材料的性质．因此，对它们进行观测和描述有重要意义．

一般而言，详尽无遗地描述微结构的全部细节，不仅难以实现而且亦无此必要．一种比较有效的途径是对微结构的几何形状作一些简化，然后采用统计描述．例如，给出单位体积中微结构按尺度的分布函数，以此作为研究微结构对材料宏观性质影响的基础．

在定量观测方面，主要困难是难以直接观测体积中的分布函数．通常的方法是观测二维截面上微结构的尺度分布，然后设法进行变换，导出微结构在体积中的分布函数．那么，如何实现这种变换呢？

由截面观测导出空间结构，这是立体学的任务．在实际工作中，人们已在应用一系列立体学的定律[1]．但是，这些定律大都只涉及微结构所占总比例数的截面-体积变换．它们虽然亦提供有价值的信息，但不能解决统计分布之间的变换问题．

已经有一些工作探讨尺度分布的变换方法，早期的工作见于 Scheil 的文章[2,3]，近期的发展可参阅 Underwood[4] 和 Seaman 等人[5]的工作．然而，这些方法没有给出变换的显式表达，而且是数值方法．Seaman 等人[5]提出了一个近似变换公式，假定截面上某一尺度范围的统计数只联系于体积中同一尺度范围的统计数，这种近似并未得到证实．

---

* 国家自然科学基金和国家重大基础性研究项目基金资助的课题．
1) 北京大学物理系，北京大学非线性科学中心，北京 100871.
2) 北京航空航天大学应用数理系，北京 100083.

可以说，如何由截面上的观测结果导出体积中微结构按尺度的分布，这仍是一个尚未解决的问题.

本文中，将考察具有任意尺度分布的简单微结构（如小球或平行圆盘），建立联系截面上的观测结果与体积中微结构按尺度分布的积分方程，然后作反演得到解的显式表达.必须强调指出，对于这种变换公式应作统计解释.文中还讨论了变换公式的若干令人感兴趣的性质，并与数值模拟结果作比较.还将变换公式用于考察粗糙断裂面，讨论断裂面分维数与它和截面的交的分维数的关系.

二、变换方程

为了简单，限于考察几何形状简单的微结构，如小球（或平行圆盘），只涉及球心位置和直径，不出现取向分布问题.对于几何形状复杂的微结构，可引入某种球覆盖系统进行讨论.

问题可表达如下：令体积 $V=L^3$ 内小球按直径 c 的分布函数为 $n(c)$（单位体积内，直径在 c—$c+\mathrm{d}c$ 的球数为 $n(c)\mathrm{d}c$）.取 x 轴平行于体积的一条边，顶点分别为 $x=0$，L.取一个与 x 轴垂直并交于 x 处（$0<x<L$）的截面，小球与截面相交时在截面上呈现为圆.令 $m(c')$ 是截面上圆按直径 c' 的分布函数（单位面积中，直径在 c'—$c'+\mathrm{d}c'$ 的圆数为 $m(c')\mathrm{d}c'$）.问题是：$n(c)$ 与 $m(c')$ 有何关系？如何由观测到的 $m(c')$ 导出 $n(c)$？

显然，一个给定的 $n(c)$ 可对应多种具有不同细节的空间位置分布，它们一般将导致截面上的不同分布 $m(c')$.即使是一块给定的均匀材料，不同截面上的分布函数也会呈现差异.因此，体分布函数 $n(c)$ 与截面分布函数 $m(c')$ 之间，原则上不可能建立确定性的变换关系.

本文将在统计意义上导出分布函数 $n(c)$ 与 $m(c')$ 之间的变换关系.讨论基于一种统计模型，主要包含下列假设：

1）略去小球之间位置的相关性，球的空间位置是统计独立的，适用于微结构不太稠密的情形；

2）球心出现在体积内各点的概率密度相同，适用于宏观均匀的情形；

3）单位体积内包含大量小球；

4）小球在总体积中所占比例很小，这可减少小球互相交叉、重叠带来的麻烦.

设想在单位立方体内只有一个直径为 c 的小球，则单位面积截面上出现直径在 c'—$c'+\mathrm{d}c'$ 的圆的概率为

$$K(c',c)\mathrm{d}c'=\frac{c'\mathrm{d}c'}{\sqrt{c^2-c'^2}} \tag{1}$$

由此可得 $n(c)$ 与 $m(c')$ 的关系为

$$m(c')=\int_{c'}^{\infty}K(c',c)n(c)\mathrm{d}c=\int_{c'}^{\infty}\frac{c'}{\sqrt{c^2-c'^2}}n(c)\mathrm{d}c. \tag{2}$$

这是决定 $n(c)$ 与 $m(c')$ 变换关系的积分方程.由(2)式作逆变换便可得到 $n(c)$ 的

显式解.

首先可求得单位体积中，直径大于、等于 c 的球的总数为

$$N(c) \equiv \int_c^\infty n(z)\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi}\int_c^\infty \frac{m(c')\mathrm{d}c'}{\sqrt{c'^2 - c^2}}. \tag{3}$$

由 (3) 式便可导出分布函数 $n(c)$ 的表达式

$$n(c) = -\frac{\mathrm{d}N(c)}{\mathrm{d}c} = -\frac{2}{\pi}\int_c^\infty \frac{c}{\sqrt{c'^2 - c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c'}\left(\frac{m(c')}{c'}\right)\mathrm{d}c'. \tag{4}$$

这便是相应于变换方程 (2) 的逆变换方程，可视为积分方程 (2) 的显式解.

以上基于统计模型导出的变换方程 (2) 与 (4) 必须作统计解释. 这种变换关系对应于每一种直径的球在空间都是均匀分布的情形，由等概率假设，这相应于出现概率最大的分布(最可几分布)，也是统计平均分布. 因此，方程 (2) 与 (4) 描述的是 $n(c)$ 与 $m(c')$ 之间出现概率最大的变换关系，也是统计平均的变换关系. 任何真实的关系均可能呈现对 (2) 式或 (4) 式的涨落.

分布函数 $n(c)$ 与 $m(c')$ 之间变换关系的统计性质提示应当重新明确对这一类问题的提法. 例如，可以问：体分布函数与截面分布函数之间出现概率最大的变换关系是什么？平均而言，变换关系如何？是否存在某种不同的变换关系具有有限的出现概率？某种特定的变换关系的出现概率是否为零？等等. 明确了对问题的概率性提法，有助于指导我们如何进行截面观测、如何进行变换以求得体积中的分布函数，以及如何对所得结果作出恰当的解释.

三、变换方程的若干性质

1. 矩的变换关系

体积中尺度分布函数 $n(c)$ 的 s 级矩定义为

$$\langle c^s \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty c^s n(c)\mathrm{d}c, \tag{5}$$

其中

$$N = \int_0^\infty n(c)\mathrm{d}c \tag{6}$$

是零级矩，即为单位体积中球的总数. 截面上尺度分布函数 $m(c')$ 的 r 级矩定义为

$$\langle c'^r \rangle = \frac{1}{M}\int_0^\infty c'^r m(c')\mathrm{d}c', \tag{7}$$

其中

$$M = \int_0^\infty m(c')\mathrm{d}c' \tag{8}$$

为零级矩，是单位截面积上圆的总数.

利用变换方程，可导出矩的变换关系为

$$M\langle c'^r \rangle = \alpha_r N\langle c^{r+1} \rangle, \tag{9}$$

其中

$$\alpha_r = \int_0^1 \frac{y^{r+1}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

变换方程(9)亦具有统计意义.

当 $r=0$ 时,有 $\alpha_0=1$,(9)式给出

$$M = N\langle c\rangle, \tag{10}$$

$\langle c\rangle$ 为球的平均直径. 在体积 $V=L^3$ 中,总球数为 $N_T=NL^3$; 在截面积 L^2 中,总圆数为 $M_T=ML^2$,因此有

$$M_T/N_T = \langle c\rangle/L. \tag{11}$$

当 $r=1$ 时,有 $\alpha_1=\pi/4$,(9)式给出

$$M\langle c'\rangle = N\left\langle\frac{\pi}{4}c^2\right\rangle. \tag{12}$$

设想我们考察的是分布于体积中的大量平行圆盘(直径为 c),圆盘与截面相交为线段(长度为 c'). (12)式表明,单位截面积上线段总长度与单位体积中圆盘总面积数值相等. 在体积 $V=L^3$ 内,圆盘总面积为 $S_T=L^3N\left\langle\frac{\pi}{4}c^2\right\rangle$; 在截面 L^2 中,线段总长度为 $l_T=L^2M\langle c'\rangle$,有

$$l_T/S_T = L^{2/3}. \tag{13}$$

当 $r=2$ 时,有 $\alpha_2=2/3$,由(9)式得

$$M\left\langle\frac{\pi}{4}c'^2\right\rangle = N\left\langle\frac{\pi}{6}c^3\right\rangle. \tag{14}$$

(14)式表明,球的总体积在空间所占比例等于截面上圆的总面积所占的比例. 在体积 $V=L^3$ 内,球的总体积为 $v_T=L^3N\left\langle\frac{\pi}{6}c^3\right\rangle$; 在截面 L^2 上,圆的总面积为 $A_T=L^2M\left\langle\frac{\pi}{4}c'^2\right\rangle$,有

$$A_T/v_T = L^{2/3}. \tag{15}$$

可以看出,(13)与(15)式符合截面-体积的标度关系,而(11)式则不符合. 这是由于(11)式中的 M_T 与 N_T 不描述几何对象的测度,而(13)与(15)式中所涉及的量均描述相应几何对象的测度.

2. 涨落现象

现用一简单的例子说明对变换方程的涨落现象. 考虑所有的球直径均为 c_0 的情形,由(10)式,有

$$M = Nc_0. \tag{16}$$

下面将说明(16)式给出的是出现概率最大的 M 值和 M 的统计平均值,每次测量均可能出现对(16)式的偏离.

由等概率假设,单位体积中一个直径为 c_0 的球与单位截面积相交的概率为 c_0,不相交的概率为 $1-c_0$. 在统计独立性假设下,当单位体积中有 N 个直径为 c_0 的球时,若有 M

个球与截面相交而其余 $N-M$ 个球不相交，则其概率为

$$P(M)=\frac{N!}{M!(N-M)!}c_0^M(1-c_0)^{N-M}. \tag{17}$$

不难证明，使 $P(M)$ 取极大的 M 值为

$$M_0=Nc_0, \tag{18}$$

而 (17) 式决定的 M 的平均值为

$$\bar{M}=\sum_{M=0}^{N}MP(M)=Nc_0. \tag{19}$$

(18)，(19) 与 (16) 式一致，表明由变换方程给出的 (16) 式代表了概率最大的变换关系和统计平均的变换关系.

由 (17) 式可以求出 M 的标准偏差 σ_M 和相对涨落为

$$\sigma_M\equiv\sqrt{\overline{(M-\bar{M})^2}}=\sqrt{Nc_0(1-c_0)}, \tag{20}$$

$$\sigma_M/\bar{M}=\sqrt{(1-c_0)/Nc_0}. \tag{21}$$

当 $c_0\ll 1$ 时，有 $\sigma_M\cong\sqrt{Nc_0}=\sqrt{M_0}$，$\sigma_M/\bar{M}\cong M_0^{-\frac{1}{2}}$. 还可由 (17) 式求出 M 对 M_0 出现某种给定偏离的概率. 例如 $M=0$ 的出现概率为 $P(0)=(1-c_0)^N$，而 $M=N$ 的出现概率为 $P(N)=c_0^N$.

对截面上圆的数目 M 的统计性质进行了计算机模拟. 在单位立方体中随机地投放 $N=10^5$ 个直径均为 $c_0=0.01$ 的球，统计不同截面上圆的数目 M. 由 (18)—(21) 式，理论值为 $\bar{M}=M_0=10^3$，$\sigma_M/\bar{M}\cong 3.15\%$，$M$ 值应主要分布在最可几值 M_0 附近相对偏离为 3.15% 的范围内. 以下是两组模拟结果. 第一组：对一个给定的随机分布，取 100 个不同的截面，分别统计其 M 值. 结果得到 $\bar{M}=10^3$，$\sigma_M/\bar{M}=2.88\%$，对 $\bar{M}$ 的相对偏离不超过 3.15% 的点占 70%. 第二组：对 10 个不同的随机分布，每一个分布取 10 个截面，分别统计其 M 值. 结果得到 $\bar{M}=10^3$，$\sigma_M/\bar{M}=3.04\%$，对 $\bar{M}$ 的相对偏离不超过 3.15% 的点占 70%. 以上的模拟结果显示了 M 的统计性质，而且定量上与本文的理论结果基本符合.

3. 一类特殊的分布函数

考虑一种特殊的分布函数

$$n(c)=N\frac{2c}{c_0^2}\exp(-c^2/c_0^2), \tag{22}$$

N 为单位体积中总数，c 的平均值为

$$\langle c\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{2}c_0. \tag{23}$$

(22) 式为 Rayleigh 分布的形式，是 Weibull 分布的一种特殊情形.

由 (2) 式，可得到相应截面分布为

$$m(c')=\sqrt{\pi}N\frac{c'}{c_0}\exp(-c'^2/c_0^2). \tag{24}$$

这也是 Rayleigh 分布．因此，Rayleigh 分布是在变换(2)式下保持具有相同函数形式的分布函数．由(22)—(24)式，有

$$m(c)=\langle c\rangle n(c). \tag{25}$$

在文献[5]中，曾提出一个简单的变换公式

$$n(c)=m(c)/c. \tag{26}$$

从本文的结果看，(26)式一般是不成立的，但与(25)式比较可知，当分布函数为 Rayleigh 分布时，变换(26)式在分布的主要区 $c\sim\langle c\rangle$ 近似成立．

四、断裂面的分维数

刻画粗糙断裂面的一个重要参量是它的分维数[6,7]．测量断裂面分维数的一种可能方法是观测二维截面与断裂面相交的几何图形，由这个图形的分维数通过变换估算断裂面的分维数．断裂面是复杂的几何对象，不能直接用本文给出的变换方程．但是，可以引入大量小球将断裂面覆盖，然后将变换方程用于这些覆盖球组成的系统．

令 F 代表三维欧氏空间 R^3 中的断裂面，其 Hausdorff 维数的范围在

$$2\leqslant \dim_H(F)<3. \tag{27}$$

令 P_x 代表垂直于 x 方向并与 x 轴交于 x 处 $(0<x<L)$ 的平面，令 S_x 代表 F 与 P_x 的交：

$$S_x=F\cap P_x. \tag{28}$$

令 $\{B_i\}$ 为 R^3 中 F 的 δ 球覆盖，令 c_i 为 B_i 的直径，有

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,\qquad 0<|B_i|=c_i\leqslant\delta. \tag{29}$$

假定覆盖球按直径的分布函数为 $n_\delta(c)$．

令 P_x 面上圆的集 $\{A_j\}$ 为 $\{B_i\}$ 与 P_x 的交，A_j 的直径为 c_j'．显然，$\{A_j\}$ 为 S_x 的一种 δ 圆覆盖：

$$S_x\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j,\qquad 0<|A_j|=c_j'\leqslant\delta. \tag{30}$$

令

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_\delta^t(F)&=\inf\{\textstyle\sum|B_i|^t:\{B_i\}\text{ 为 }F\text{ 的 }\delta\text{ 球覆盖}\}\\&=\inf\left\{L^3\int_0^\delta n_\delta(c)c^t\mathrm{d}c\right\},\end{aligned} \tag{31}$$

则 F 的 t 测度为

$$\mathscr{B}^t(F)=\lim_{\delta\to0}\mathscr{B}_\delta^t(F)=\lim_{\delta\to0}\inf\left\{L^3\int_0^\delta n_\delta(c)c^t\mathrm{d}c\right\}. \tag{32}$$

对足够小的 t，$\mathscr{B}^t(F)$ 为无穷大．使 $\mathscr{B}^t(F)$ 从 ∞ 跳跃到 0 的 t 值即为 F 的 Hausdorff 维数．

令

$$\mathscr{B}_\delta^r(S_x)=\inf\{\textstyle\sum|b_j|^r:\{b_j\}\text{ 为 }S_x\text{ 的 }\delta\text{ 圆覆盖}\}. \tag{33}$$

由于 $\{A_i\}$ 不一定是符合下确界条件的 S_x 的 δ 圆覆盖，因此，一般有

$$\mathscr{B}_\delta^r(S_x) \leqslant \{\sum|A_i|^r: \{A_i\} \text{ 为 } \{B_i\} \text{ 与 } P_x \text{ 的交}\}$$

$$= L^2\int_0^\delta m(c')c'^r \mathrm{d}c'. \tag{34}$$

S_x 的 r 测度为

$$\mathscr{B}^r(S_x) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{B}_\delta^r(S_x), \tag{35}$$

而 S_x 的 Hausdorff 维数是使 $\mathscr{B}^r(S_x)$ 从∞跳跃到 0 的 r 值.

现假定 $\{B_i\}$ 的分布函数 $n_\delta(c)$ 与 $\{A_i\}$ 的分布函数 $m_\delta(c')$ 之间遵从变换关系(2)式，则有

$$\int_0^\delta m_\delta(c')c'^r \mathrm{d}c' = \alpha_r\int_0^\delta n_\delta(c)c^{r+1}\mathrm{d}c. \tag{36}$$

由(31)—(36)式，得到

$$\mathscr{B}_\delta^{t-1}(S_x) \leqslant \frac{\alpha_{t-1}}{L}\mathscr{B}_\delta^t(F). \tag{37}$$

由(37)式可以看出，当 $t-1=\dim_H(S_x)$，使

$$\mathscr{B}^{t-1}(S_x) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{B}_\delta^{t-1}(S_x) < \infty$$

时，$\mathscr{B}^t(F)$ 可能小于∞，亦可能仍为∞. 这表明 F 的 Haussdorff 维数可能为 t，亦可能大于 t. 由此，得到 F 与 S_x 的维数关系为

$$\dim_H(F) \geqslant \dim_H(S_x) + 1. \tag{38}$$

基于具有统计性质的变换方程(2)导出的维数变换关系(38)式亦具有统计性质，它代表了出现概率最大的维数关系，也是维数的统计平均关系，任何真实的维数关系均可能出现对(38)式的偏离.

在维数变换关系(38)式中出现不等号，从证明的数学过程看，是由于无法确认截面上交集的下确界条件. 但是，从根本上讲，不等号的出现是源于分形断裂面的复杂性以及它与在截面上的交集之间的非确定性关系. 当 F 的维数给定之后，S_x 的维数有多种可能值，不仅有满足(38)式中等号及大于号的值，也可能有符合相反不等号的值，各有不同的概率. (38)式是给出绝大多数情况下呈现的维数关系.

以上，将本文导出的变换方程用于分形几何对象的覆盖球系统. 由于分形几何对象的复杂性，对 δ 球覆盖集在 $\delta\to 0$ 条件下采用统计描述似乎是可行的. 但是，还不能确认本文的几条假设全部适用于这种系统. 以下，将引用分形数学中的几条定理[8]来分析这个问题，可以看到，所得结果与(38)式是一致的.

定理： 令 X, Y 为 R^n 中的 Borel 集，则对几乎所有的 $z\in R^n$，有

$$\dim_H(X\cap(Y+z)) \leqslant \max\{0, \dim_H(X\times Y) - n\}, \tag{39}$$

其中 $(X\times Y)$ 为 X 与 Y 的乘积集，$(Y+z)$ 为平移集.

定理： 令 $X\subset R^n$，$Y\subset R^m$，且 $\dim_H(Y) = \overline{\dim}_B(Y)$，则有

$$\dim_H(X\times Y) = \dim_H(X) + \dim_H(Y), \tag{40}$$

其中 $\overline{\dim}_B(Y)$ 为 Y 的上盒维数.

对断裂面 $F \subset R^3$，有 $2 \leqslant \dim_H(F) < 3$，而截面 P_x 为二维平面，有 $\dim_H(P_x) = \overline{\dim}_B(P_x) = 2$. 令 P_0 为与 x 轴交于 $x = 0$ 处的平面，有 $P_x = P_0 + x$，而 S_x 为 F 与 P_x 的交. 由定理(39)式，有

$$\dim_H(S_x) = \dim_H(F \cap (P_0 + x)) \leqslant \max\{0, \dim_H(F \times P_0) - 3\}. \tag{41}$$

对几乎一切 x 成立. 由定理(40)式有

$$\dim_H(F \times P_0) = \dim_H(F) + \dim_H(P_0) = \dim_H(F) + 2. \tag{42}$$

由(41)与(42)式，便得到

$$\dim_H(S_x) \leqslant \dim_H(F) - 1, \tag{43}$$

对几乎一切 x 成立. 可以看到(43)与(38)式的表达形式和统计解释均是一致的. 这个结果对测量和分析粗糙断裂面的分维数是有重要意义的.

五、结 论

固体材料内部细观尺度的无序微结构对材料性质有重要影响，对这类微结构宜采用统计描述. 在观测微结构时面临的一个关键问题，是如何由截面上的观测结果导出体积中微结构的统计分布. 本文指出，无序微结构在截面上和在体积中的统计分布函数之间，原则上不存在确定性的关系，只可能建立概率性的联系.

本文基于一个一般性的统计模型，导出了无序细观微结构在截面上和在体积中按尺度的统计分布函数之间的变换方程. 这种变换方程具有统计意义，代表了两种分布函数之间出现概率最大的变换关系，也是二者之间统计平均的变换关系. 在实际问题中，将出现对这种统计平均关系的涨落，本文对涨落现象给出了估算公式. 还导出了截面上与体积中分布函数的矩的变换关系，并指出，只当这些矩描述相应几何对象的测度时，其变换关系才符合面积-体积变换的标度关系 $L^{2/3}$.

对于粗糙断裂面及它与截面的交这一类复杂的几何对象，本文的变换方程可应用到它们的覆盖球系统. 由此导出了关于分维数的一个变换关系. 这是一个具有统计意义的、包含不等号的关系式.

本文的结果，有助于指导我们对材料内部的无序微结构进行观测和分析. 我们的实验观测结果、实现变换的程序及其结果，以及有关的数值模拟结果，将另文阐述.

[1] E. E., Underwood, Quantitative Stereology (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970).
[2] Z. Schiel, *Anarg. Allg. Cham.*, **201**(1931), 259.
[3] Z. Schiel, *Metallk.*, **27**(1935), 199.
[4] E. E., Underwood 著,"体视学和定量金相学",孙慧林,马继余译,(机械工业出版社,北京,1980),1—38页.
[5] L. Seaman *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **49**(1978), 5221.
[6] B. B., Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature (Freeman, New York, 1982).
[7] 卢春生、白以龙,力学进展,**20**(1990),468.
[8] M. F. Barnsley *et al.*, The Science of Fractal Images (Springer-Verlag World Publishing Corp. 1988).

STATISTICAL INTERPRETATION ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE VOLUMETRIC AND SECTIONAL SIZE DISTRIBUTIONS OF DISORDERED MESO-STRUCTURES

BAI YI-LONG　XIA MENG-FEN[1]　KE FU-JIU[2]　GUO WEN-HAI　LING ZHONG

Laboratory for Non-Linear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080

(Received 18 March 1992)

ABSTRACT

In this paper the transformation between the volumetric and sectional size distribution of the disordered meso-structures is studied. An integral equation governing this transformation for the cases of spheres or parallel penny shaped cracks is derived. The statistical interpretation on the transformation equation is emphasized. Furthermore, the transformations for moments of distribution function and for fractal dimension are discussed.

PACC:0540

1) Department of Physics, Center of Nonlinear Sciences, Peking University, Beijing 100871.

2) Department of Applied Mathematics and Physics, Peking University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083.