

光学元件阵列的衍射理论分析

朱传贵 薛鸣球 刘德森 高应俊

中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068

1992 年 1 月 9 日收到

从菲涅耳衍射理论出发, 分析了光学元件阵列的衍射成像性质, 求得了其点扩散函数。进一步分析了光学元件阵列的综合成像性质, 得到了阵列能够成综合像的条件。由相同光学单元组成的阵列在按一定的规律排列时可以成综合像, 但一般只在一定固定的共轭面上有理想的综合像, 而并非对于任意位置的物均有相应的综合像。

PACC: 4210; 4230

一、引 言

光学元件阵列是许多成像单元的径向组合。人们对这类光学器件的研究和利用已有很长的历史^[1]。如在高速网格摄影中用到了二维的猫眼透镜阵列^[2]。昆虫的复眼是由大量的小眼组成的, 它是自然界利用光学元件阵列的一个典型例子。作为一种完全不同于人眼的生物光学系统, 复眼受到了应有的重视并被许多学者研究过^[3,4]。70 年代末出现的复印机排透镜 (SLA)^[5] 是由大量自聚焦棒透镜排列而成的, 它利用了光学元件阵列的综合成像性质^[6]。由于这种新型光学器件成功地解决了短共轭距离和大视场的矛盾, 且在整个像面上像质量均匀一致, 因而已被成功地用在复印机、电传机等现代办公设备中, 以代替普通的透镜成像系统, 大大减小了这些仪器的体积^[7]。

由于光学元件阵列具有许多新颖而有用的性质, 关于一般光学元件阵列综合成像性质的研究自 80 年代初以来十分活跃^[8-10]。周国生等人用衍射理论分析了光学元件阵列的综合成像性质, 得到了与文献[9]相同的结论^[11,12]。本文从菲涅耳衍射理论出发, 对一般光学元件阵列的衍射成像性质进行了分析并求得了其点扩散函数。在此基础上进一步分析了光学元件阵列的综合成像性质, 得到了一些新的结论。

二、光学元件阵列的衍射性质与点扩散函数

当光束通过一个由 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 表示的光学系统时, 经典的菲涅耳衍射公式不能直接应用。Collins^[13] 导出一个普遍适用于这种情况的衍射积分。范滇元就衍射积分在光学系统中的应用作了较深入的讨论^[14,15]。如图 1 所示, 光场 $F(\xi, \eta)$ 经过光学系统后, 在观察面 (xy) 上的衍射场 $\phi(x, y)$ 为

$$\phi(x, y) = \frac{1}{i\lambda b} \exp(ikl) \iint F(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{2b} [a(\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi x + \eta y) + d(x^2 + y^2)] \right\} d\xi d\eta, \quad (1)$$

其中 l 为沿系统中心轴的光程。

设光学元件阵列的所有单元具有相同的光线传输矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 且各光学单元是互相光学隔离的, 输入面中心位于同一平面上, 但位置和方向是任意的, 如图 2 所示。其中各符号的意义见表 1。

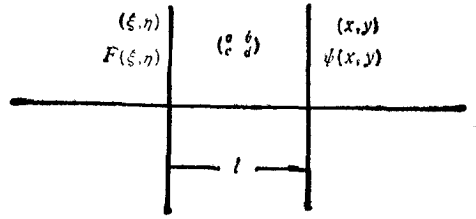


图1 用 $abcd$ 表征的光学系统

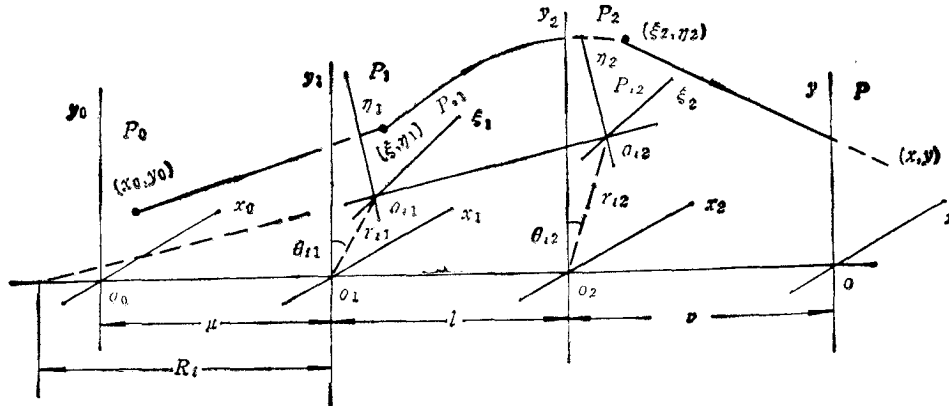


图2 光学元件阵列结构示意图

表1 图2中各符号的意义

O_i, O_{i1}, O_{i2}	分别为系统光轴和阵列中第 i 个光学元件的光轴
P_1, P_2	为相距 l 的系统输入和输出平面
P_{i1}, P_{i2}	为第 i 个光学元件的输入和输出平面
x_{i1}, y_{i1} 和 x_{i2}, y_{i2}	分别为阵列中第 i 个光学元件的光轴与系统输入和输出平面交点
x_1, y_1 和 x_2, y_2	分别为系统输入和输出平面上考察点的坐标
ξ_1, η_1 和 ξ_2, η_2	分别为上述考察点在第 i 个光学元件的本地坐标系中的坐标
μ, ν	分别为物面和观察面到系统输入和输出平面的距离
R_i	为第 i 个光学元件的光轴与系统光轴的交点到输入平面的距离

从物面上一点 (x_0, y_0) 到 (ξ_1, η_1) 和从 (ξ_2, η_2) 到 (x, y) 的光程分别为

$$l_1 = \mu + \frac{1}{2\mu} [(x_0 - x_{i1} - \xi_1)^2 - 2\mu x_{i1}\xi_1/R_i + (y_0 - y_{i1} - \eta_1)^2 - 2\mu y_{i1}\eta_1/R_i], \quad (2)$$

$$l_2 = v + \frac{1}{2v} [(x - x_{i2} - \xi_2)^2 + 2vx_{i2}\xi_2/(R_i + l) + (y - y_{i2} - \eta_2)^2 + 2vy_{i2}\eta_2/(R_i + l)]. \quad (3)$$

设物面上的场为 $U(x_0, y_0)$, 则在系统第 i 个光学单元输入平面 (x_1, y_1) 上的场分布为

$$U_i(x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda\mu} \iint U(x_0, y_0) \exp(ikl_1) dx_0 dy_0. \quad (4)$$

各光学单元是互相光学隔离的, 所以入射到光学元件阵列输入平面上的场, 分别独立地通过各单元, 再传播到阵列的输出平面上。这样, 在第 i 个光学单元输出面上的场可用 $abcd$ 矩阵形式的菲涅耳积分公式表示

$$U_i(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikl)}{i\lambda b} \iint U_i(x_1, y_1) \exp \left\{ \frac{ik}{2b} [a(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + d(\xi_2^2 + \eta_2^2)] \right\} d\xi_1 d\eta_1. \quad (5)$$

在观察面 (x, y) 上的场分布为

$$U_i(x, y) = \frac{1}{i\lambda v} \iint U_i(x_2, y_2) \exp(ikl_2) d\xi_2 d\eta_2. \quad (6)$$

将(2)–(5)式代入(6)式, 得经第 i 个光学单元后在观察面 (x, y) 上的衍射积分表达式为

$$\begin{aligned} U_i(x, y) = & \frac{\exp[ik(\mu + l + v)]}{(i\lambda)^3 \mu \nu b} \iiint \iint U(x_0, y_0) \exp \left\{ \frac{ik}{2\mu} [(x_0 - x_{i1} - \xi_1)^2 - 2\mu x_{i1}\xi_1/R_i] + (y_0 - y_{i1} - \eta_1)^2 - 2\mu y_{i1}\eta_1/R_i \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2b} [a(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + d(\xi_2^2 + \eta_2^2)] \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2v} [(x - x_{i2} - \xi_2)^2 + 2vx_{i2}\xi_2/(R_i + l) + (y - y_{i2} - \eta_2)^2 + 2vy_{i2}\eta_2/(R_i + l)] \right\} \cdot dx_0 dy_0 d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2. \end{aligned} \quad (7)$$

因此点扩散函数为

$$\begin{aligned} h_i(x_0, y_0; x, y) = & \frac{1}{(i\lambda)^3 \mu \nu b} \iiint \exp \left\{ \frac{ik}{2\mu} [(x_0 - x_{i1} - \xi_1)^2 - 2\mu x_{i1}\xi_1/R_i] + (y_0 - y_{i1} - \eta_1)^2 - 2\mu y_{i1}\eta_1/R_i \right\} \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2b} [a(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + d(\xi_2^2 + \eta_2^2)] \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{ik}{2v} [(x - x_{i2} - \xi_2)^2 + 2vx_{i2}\xi_2/(R_i + l) + (y - y_{i2} - \eta_2)^2 + 2vy_{i2}\eta_2/(R_i + l)] \right\} \\ & \cdot d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

在阵列输出平面上的光场, 是经过各单元到达输出面上的场的叠加。因此经过整个

光学阵列的光波在观察面上引起的场分布和点扩散函数分别为

$$U(x, y) = \sum U_i(x, y), \quad (9)$$

$$h(x_0, y_0; x, y) = \sum h_i(x_0, y_0; x, y). \quad (10)$$

三、光学元件阵列的衍射成像性质

当光学单元的线度比 λv 大很多时, (10) 式对 ξ_1, η_1 和 ξ_2, η_2 的积分可以扩展到无穷大. 积分的结果为

$$\begin{aligned} h(x_0, y_0; x, y) = & \sum \frac{1}{i\lambda B} \exp\{ik[(xx_{i2} + yy_{i2})/(R_i + l) - (x_0x_{i1} + y_0y_{i1})/R_i]\} \\ & \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2B} [A[(x_0 - g_1x_{i1})^2 + (y_0 - g_1y_{i1})^2] \right. \\ & - 2[(x_0 - g_1x_{i1})(x - g_2x_{i2}) + (y_0 - g_1y_{i1})(y - g_2y_{i2})] \\ & \left. + D[(x - g_2x_{i2})^2 + (y - g_2y_{i2})^2]]\right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $g_1 = 1 - \mu/R_i$, $g_2 = 1 + v/(R_i + l)$; $B = a\mu + b + v(cu + d)$, $A = a + cv$, $D = cu + d$. 为了求得光学传递函数, 必须把 h 化成空间不变形式. 为此对 h 的指数项作配方, 得

$$\begin{aligned} h(x_0, y_0; x, y) = & \sum \frac{1}{i\lambda B} \exp\{ik[(xx_{i2} + yy_{i2})/(R_i + l) - (x_0x_{i1} + y_0y_{i1})/R_i]\} \\ & \cdot \exp\left\{\frac{ikC}{2A} [(x - g_2x_{i2})^2 + (y - g_2y_{i2})^2]\right\} \\ & \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2AB} [A(x_0 - g_1x_{i1}) - (x - g_2x_{i2})]^2 \right. \\ & \left. + [A(y_0 - g_1y_{i1}) - (y - g_2y_{i2})]^2]\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $C = c$. 上式表明, 一般说来 h 并不是空间不变的. 但当考察的是光强分布时, 前两个指数项可以忽略, h 就可以通过坐标变换化为空间不变的形式

$$\begin{aligned} h(x - Ax_0, y - Ay_0) = & \sum \frac{1}{i\lambda B} \exp\left\{\frac{ik}{2AB} [[(x - Ax_0) - (g_2x_{i2} - Ag_1x_{i1})]^2 \right. \\ & \left. + [(y - Ay_0) - (g_2y_{i2} - Ag_1y_{i1})]^2]\right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

当 $B = 0$ 时, 上式成为

$$\begin{aligned} h(x - Ax_0, y - Ay_0) = & \sum \delta[(x - Ax_0) - (g_2x_{i2} - Ag_1x_{i1}), \\ & (y - Ay_0) - (g_2y_{i2} - Ag_1y_{i1})]. \end{aligned} \quad (14)$$

从上式可以看出, 满足单元成像条件, 即 $B = 0$ 时, 对于物面上的一个脉冲输入在观察面此时也即像面上的场强是一系列的尖锐脉冲. 脉冲位置在

$$x = Ax_0 - (g_2x_{i2} - Ag_1x_{i1}), \quad i = 1 \rightarrow N, \quad (15a)$$

$$y = Ay_0 - (g_2y_{i2} - Ag_1y_{i1}). \quad (15b)$$

上述结果也表明, 对于一个物分布, 经过由 N 个相同光学单元组成的光学阵列后, 一般将得到 N 个放大率一样, 但位置不同的分立像. 且各分立像与物有几何相似关系.

四、光学元件阵列的综合成像

由于 (x, y) 与各光学单元的位置有关, 故一般情况下只有各光学单元的离散像而没有综合像. 只有当

$$x_{i2}/x_{i1} = Ag_1/g_2, \quad i = 1 \rightarrow N, \quad (16a)$$

$$y_{i2}/y_{i1} = Ag_1/g_2, \quad (16b)$$

同时被满足时, 各单元像的位置只决定于物的位置而与各光学单元所在位置无关. 物经各个单元所成的像, 都重叠或称综合到一起, 光学阵列才能成综合像. 写成极坐标形式为

$$r_{i2} \cos \theta_{i2}/r_{i1} \cos \theta_{i1} = Ag_1/g_2, \quad i = 1 \rightarrow N, \quad (17a)$$

$$r_{i2} \sin \theta_{i2}/r_{i1} \sin \theta_{i1} = Ag_1/g_2. \quad (17b)$$

以上两式若要对任意光学单元均成立, 必然有

$$\theta_{i1} = \theta_{i2}, \quad i = 1 \rightarrow N \quad (18a)$$

$$r_{i2}/r_{i1} = Ag_1/g_2. \quad (18b)$$

设单元 i 的光轴与系统光轴的交点距阵列输入面的距离为 R_i , 由于

$$r_{i2}/r_{i1} = (R_i + l)/R_i, \quad (19)$$

将上式代入(18b)式并注意到 A, g_1, g_2 的含义及 $B = 0$ 的条件, 可得光学元件阵列综合成像的条件为

$$R = R_1 = R_2 = \cdots = R_i = \cdots = R_N. \quad (20)$$

综合成像的物像关系为

$$v = -\frac{a\mu + b}{cu + d}, \quad (21a)$$

$$v = \frac{(1-a)R + (l-b)}{cR - (1-d)}. \quad (21b)$$

以上两式必须同时满足, 阵列中各光学单元的像才能重叠在一起而成一个综合像. 这与光线光学的分析结果相一致^[16].

以上结果总述如下:

1. (20)式表明, 综合成像时各单元的光轴应交于一点.
2. 综合像的位置和放大率与单元像相同.

$$\beta = a + cv = \frac{1-a+(R+l)c}{cR-(1-d)}. \quad (22)$$

β 可以不为 1, 其大小决定于光学单元的光线传输矩阵和阵列的排列. 但当 $R = \infty$ 时, β 恒为 1. 此时, $v = (1-a)/c = l_H'$, 即综合像只发生在一对主平面上.

3. 对于一般的光学元件阵列, 仅在一对固定的共轭面上有综合像, 而非对于任意位置的物均有相应的综合像. 能够成综合像的一对共轭面的位置是由阵列的排列情况决定的.

五、总 结

借助光学系统衍射积分的光线传输矩阵元表示, 求得了描述光学元件阵列的近轴菲涅耳衍射性质的点扩散函数。当考察点扩散函数的目的是为了求像面上的强度分布时, 阵列的点扩散函数具有空间不变形式, 因而其光学传递函数也可方便地求出。

一般情况下, 在像面上阵列的点扩散函数反映的是一系列分离的光脉冲, 对应的是各单元成分离像的情况。只有当阵列的排列满足各光学单元的光轴交于系统光轴的同一点时, 在一对固定的共轭面上, 各个单元像才可以叠合在一起形成一个综合像。

光学单元的线度使得理想情况下的 δ 函数变为爱里斑, 爱里斑的大小由光学单元的出瞳直径决定。出瞳减小使得爱里斑变得更大, 成像的分辨率下降, 但不改变像的位置和大小。因而本文推出的综合成像条件, 并不受单元线度大小的限制。

- [1] 大越孝敬, 三维成像技术(北京, 机械工业出版社, 1976), 18—32 页。
- [2] 李景镇主编, 光学手册, (西安, 陕西科学技术出版社, 1986), 988—991 页。
- [3] 吴卫国等, 昆虫学报, 25(1982), 280。
- [4] 周国生等, 生物物理学报 1(1985), 135。
- [5] M. Kawazu and M. Takami, *Appl. Opt.*, 9(1980), 1105。
- [7] J.D. Rees and W. Lama, *Appl. Opt.*, 19 (1980), 1065。
- [8] J.D. Rees, *Proc. SPIE*, 935 (1988), 27。
- [9] 王绍民, 杭州大学学报, 10(1983), 476。
- [10] 宋如华等, 光学学报, 10(1990), 350。
- [11] 周国生、王绍民, 物理学报, 33(1984), 612。
- [12] 周国生等, 光学学报, 8(1988), 250。
- [13] S.A. Collins, *J. Opt. Soc. Amer.*, 60 (1970), 1168。
- [14] 范滇元, 光学学报, 1(1981), 395。
- [15] 范滇元, 激光, 7(1980), 26。
- [16] 朱传贵, 博士论文, (1992), 63 页。

DIFFRACTION THEORY ANALYSIS OF THE OPTICAL ELEMENT ARRAYS

ZHU CHUAN-GUI XUE MING-QIU LIU DE-SEN GAO YING-JUN

Xi'an Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Xi'an 710068

(Received 9 January 1992)

ABSTRACT

In the present paper, starting from the Fresnel diffraction theory, we analyzed the diffraction image properties of the optical element arrays(OEA) and obtained the point spread function. We also examined the composite imaging properties of the OEA, obtained the conditions under which an OEA can form composite images.

PACC: 4210; 4230