

等离子体拍频波加速器中三波相互作用的时间发展

余 玮 徐至展 马锦秀 陈荣清

中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800

1992 年 4 月 1 日收到

计算了等离子体拍频波加速器中双频抽运光与 Langmuir 波的相互作用及其时间发展。指出 Langmuir 波由生成到饱和的过程, 与三波位相由匹配到失配密切相关。三波位相差作为描写三波耦合程度的量对于双频激光激发 Langmuir 波至关重要。

PACC: 5240D; 5260; 4265K

激光-等离子体相互作用的两个最新研究领域; 等离子体粒子加速器^[1]与光子加速器,^[2]都涉及到均匀等离子体中的 Langmuir 波, 前者利用 Langmuir 波的电场梯度加速电子, 后者利用 Langmuir 波的电子密度梯度造成光脉冲的频率上移。就生成 Langmuir 波的方式而言, 有等离子体尾波场加速器 (plasma wake-field accelerator) 和等离子体拍频波加速器 (plasma beat-wave accelerator) 之分。本文将对后一种方式进行研究, 它是利用双频激光在等离子体中的非线性耦合生成相速度接近光速的大振幅 Langmuir 波^[3-12]。本文首先针对拍频波加速器中的双频抽运光及 Langmuir 波导出一组完整的方程, 由此计算了三波振幅变化以及不同条件下三波位相差的时间发展。结果表明: Langmuir 波由生成到饱和的过程, 正是三波位相由匹配到失配的过程。三波位相差 δ 作为描写三波耦合程度的量在双频激光激发 Langmuir 波的过程中是至关重要的。

相对论性等离子体中的电磁波可以由下列基本方程组描述^[13]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{p} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - 3T_e \nabla n / n - \nu \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_0 - n), \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{u}. \quad (5)$$

其中 $\mathbf{p} = m\mathbf{u}\gamma$ 为电子动量, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, $\mathbf{u}$ 为电子振荡速度, n 和 n_0 为电子密度和等离子体密度, e, m, T_e 为电子电荷、质量和等离子体温度, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 为电场和磁

场强度, ν 为阻尼率. 在拍频波加速器中, 双频激光与 Langmuir 波的电场强度可分别表示为^[7]

$$E_{1,2}(x, t) = \frac{1}{2} \{E_{1,2}(t) \exp[-i(\omega_{1,2}t - k_{1,2}x)] + \text{c.c.}\}, \quad (6)$$

$$E_3(x, t) = \frac{1}{2} \{E_3(t) \exp[-i(\omega_3t - k_3x)] + \text{c.c.}\}. \quad (7)$$

$E_j(t)$ 与频率为 $\omega_j (j = 1, 2, 3)$ 的振荡相比为缓变量. 三个波的频率与波数满足匹配条件:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 - k_2 = k_3.$$

等离子体加速器要求产生相速度接近光速的 Langmuir 波. 由匹配条件可知, 当 $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_3$ 时, Langmuir 波的相速度

$$v_{p3} = (\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2) \simeq d\omega/dk,$$

而 $d\omega/dk$ 正是光的群速度. 将(6), (7)式代入(1)–(5)式得到三组方程. 对于频率为 ω_1 的光波

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_1\right) p_1 = -eE_1 - \frac{1}{2} i u_3 k_2 p_1 + \frac{1}{2} e u_3 B_2/c - \nu_{e1} p_1, \quad (8)$$

$$-i c k_1 B_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_1\right) E_1 - 4\pi e n_0 u_1 - 2\pi e n_3 u_2, \quad (9)$$

$$-i c k_1 E_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_1\right) B_1. \quad (10)$$

对于频率为 ω_2 的光波

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_2\right) p_2 = -eE_2 - \frac{1}{2} i u_3^* k_1 p_1 + \frac{1}{2} e u_3^* B_1/c - \nu_{e1} p_2, \quad (11)$$

$$-i c k_2 B_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_2\right) E_2 - 4\pi e n_0 u_2 - 2\pi e n_3^* u_1, \quad (12)$$

$$-i c k_2 E_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_2\right) B_2. \quad (13)$$

对于频率为 ω_3 的 Langmuir 波

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_3\right) p_3 = -eE_3 - \frac{1}{2} e(u_1 B_1^* + u_2^* B_1)/c - 3T_e i k_3 n_3/n_0 - \nu_3 p_3, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_3\right) n_3 + i k_3 n_0 u_3 = 0, \quad (15)$$

$$i k_3 E_3 = -4\pi e n_3, \quad (16)$$

其中 $n_3 = n - n_0$ 是由 Langmuir 波所造成的电子密度扰动. 当相速度很大时, 朗道阻尼对 Langmuir 波的影响可以忽略, 故三个波所受阻尼主要来源于电子-离子碰撞, $\nu = \nu_{ei}$. 在阻尼很弱的前提下, 由(8), (10), (11), (13)式可以解出

$$p_{1,2} = m\gamma u_{1,2} - e B_{1,2}/i c k_{1,2}. \quad (17)$$

以此代入(8)–(16)式得到

$$(c^2 k_1^2 - \omega_1^2 - 2i\omega_1 \partial/\partial t - i\nu_{ei}\omega_1 + \omega_{pe}^2/\gamma)\gamma u_1 = -\omega_{pe}^2 u_2 u_3 / 2\nu_{p3}, \quad (18)$$

$$(c^2 k_2^2 - \omega_2^2 - 2i\omega_2 \partial/\partial t - i\nu_{ei}\omega_2 + \omega_{pe}^2/\gamma)\gamma u_2 = -\omega_{pe}^2 u_1 u_3^* / 2\nu_{p3}, \quad (19)$$

$$\left(1 + \frac{i}{\omega_3} \partial/\partial t + i\nu_3/\omega_3\right)\gamma u_3 = (3\nu_e^2/\nu_{p3}^2 + \sigma^2)u_3 + \gamma u_1 u_2^* / 2\nu_{p3}. \quad (20)$$

其中 $\sigma = \omega_{pe}/\omega_3 = \omega_{pe}/(\omega_1 - \omega_2)$ 标志着激光拍频与等离子体频率 ω_{pe} 间的匹配程度,共振激发大振幅 Langmuir 波要求 $\sigma \approx 1$. 将以上方程中复振幅 $u_j(t)$ 写成^[7]

$$u_j(t) = |u_j(t)| \exp[i\phi_j(t)] \quad (j = 1, 2, 3)$$

的形式,其中的 $|u_j(t)|$ 和 $\phi_j(t)$ 均为缓变量,令

$$U_j = \gamma |u_j(t)|/c, \quad V_p = \nu_{p3}/c, \quad V_e = \nu_e/c, \quad \tau = \omega_1 t,$$

$$\beta = \omega_2/\omega_1, \quad \delta(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) - \phi_3(t),$$

方程(18)–(20)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_1 = -(\nu_{ei}/2\omega_1)U_1 - \sigma^2(1 - \beta)^2 U_3 U_2 \sin \delta / 4\gamma^2 V_p, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_2 = -(\nu_{ei}/2\omega_1)U_2 + \sigma^2(1 - \beta)^2 U_3 U_1 \sin \delta / 4\gamma^2 \beta V_p, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_3 = -(\nu_3/\omega_1)U_3 + (1 - \beta)U_1 U_2 \sin \delta / 2\gamma V_p, \quad (23)$$

$$\cos \delta = 2U_3 V_p (\gamma - \sigma^2 - 3V_e^2/V_p^2)/U_1 U_2, \quad (24)$$

$$V_p^{-1} = \left[\left((1 - \beta)^{-2} - \frac{\sigma^2}{\gamma} (1 + U_3 U_2 \cos \delta / 2\gamma U_1 V_p) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - \left[\beta^2 (1 - \beta)^{-2} - \frac{\sigma^2}{\gamma} (1 + U_1 U_3 \cos \delta / 2\gamma U_2 V_p) \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (25)$$

这样,得到了一组完整的方程,由此可全面地了解等离子体中三波相互作用的时间发展过程.

在 $t = 0$ 时,等离子体背景 noise 中满足 $\delta(0) = \pi/2$ 的振荡模迅速发展为 Langmuir 波. 此时等离子体中的三个波处于 phase locking 状态^[3]. 由于 (21)–(23) 式中的 $\sin \delta = 1$, Langmuir 波可以最大限度地从抽运光获取能量. 随着 Langmuir 波的发展,三波位相差 δ 开始偏离 $\pi/2$, 由(24)式可知,当频率匹配系数 $\sigma < \sigma_a$

$$\sigma_a = (\gamma(0) - 3V_e^2/V_p^2)^{\frac{1}{2}}$$

时, δ 向下发展: 当 $\sigma > \sigma_a$ 时, δ 向上发展. 图 1 中的虚线显示 $\beta = 0.95, \nu_e = 0.01c$, $|u_1(0)| = |u_2(0)| = 0.1c, \sigma = 0.98$ (a), 1.06(b), 以及 1.02(c) 时三波位相差 δ 时间发展的三种不同情况: 在图 1(a)中 δ 由 $\pi/2$ 单调上升; 在图 1(b)中 δ 由 $\pi/2$ 单调下降; 而在图 1(c)中 δ 先由 $\pi/2$ 上升到某一极值点然后下降. 在所有这三种情况中, Langmuir 波的振幅都将随时间增长直至达到饱和, 如图 1 中实线所示. 与此同时, 双频抽运光的振幅也经历着时间变化. 根据著名的 Manley-Rowe 关系

$$[W_1(0) - W_1]/\omega_1 = [W_2 - W_2(0)]/\omega_2 = W_3/\omega_3,$$

可以得到

$$|u_1(0)|^2 - |u_1|^2 = \beta[|u_2|^2 - |u_2(0)|^2] = (\sigma^2/\gamma)(1 + \sigma^2/\gamma)(1 - \beta)|u_3|^2/2. \quad (26)$$

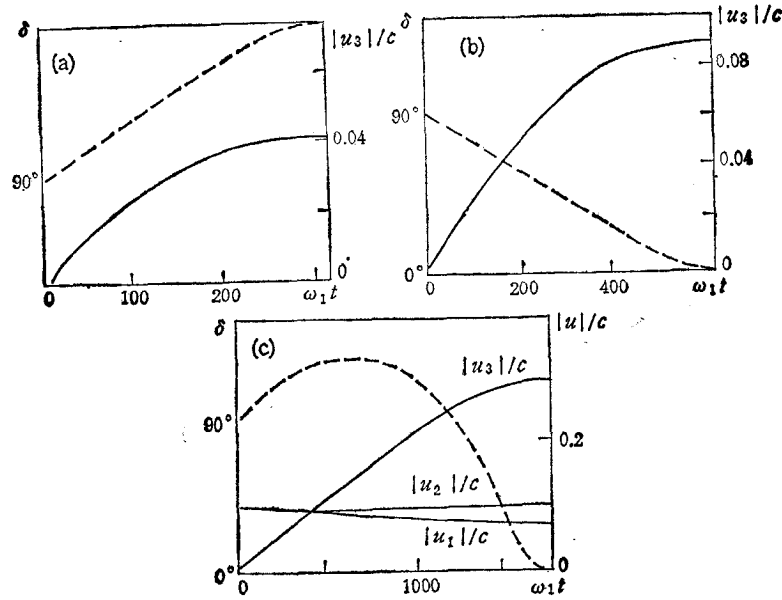


图 1 $\beta = 0.95, \nu_e = 0.01c, |u_1(0)| = |u_2(0)| = 0.1c, \theta = 0.98(a), 1.06(b)$ 以及 $1.02(c)$ 时 Langmuir 波振幅(—)及三波位相差(---)的时间发展
图 1(c) 标明了抽运光振幅的时间发展。

图 1(c) 显示 $\sigma = 1.02$ 时三波振幅的时间变化, 值得注意的是, 在频率较大的抽运光振幅随时间递减的同时, 频率较小的抽运光振幅反而有所增强。这种情况与均匀等离子体中的受激 Raman 散射相似。在受激 Raman 散射中, 抽运光的衰减导致了 Langmuir 波与频率较低的散射光波的增长。尽管由于 $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_3$ 抽运光强的时间变化并不显著, 但在实际应用中适当加强高频抽运光还是有益的。当 Langmuir 波达到饱和时, $\partial U_3 / \partial \tau = 0$, 由(23)式得到

$$\sin \delta = 2(\nu_3 / \omega_3)(\gamma U_3 V_p / U_1 U_2). \quad (27)$$

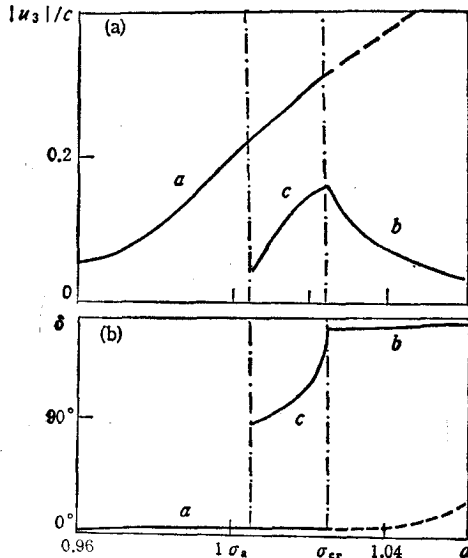


图 2 $\beta = 0.95, \nu_e = 0.01c, |u_1(0)| = |u_2(0)| = 0.1c$ 时, Langmuir 波饱和振幅 (a) 及饱和时的三波位相差 (b) 对于频率匹配系数 σ 的依赖关系

图 2(a) 显示了 Langmuir 波饱和振幅对于频率匹配系数 σ 的依赖关系, 其中 $\beta = 0.95, \nu_e = 0.01c, |u_1(0)| = |u_2(0)| = 0.1c, \nu / \omega_3 = 0.001$ 。尽管我们的推导并未引入拉格朗日坐标, 图 2(a) 中曲线 a, b 所描述的饱和振幅的两个解与文献[7,10]一致。在 $\sigma > \sigma_{cr}$ 的区间, 饱和振幅的频率响应呈现双稳特征。文献[10]专门研究了这一现象, 指出, 通过改变等离子体密度有可能达到曲线 a 虚线部分所示的饱和振幅。然而, 对于当前所考虑的拍频波加速器, 等离子体密度不变、从背景 noise 发展起来的 Langmuir 波只能达到曲线 b 所示的饱和振幅。图 2(b) 中的曲线

a, b 显示了 Langmuir 波饱和时三波位相差 δ 对于 σ 的依赖关系。在阻尼很弱的条件下, δ 趋于 0 或 π 。在这两种情况下, (21)–(23) 式耦合项中的 $\sin \delta$ 都趋于零, 这表明三波位相失配、三波间的耦合已不复存在, 而抽运光不再提供能量正是导致 Langmuir 波饱和的原因。由此可见, Langmuir 波由生成到饱和的过程。正是三波位相由匹配到失配的过程。三波位相差 δ 作为描写三波耦合程度的量在整个过程中是至关重要的。在图 2 的三个区间; (I) $\sigma < \sigma_a$, (II) $\sigma > \sigma_{cr}$ 以及 (III) $\sigma_a < \sigma < \sigma_{cr}$, 三波位相差 δ 分别具有图 1(a), (b), (c) 所示的特征。其中在区间 III, δ 先升后降, 对激发大振幅 Langmuir 波最为有利。在 δ 的极值点, $\partial \delta / \partial \tau = 0$, 由 (24) 式可知

$$[\dot{\gamma} / (\gamma - 3V_e^2 / V_p^2 - \sigma^2) + \dot{U}_3 / U_3 - \dot{U}_1 / U_1 - \dot{U}_2 / U_2] = 0, \quad (28)$$

其中 $\dot{\gamma} = (U_1 \dot{U}_1 + U_2 \dot{U}_2 + U_3 \dot{U}_3) / \gamma$, $\dot{U}_i = \frac{\partial U_i}{\partial \tau}$ 。由上述方程解得区间 III 内 δ 的极大值与相应的 Langmuir 波振幅分别如图 2(b) 和图 2(a) 中的曲线 c 所示。它与曲线 b 在 $\sigma = \sigma_{cr}$ 处相交。

感谢中国等离子体研究会对本工作的支持。

- [1] T. Tajima and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 267.
- [2] S. C. Wilks, J. M. Dawson, W. B. Mori, T. Katsouleas and M. E. Jones, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 2600.
- [3] M. N. Rosenbluth and C. S. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, **29**(1972), 701.
- [4] R. J. Noble, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 460.
- [5] T. Tajima, *Laser and Particle Beam*, **3**(1985), 351.
- [6] C. M. Tang, P. Sprangle and R. N. Sudan, *Phys. Fluids*, **28**(1985), 1974.
- [7] C. T. McKinstrie and D. W. Forslund, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 848.
- [8] G. Miano, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 288.
- [9] C. J. McKinstrie, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 288.
- [10] J. Ma and Z. Xu, *J. Appl. Phys.*, **65**(1989), 3381.
- [11] F. B. Rizzato, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), R2255.
- [12] Y. Kitagawa, T. Matsumoto, T. Minamihata, Sawai, K. Mima, K. Nishihara, H. Azechi, K. A. Tanaka, H. Takabe and S. Nakai, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 48.

DEVELOPMENT OF THREE-WAVE INTERACTIONS IN A PLASMA BEAT-WAVE ACCELERATOR

YU WEI XU ZHI-ZHAN MA JIN-XIU CHEN RUN-QING

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800

(Received 1 April 1992)

ABSTRACT

The interactions of two-frequency laser with Langmuir wave in a plasma beat-wave accelerator are calculated. We show that the development of the Langmuir wave from initial stage to saturation is closely correlated to the evolution of the three waves involved from phase locking to phase mismatching. The phase difference, describing the extent of three-wave coupling, is therefore of great importance in Langmuir-wave excitation by beating two-frequency laser.

PACC: 5240D; 5260; 4265K