

# 相对论性带电粒子束在轴对称电场和磁场中的温度和能量展宽\*

田人和

北京师范大学低能核物理研究所, 北京 100875  
1992年8月3日收到

从单粒子的相对论性运动方程出发, 首先解出运动常数, 然后用这些运动常数构成符合 Vlasov 方程的束粒子分布函数, 再由该分布函数算出轴对称电场和磁场中相对论性带电粒子束的束温度和能量展宽, 并且对弱相对论性情况和强相对论性情况作了讨论.

PACC: 4170; 4180; 0560

## 一、引 言

文献 [1, 2] 曾研究过带电粒子束在轴对称电场和磁场中的温度和能量展宽, 现在将那些结果推广到相对论性带电粒子束情况.

带电粒子束的反常能量展宽, 除了碰撞模型<sup>[3-6]</sup>之外, 还有宏观场模型<sup>[1,2]</sup>. 束空间电荷平均场引起能量展宽的物理机制是清楚的, 束粒子之间的库仑排斥会导致势能向动能转化, 从而引起能量展宽. 磁场引起带电粒子束能量展宽的物理机制也是清楚的: 磁场虽不改变粒子的能量, 但它能改变粒子的运动方向, 从而引起不同方向之间的能量转移, 在束的横截面上, 不同位置的粒子有不同的动能, 因而产生一个附加的能量展宽.

本文所用的方法与文献 [1, 2] 相近. 先解单粒子的相对论性运动方程, 找出运动常数, 然后由这些运动常数构成符合 Vlasov 方程的束粒子分布函数, 再由该分布函数算出束温度和能量展宽. 最后对弱相对论性近似和强相对论性近似两种情况进行讨论.

## 二、单粒子运动常数和束粒子分布函数

带电粒子的运动方程由下式表示:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

式中  $\mathbf{p}$  为粒子的动量, 与速度  $\mathbf{v}$  的关系由下式表示:

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}, \quad (2)$$

$\gamma$  为相对论因子

\* 国家“863”高新技术和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2},$$

$m_0$  为粒子的静止能量,  $c$  为光速,  $q$  为电荷量,  $q\mathbf{E}$  为电场力,  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  为洛伦兹力, 本文采用 MKS 单位制.

将轴对称的空间电势在柱面坐标系  $(r, \theta, z)$  中展成  $r$  的幂级数, 并忽略掉  $r^4$  以上的各项 (旁轴近似), 则有

$$\varphi(z, r) \approx \varphi_0(z) - \frac{1}{4} [\varphi''_0(z) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(z)] r^2, \quad (3)$$

式中  $\varphi_0(z)$  为对称轴上的电势,  $\varphi''_0(z)$  为  $\varphi_0(z)$  对  $z$  的二阶微商,  $\rho_0(z)$  为对称轴上的空间电荷密度,  $\epsilon_0$  为真空介电常数. (3) 式中不但考虑了外电极产生的电势, 而且也考虑了圆柱形带电粒子束自身的空间电荷产生的电势. 电场强度由下式给出:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi(z, r). \quad (4)$$

轴对称的磁场可以写成以下形式:

$$\mathbf{B}(z, r) = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

$$B_r = -\frac{1}{2} r B'_z(z), B_\theta = 0, B_z = B_z(z),$$

式中  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  为方向矢量,  $B_z(z)$  为  $z$  方向的外加磁场,  $B'_z(z)$  为  $z$  方向的磁场梯度. 忽略了粒子束的自磁场. 虽然对相对论性带电粒子束而言, 束的自磁场是应该考虑的, 但束的自磁场引起的能量展宽确实很小, 可以忽略.

将以上各式代入 (1) 式, 得到运动方程的分量形式如下:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{r}) = -q \frac{\partial \varphi}{\partial r} + q r \dot{\theta} B_z + \gamma m_0 r \dot{\theta}^2, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 r^2 \dot{\theta}) = q r \left( -\frac{1}{2} r \dot{z} B'_z - \dot{r} B_z \right), \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{z}) = -q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} q r^2 \dot{\theta} B'_z, \quad (8)$$

式中圆点代表对  $t$  的微商, 硬撇代表对  $z$  的微商.

下面对部分屏蔽流情况求解. 设阴极工作面上的磁感应强度为  $B_0$ , 并用  $r_0, \theta_0, z_0$  和  $\dot{r}_0, \dot{\theta}_0, \dot{z}_0$  分别代表粒子的初始位置和初始速度. 不难证明方程组 (6)–(8) 有两个运动常数: 一是角动量  $(\gamma m_0 r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q r^2 B_z)$ , 另一是系统的总能量 (即, 自能、动能和势能之和  $\gamma m_0 c^2 + q\varphi$ ), 即

$$\gamma m_0 r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q r^2 B_z = r_0 m_0 r_0^2 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2} q r_0^2 B_0 = \text{const}, \quad (9)$$

$$\gamma m_0 c^2 + q\varphi(z, r) = r_0 m_0 c^2 + q\varphi(z_0, r_0) = \text{const}. \quad (10)$$

可以通过电势零点的选择和聚束电极的设计, 令

$$\varphi(z_0, r_0) = 0. \quad (11)$$

由于不考虑粒子之间的相互碰撞, 因而束粒子的分布函数满足 Vlasov 方程. 而且运动常数的任意函数  $f[(\gamma m_0 r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q r^2 B_z), (\gamma m_0 c^2 + q\varphi)]$  是 Vlasov 方程的解<sup>[7,8]</sup>.

在相对论性情况下,分布函数  $f$  用动量表示会方便一些. 因此利用下式:

$$\gamma^2 = 1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}, \quad (12)$$

以及(2)式,可以将运动常数表示成

$$r p_\theta + \frac{1}{2} q r^2 B_z = \text{const}, \quad (13)$$

$$\frac{p^2}{2m_0} + \gamma_0 q \varphi - \frac{q^2 \varphi^2}{2m_0 c^2} = \text{const}. \quad (14)$$

由此可以构造以下函数作为分布函数:

$$f = A \exp \left\{ -\frac{1}{2m_0 k T} [ (p_\theta - P_\theta)^2 + (p_m^2 - P_m^2) ] \right\}, \quad (15)$$

式中  $A$  为常数,由归一化条件决定,

$$P_\theta = m_0 \alpha r, \quad (16)$$

式中  $\alpha$  为构造(15)式时引入的一个量纲因子,由具体问题来选定. 在文献[2]中已将其取为

$$\alpha = \frac{-q B_d (1 - M)}{2m_0}, \quad (17)$$

式中  $B_d$  为漂移区中的磁感应强度,  $M$  为屏蔽系数:  $M = B_0/B_d$ . (15)式中的  $p_m$  为动量的子午分量

$$P_m = P_r + P_z, \quad (18)$$

而

$$P_m^2 = 2\gamma_0 m_0 \left( -q\varphi + \frac{q^2 \varphi^2}{2\gamma_0 m_0 c^2} \right) + (m_0 \alpha r)^2 \left( 1 + \frac{q B_z}{m_0 \alpha} \right). \quad (19)$$

当  $P_\theta$  和  $P_m$  等于零(电场和磁场为零)时,  $f$  变成平衡态时的 Maxwell 分布,显然(15)式中的  $T$  为粒子处在初始平衡态时的热力学温度. 用(15)式计算平均值时,  $p_\theta$  的变化范围从  $-\infty$  到  $+\infty$ ,  $p_m$  的变化范围从  $P_m$  到  $\infty$ , 即

$$f = \begin{cases} A \exp \left\{ -\frac{1}{2m_0 k T} [ (p_\theta - P_\theta)^2 + (p_m^2 - P_m^2) ] \right\} & p_m \geq P_m; \\ 0 & p_m < P_m. \end{cases} \quad (20)$$

上式即所谓的半 Maxwell 型分布函数<sup>[1,9,10]</sup>,很适合于描述平面发射或针孔发射等粒子束中的粒子分布.

为具体起见,现在考虑磁场恒定的漂移区中的分布函数. 由于漂移区内没有外电场,所以  $\varphi_0(z) = 0$ . 同时假设在束的横截面上粒子分布为均匀的(为  $\rho_0(z)$ ),  $\rho_0(z)$  可用束电流  $I$  来表示,

$$\rho_0(z) \approx \frac{qI}{|q| \pi R^2 v_a}, \quad (21)$$

式中  $R$  为粒子束的束半径,  $v_a$  为粒子到达加速电极时的纵向速度,在漂移区内可近似认为  $v_a$  是一常数

$$v_a \approx c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{\gamma_0 m_0 c^2 - q\varphi_a} \right)^2}, \quad (22)$$

式中  $\varphi_a$  为加速极电势. 将(21)式代入(19)式, 得到

$$P_m^2 \approx 2m_0 \left\{ -\gamma_0 q \varphi_a \left( 1 - \frac{q \varphi_a}{2\gamma_0 m_0 c^2} \right) + r^2 \left[ \frac{\gamma_0 |q| I}{4\pi \epsilon_0 R^2 v_a} \left( 1 - \frac{q \varphi_a}{\gamma_0 m_0 c^2} \right) + \frac{m_0 \alpha^2}{2} \left( 1 + \frac{q B_d}{m_0 \alpha} \right) \right] \right\} = 2m_0 (a + br^2), \quad (23)$$

式中  $a, b$  是为了书写方便而引进的两个记号,

$$a = -\gamma_0 q \varphi_a \left( 1 - \frac{q \varphi_a}{2\gamma_0 m_0 c^2} \right), \quad (24)$$

$$b = \frac{\gamma_0 |q| I}{4\pi \epsilon_0 R^2 v_a} \left( 1 - \frac{q \varphi_a}{\gamma_0 m_0 c^2} \right) + \frac{m_0 \alpha^2}{2} \left( 1 + \frac{q B_d}{m_0 \alpha} \right). \quad (25)$$

在大多数实际情况中, 可以认为

$$a \gg br^2. \quad (26)$$

### 三、轴对称电场和磁场中相对论性带电粒子束的温度

不同方向的束温度由该方向的速度均方偏差来定义<sup>[1,4]</sup>. 利用(2)式, 可将其表示成动量的形式

$$T_\theta = \frac{m}{k} \langle (v_\theta - \langle v_\theta \rangle)^2 \rangle = \frac{\gamma}{m_0 k} \left( \langle \frac{p_\theta^2}{\gamma^2} \rangle - \langle \frac{p_\theta}{\gamma} \rangle^2 \right), \quad (27)$$

$$T_m = \frac{m}{2k} \langle (v_m - \langle v_m \rangle)^2 \rangle = \frac{\gamma}{2m_0 k} \left( \langle \frac{p_m^2}{\gamma^2} \rangle - \langle \frac{p_m}{\gamma} \rangle^2 \right), \quad (28)$$

式中的  $\langle \rangle$  代表求平均值(下同). 如前所述, 已经假定在束的横截面上粒子分布是均匀的. 下面分作两种情况来讨论:

#### 1. 弱相对论性近似

如果  $p^2 \ll m_0^2 c^2$ , 即为弱相对论性情况. 将(12)式中的  $\gamma$  展开, 因此有

$$\gamma = \left( 1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m_0^4 c^4} + \frac{1}{16} \frac{p^6}{m_0^6 c^6} - \dots, \quad (29)$$

将(29)式代入(27)和(28)式, 并展成  $(m_0 c^2)$  的负次幂级数形式

$$T_\theta \approx \frac{\gamma}{m_0 k} \left\{ \left[ \langle p_\theta^2 \rangle - \langle p_\theta \rangle^2 \right] - \frac{1}{m_0^2 c^2} \left[ \langle p_\theta^2 p^2 \rangle - \langle p_\theta \rangle \langle p_\theta p^2 \rangle \right] + \frac{1}{m_0^4 c^4} \left[ \langle p_\theta^2 p^4 \rangle - \frac{1}{4} \langle p_\theta p^2 \rangle^2 - \frac{3}{4} \langle p_\theta \rangle \langle p_\theta p^4 \rangle \right] - \dots \right\}, \quad (30)$$

$$T_m \approx \frac{\gamma}{2m_0 k} \left\{ \left[ \langle p_m^2 \rangle - \langle p_m \rangle^2 \right] - \frac{1}{m_0^2 c^2} \left[ \langle p_m^2 p^2 \rangle - \langle p_m \rangle \langle p_m p^2 \rangle \right] + \frac{1}{m_0^4 c^4} \left[ \langle p_m^2 p^4 \rangle - \frac{1}{4} \langle p_m p^2 \rangle^2 - \frac{3}{4} \langle p_m \rangle \langle p_m p^4 \rangle \right] - \dots \right\}. \quad (31)$$

对漂移区中的束温度进行计算(只精确到  $(m_0 c^2)^{-1}$  的一级项), 于是得到

$$T_\theta \approx \left[ \gamma T + \frac{\gamma m_0 (aR)^2}{18k} \right] \left( 1 - \frac{2a}{m_0 c^2} \right) + \dots, \quad (32)$$

$$T_m \approx \frac{\gamma}{k} \left[ \frac{(kT)^2}{4a} + \frac{b^2 R^4}{48a} - \frac{akT}{m_0 c^2} \right] + \dots, \quad (33)$$

式中含有  $(m_0 c^2)$  负次幂项是相对论性修正项(只写出了它们的一级项). 如果将它们忽略, 就得到非相对论性情况<sup>[2]</sup>.  $T_\theta$  和  $T_m$  在文献[2]中已作过数值估算. 在推导(32)和(33)式时已假定  $p_z \ll m_0^2 c^2$  (即动能比自能小得多), 所以相对论性修正项是很小的. 反之, 如果相对论性修正项并不是很小, 则在(32)和(33)式中应该取更多的项才能得到精确的结果.

## 2. 强相对论性近似

如果  $p^2 \gg m_0^2 c^2$ , 即为强相对论性情况. (12)式中的  $\gamma$  可表示成

$$\gamma \approx \frac{p}{m_0 c}. \quad (34)$$

束温度  $T_\theta$  和  $T_m$  的表达式(27)和(28)可以写成

$$T_\theta \approx \frac{\gamma m_0 c^2}{k} (\langle \frac{p_\theta^2}{p^2} \rangle - \langle \frac{p_\theta}{p} \rangle^2), \quad (35)$$

$$T_m \approx \frac{\gamma m_0 c^2}{2k} (\langle \frac{p_m^2}{p^2} \rangle - \langle \frac{p_m}{p} \rangle^2). \quad (36)$$

在大多数实际情况中,  $p_m \gg p_\theta$ . 再将漂移区的条件代入, 于是得到

$$T_\theta \approx \frac{\gamma m_0 c^2}{a} \left[ \frac{T}{2} + \frac{m_0 (aR)^2}{2k} \right], \quad (37)$$

$$T_m \approx \frac{\gamma m_0 c^2}{a} \left[ \frac{(kT)^2}{16ka} + \frac{m_0 kT (aR)^2}{16ka} + \frac{m_0^2 (aR)^4}{384ka} \right]. \quad (38)$$

与非相对论性情况<sup>[2]</sup>比较,  $T_\theta$  和  $T_m$  的表达式中多了一个因子  $(\gamma m_0 c^2/a)$ . 在强相对论性情况下,  $(\gamma m_0 c^2/a) \rightarrow 1$ . 所以  $T_\theta$  与非相对论性情况相比, 基本规律没有变化(这是因为束粒子的宏观流速与  $\theta$  方向垂直的缘故), 而在  $T_m$  中, 电场的作用相对减小而磁场的作用相对增加.

## 四、轴对称电场和磁场中相对论性带电粒子束的能量展宽

能量展宽被定义为束截面上粒子动能的均方根偏差

$$\Delta E = [\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2]^{1/2}. \quad (39)$$

相对论性情况下, 粒子动能可表示为

$$\epsilon = \frac{p^2}{(\gamma + 1)m_0}. \quad (40)$$

将(40)式代入(39)式, 于是有

$$\Delta E = [\langle \frac{p^4}{(\gamma + 1)^2 m_0^2} \rangle - \langle \frac{p^2}{(\gamma + 1)m_0} \rangle^2]^{1/2}. \quad (41)$$

仍然分弱相对论性近似和强相对论性近似两种情况来讨论.

## 1. 弱相对论性近似

将(29)式代入(41)式,于是得到

$$\begin{aligned} \Delta E \approx & \frac{1}{2m_0} \{ [\langle p^4 \rangle - \langle p^2 \rangle^2] - \frac{1}{2m_0^2 c^2} [\langle p^6 \rangle - \langle p^2 \rangle \langle p^4 \rangle] \\ & + \frac{1}{16m_0^4 c^4} [5\langle p^8 \rangle - 4\langle p^2 \rangle \langle p^6 \rangle - \langle p^4 \rangle^2] - \dots \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

再将漂移区的条件代入,于是有

$$\begin{aligned} \Delta E \approx & \left[ \frac{3(kT)^2}{2} + \frac{m_0(\alpha R)^2}{2} \left( kT + \frac{bR^2}{6} \right) + \frac{m_0^2(\alpha R)^4}{48} + \frac{b^2 R^4}{12} \right. \\ & \left. - \frac{a^2}{m_0 c^2} \left( kT + \frac{m_0(\alpha R)^2}{2} + \dots \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (43)$$

式中含有 $(m_0 c^2)$ 负次幂项是相对论性修正项(只写出了一级项).如忽略了这些项,(43)式就变成非相对论性结果<sup>[2]</sup>.(43)式是在相对论性修正很小的假定下推出的,如果此修正不是很小,那必须取更多的 $(m_0 c^2)$ 负次幂项才能得到精确的结果.非相对论性情况下能量展宽的数值估算,已经在文献[2]中给出.

## 2. 强相对论近似

将(34)式代入(41)式,于是得到

$$\Delta E \approx c [\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2]^{1/2}. \quad (44)$$

再将漂移区条件代入,于是有

$$\Delta E \approx c \left[ m_0 kT + \frac{(m_0 \alpha R)^2}{2} \right]^{1/2}. \quad (45)$$

上式中忽略了含有 $a$ 的负次幂的各项.在强相对论性情况下,带电粒子束的能量展宽主要由热运动引起的展宽 $(kT)$ 和磁场引起的展宽 $m_0(\alpha R)^2/2$ 决定,与束电流以及束的宏观流速近似无关.与非相对论性情况<sup>[2]</sup>比较,电场的作用相对减小,而磁场的作用相对增加.

为了有数量级概念,对强相对论性情况下的能量展宽进行数值计算.设有一阴极温度为2000 K,束半径为0.5 mm的电子束,聚束磁场为0.1 T,屏蔽系数为 $M=0.2$ ,则能量展宽为 $\Delta E \approx 4 \times 10^3 \text{ eV}$ .

在强相对论性情况下,能量展宽已达到 keV 的数量级,但能量的相对展宽(即能量展宽与粒子能量的比值)还是相当微小的.与此相反,低能重离子束(如离子注入机中的重离子束)在轴对称电场和磁场中的相对能量展宽却是很严重的.

## 五、结 语

本文从单粒子的相对论性运动方程出发,解出两个运动常数,一是角动量 $(\gamma m_0 r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q r^2 B_z)$ ,另一是总能量 $(\gamma m_0 c^2 + q\varphi)$ .然后由这些运动常数构成符合 Vlasov 方程的束粒子分布函数 $f$ ,当 $p_\theta$ 和 $p_m$ 等于零(电场和磁场不存在)时, $f$ 变成平衡态时的 Maxwell 分

布函数. 束温度和能量展宽由分布函数  $f$  算出. 弱相对论性近似下的束温度( $T_0$  和  $T_m$ )以及能量展宽( $\Delta E$ )与非相对论性情况下比较, 只是增加了以  $(m_0c^2)$  的负次幂为级数的相对论性修正项, 而基本规律未变. 在强相对论性近似下,  $T_0$  的基本规律未变, 而在  $T_m$  和  $\Delta E$  中, 电场的作用相对减小, 而磁场的作用却相对增加.

- [1] 田人和、张荟星, 物理学报, **41**(1992), 408.
- [2] Tian Renhe *et al.*, *Acta Physica Sinica(Overseas Edition)*, to be published.
- [3] B. Zimmermann, *Adv. Electronics electron. Phys.*, **29**(1970), 257.
- [4] W. Knauer, *Optik*, **54**(1979), 211.
- [5] H. Rose and R. Spehr, *Optik*, **57**(1980), 339.
- [6] J. M. J. van Leeuwen and B. H. Jansen, *Optik*, **65**(1983), 179.
- [7] 黄祖洽、丁鄂江, 输运理论, 北京, 科学出版社, (1987), 第7章.
- [8] 刘盛纲, 相对论电子学, 北京, 科学出版社, (1987), 第8章.
- [9] J. J. McClelland, J. M. Ratliff and M. Fink, *J. Appl. Phys.*, **52**(1981), 7039.
- [10] H. M. Mott-Smith, *J. Appl. Phys.*, **24**(1953), 249.

## BEAM TEMPERATURES AND THE ENERGY BROADENING OF A RELATIVISTIC CHARGED-PARTICLE BEAM IN AXIALLY SYMMETRIC ELECTRIC- AND MAGNETIC-FIELDS

TIAN REN-HE

*Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875*

(Received 3 August 1992)

### ABSTRACT

Starting from the relativistic motion equation of a single particle, the motion constants were obtained. And then by using these motion constants a distribution function of the beam particles was constructed which satisfies the Vlasov equation. The beam temperatures and the energy broadening of a relativistic charged-particle beam in axially symmetric electric- and magnetic-fields have been calculated by using the distribution function, and the weakly and strongly relativistic approximations have also been discussed respectively.

**PACC:** 4170; 4180; 0560