

引入“鬼”场的二维次近邻正方格点 渗流模型的重整化群方法研究

朱建阳

江西省抚州师范专科学校物理系, 抚州 344000

1992 年 8 月 18 日收到

应用位置空间重整化群方法, 对引入“鬼”场的二维次近邻正方格点渗流模型进行研究, 得到临界值 P_c 和临界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \delta, \eta$.

PACC: 0550; 6220

一、引 言

实验上人们观察到在金属粒子和绝缘粉末的混合物中, 当金属成分小于一阈值(30%左右)时系统是绝缘体, 而到达阈值后导电率迅速上升. 最初即由此引伸出所谓的渗流问题^[1,2]. 此后, 更由于渗流模型能较好地刻画某些无序体系的金属—绝缘体相变而愈发受到人们的重视, 因而使渗流问题的研究形成热潮.

Klein 等人^[3,4]用生成函数的方法精确地解决了一维最近邻的渗流模型, 而张昭庆等^[5,6]则用矩阵变换方法和重整化群方法成功地解决了一维次近邻渗流问题, 最近屈少华等^[7]又用蒙特-卡罗模拟方法研究了二维次近邻正方格点渗流模型. 本文用位置空间重整化群方法继续对次近邻正方格点渗流模型进行研究, 研究中引入“鬼”场, 得到临界值 P_c 及 $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \delta, \eta$ 等全部临界指数.

二、Kadanoff 元胞与元胞占据规定

取如图 1 所示的 Kadanoff 元胞, 描述元胞大小的参量为 $b = 3$, 这样一个元胞内所含的格点数目为

$$L = b^2 = 9,$$

即一个元胞内含有 9 个格点.

在渗流问题的研究中, 由原来格点组态的描述通过变换转移到元胞组态的描述. 通常按元胞能否“导电”作为元胞是否被占据的规定. 我们假定格点从东到西方向的“导电”, 或从南到北方向的“导电”均作为判断元胞被占据的依据. 由于同时考虑近邻和次近邻相互作用比单纯考虑最近邻相互作用其导通性条件放宽, 而且, 当引入“鬼”场后, 被“鬼”占的格点因“鬼”与“鬼”的联系不受空间距离的限制, 使原本不导通的元胞变导通. 本文在最近

邻相互作用的基础上再考虑次近邻相互作用,同时引入“鬼”场,这样均能使格点的导通性增大而更接近实际情况.

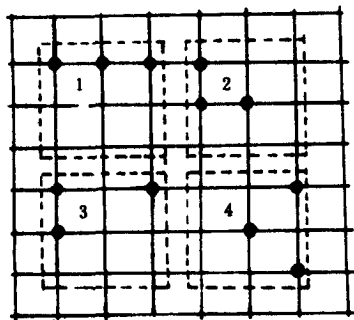


图1 格点占据图

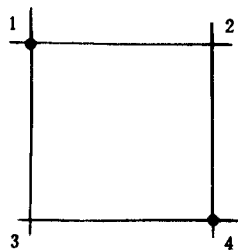


图2 元胞占据图

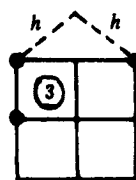
图3 格点上
落“鬼”后使
元胞导通

图1所描写的4个元胞是三粒子组态,在次近邻近下,按所采用的元胞占据规定,元胞1左右导通,元胞4上下导通,元胞2,元胞3上下左右都不导通(见图2).但引入“鬼”场后,元胞3可以导通(见图3).

这里有必要对“鬼”场的概念作些说明.因为我们希望能得到与磁场有关的临界指数,“鬼”场就是为了模拟磁场的性质而虚设的.假定一个有限集团中某格点落了一个“鬼”,另一有限集团中的格点也落了“鬼”,“鬼”与“鬼”是连通的,这两有限集团也就连通了.但为了避免形成无限大的集团,所以“鬼”与“鬼”的联系限制在同一个元胞内.另外,为了观察落“鬼”以后的导通情况,还需人为地规定入口方向,参照元胞占据规定,将从左到右和从下到上作为观察方向,由此判断落“鬼”格点对元胞导通的贡献.

三、重整化变换后的递推关系

划分元胞前格点的占有概率用 p 描写,划分元胞后用概率 p' (元胞占有概率)描写.引入“鬼”场后分别用 h, h' 描写划分元胞前后的占有概率.它们之间的关系可以写为

$$p' = \sum \eta_{\text{state}} f_1(p, h) = R_1(p, h), \quad (1)$$

$$h' = \sum \eta_{\text{state}} f_2(p, h) = R_2(p, h) \quad (2)$$

R_1, R_2 称为递推关系, η_{state} 为权重函数,其值为

$$\eta_{\text{state}} = \begin{cases} 1 & (\text{元胞被占据}) \\ 0 & (\text{元胞未被占据}) \end{cases} \quad (3)$$

$f(p, h)$ 为元胞中格点的各种组态的概率,包括是否有“鬼”占,求和是对元胞中各种可能的格点组态进行.

$$1. p' = R_1(p, h)$$

重整化过程如图4所示.以4个格点被占为例进行分析.这时可能的格点占据状态有 $C_4^3 = 126$ 种,其中101种位形不管是否有“鬼”都能导通,21种位形只有

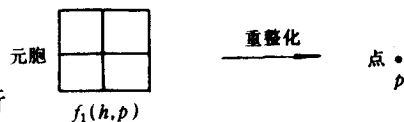


图4

落“鬼”后才能导通,4种位形落“鬼”后也不能导通.各种典型结构如图5所示.

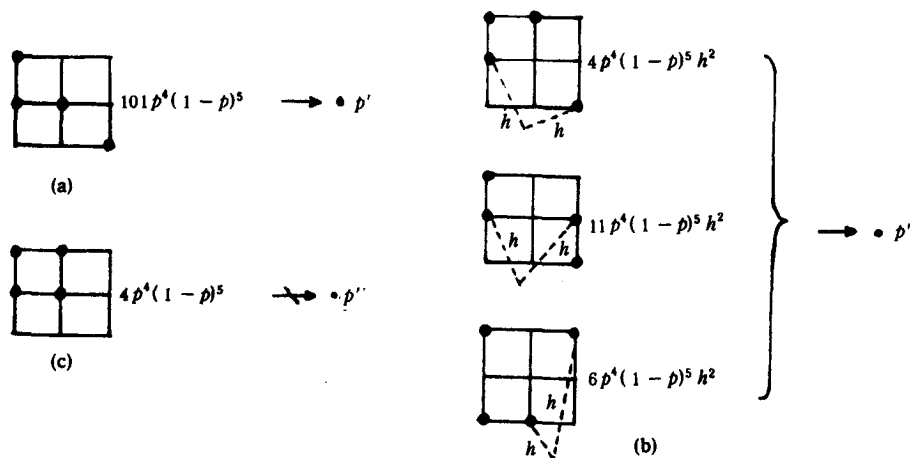


图5 有4个格点被占的典型位形结构的重整化过程 (a)能左右导通或上下导通

(b)格点上有“鬼”能导通 (c)格点上有“鬼”也不能导通

对元胞中各种可能的格点组态进行分析,可以得到

$$P' = p^9 + 9p^8(1-p) + 36p^7(1-p)^2 + 84p^6(1-p)^3 + 126p^5(1-p)^4 + 101p^4(1-p)^5 + 21P^4(1-p)^5h^2 + 32P^3(1-p)^6 + 36p^3(1-p)^6h^2 + 16p^2(1-p)^7h^2 \quad (4)$$

$$2. h' = R_2(p, h)$$

因直接写出 h' 较难,而先写出 $p'h'$ 再除以 p' 得到 h' 较易.这就意味着将落了“鬼”的格点占据状态用有“鬼”的元胞占据状态来描写,其重整化过程如图6所示.

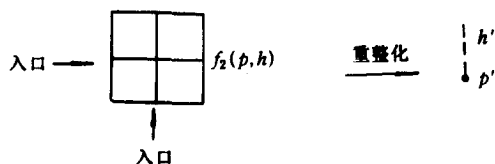


图6

对各种可能状态进行分析可以得到

$$p'h' = p^9Q_9 + 9p^8(1-p)Q_8 + 36p^7(1-p)^2Q_7 + p^6(1-p)^3(83Q_6 + Q_5) + p^5(1-p)^4(124Q_5 + 2Q_4) + p^4(1-p)^5(116Q_4 + 10Q_3) + p^3(1-p)^6(73Q_3 + 11Q_2) + p^2(1-p)^7(31Q_2 + 5Q_1) + 8p(1-p)^8Q_1, \quad (5)$$

其中 $Q_j = [1 - (1-h)^j]$ 代表 j 个被占格点中至少有一个格点落了“鬼”,如

$$Q_4 = h^4 + 4h^3(1-h) + 6h^2(1-h)^2 + 4h(1-h)^3 = [h^4 + 4h^3(1-h) + 6h^2(1-h)^2 + 4h(1-h)^3 + (1-h)^4] - (1-h)^4 = [h + (1-h)]^4 - (1-h)^4 = 1 - (1-h)^4.$$

为了清楚起见,下面再以5个格点被占的情况为例,说明可以重整化成 $p'h'$ 的位形的数目.因为规定了入口方向,所以在如图7所示的两种位形结构中,由于有一被占格点

远离入口方向,且不会因近邻和次近邻作用而相互联系,因此该格点是否落“鬼”对 $p'h'$ 均无贡献. 这样只要其余 4 个格点至少落一个“鬼”就能重整化成 $p'h'$, 而其余 124 种位形则要求 5 个格点中至少有一个格点落“鬼”. 总之,对于有 5 个格点被占的情况,能重整化成 $p'h'$ 的位形数目是 $(124Q_5 + 2Q_4)$.



图 7

四、临界点与临界指数

一般而言,参数空间中的点 (p, h) 在重整化变换下将变到另一点 (p', h') . 如果某一点在变换下不变,即

$$p^* = R_1(p^*, h^*), \quad h^* = R_2(p^*, h^*), \quad (6)$$

则称点 (p^*, h^*) 为重整化变换下的不动点. 考虑到“鬼”场是虚设的,故令

$$p' = p = p^*, \quad h' = h = h^* = 0 \quad (7)$$

化简后得到不动点方程为

$$p^* = p^{*9} - 2p^{*8} + 10p^{*7} - 50p^{*6} + 101p^{*5} - 91p^{*4} + 32p^{*3}. \quad (8)$$

为了研究渗流问题的相变现象,需分析不动点附近的行为,为此在不动点附近使参数线性化

$$\begin{pmatrix} p' - p^* \\ h' - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial R_1}{\partial p} \right|_* & \left. \frac{\partial R_1}{\partial h} \right|_* \\ \left. \frac{\partial R_2}{\partial p} \right|_* & \left. \frac{\partial R_2}{\partial h} \right|_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - p^* \\ h - 0 \end{pmatrix} = R_b^L \begin{pmatrix} p - p^* \\ h - 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

式中 R_b^L 为线性化算子(即线性变换矩阵),标记 b 是分辨率缩小的倍数,这里取 $b = 3$. 由递推关系(4)和(5)式可以求得变换矩阵的矩阵元为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_1}{\partial p} \right|_* &= \left. \frac{\partial p'}{\partial p} \right|_* = [9p^8 - 16p^7 + 70p^6 - 300p^5 + 505p^4 - 364p^3 + 96p^2]_{p=p^*}, \\ \left. \frac{\partial R_1}{\partial h} \right|_* &= \left. \frac{\partial p'}{\partial h} \right|_* = 0. \end{aligned}$$

$$\text{因为} \quad \left. \frac{\partial(p'h')}{\partial h} \right|_* = \left[p' \frac{\partial h'}{\partial h} \right]_* + \left[h' \frac{\partial p'}{\partial h} \right]_* = \left[p' \frac{\partial h'}{\partial h} \right]_*,$$

$$\left. \frac{\partial(p'h')}{\partial p} \right|_* = \left[p' \frac{\partial h'}{\partial p} \right]_* + \left[h' \frac{\partial p'}{\partial p} \right]_* = \left[p' \frac{\partial h'}{\partial p} \right]_*,$$

$$Q_j = [1 - (1 - h)^j], \quad Q_j|_* = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dh} \right|_* = j.$$

$$\text{所以} \quad \left. \frac{\partial R_2}{\partial p} \right|_* = \left. \frac{\partial h'}{\partial p} \right|_* = \left[\frac{1}{p'} \frac{\partial(p'h')}{\partial p} \right]_* = 0,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_2}{\partial h} \right|_* &= \left. \frac{\partial h'}{\partial h} \right|_* = \left[\frac{1}{p'} \frac{\partial(p'h')}{\partial h} \right]_* \\ &= [9p^8 + 72p^7(1 - p) + 252p^6(1 - p)^2 + 503p^5(1 - p)^3]_{p=p^*} \end{aligned}$$

$$+ 628p^4(1-p)^4 + 494p^3(1-p)^5 + 241p^2(1-p)^6 \\ + 67p(1-p)^7 + 8(1-p)^8]_{p=p^*}.$$

显然 R_b^L 已经对角化,故不难得出本征值为

$$\lambda_1(b) = \left. \frac{\partial p'}{\partial p} \right|_p, \\ \lambda_2(b) = \left[\frac{1}{p'} \frac{\partial(p'h')}{\partial h} \right]. \quad (10)$$

根据群性质的要求

$$R_b^L R_{b'}^L = R_{bb'}^L, \quad \forall R_b, R_{b'} \in RG, \quad (11)$$

必须有

$$\lambda_i(b)\lambda_i(b') = \lambda_i(bb'), \quad (i=1,2). \quad (12)$$

因此 $\lambda_i(b)$ 有如下形式:

$$\lambda_i(b) = L^{y_i} = (b^d)^{y_i}, \quad (\text{这里 } b=3, d=2) \quad (13)$$

如果不断地重整化,则只有本征值大于1的量与物理对应,此时的不动点为不稳定不动点,即临界点.

解不动点方程(8)和计算线性化算子的本征值(10),得到满足物理意义的结果为

$$\text{临界值: } p_c = p^* = 0.27, \quad (14)$$

$$\text{本征值: } \lambda_1 = 2.13, \quad \lambda_2 = 8.61 \quad (15)$$

$$\text{标度幂: } p = y_1 = \frac{\ln \lambda_1}{\ln b} = \frac{\ln 2.13}{\ln 3} = 0.344, \quad (16)$$

$$q = y_2 = \frac{\ln \lambda_2}{\ln b} = \frac{\ln 8.61}{\ln 3} = 0.9798. \quad (17)$$

由标度理论,可以计算出二维正方格点渗流模型的临界指数为

$$\alpha = 2 - 1/p = -0.906, \quad (18)$$

$$\beta = (1-q)/p = 0.058, \quad (19)$$

$$\gamma = (2q-1)/p = 2.79, \quad (20)$$

$$\delta = q/(1-q) = 48.6, \quad (21)$$

$$\eta = d(1-2q) + 2 = 0.081, \quad (22)$$

$$\nu = 1/pd = 1.453 \quad (23)$$

本工作得到北京师范大学物理系杨展如教授和秦勇博士的帮助,在此表示衷心的感谢.

- [1] D. Stauffer, *Phys. Rep.*, **54**(1979), 1.
- [2] J. W. Essam, *Rep. Prog. Phys.*, **43**(1980), 833.
- [3] W. Klein, H. E. Stanley, P. J. Reynolds and A. Coniglio, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 1145.
- [4] W. Klein, D. J. Wallace and R. P. Zia, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976), 639.
- [5] Z. Q. Zhang, F. C. Pu and T. C. Li, *J. Phys. A*, **16**(1983), 125.
- [6] T. C. Li, Z. Q. Zhang and F. C. Pu, *J. Phys. A*, **16**(1991), 169.
- [7] 屈少华、姚凯伦、郁伯铭, *物理学报*, **40**(1991), 169.

STUDY OF THE TWO-DIMENSIONAL SQUARE LATTICE PERCOLATION MODEL

ZHU JIAN-YANG

Department of Physics, Fuzhou Teachers College, JiangXi Province, Fuzhou 344000

(Received 18 August 1992)

ABSTRACT

In this paper, the renormalisation group approach is used to treat the problem of percolation on a two-dimensional square lattice with ‘ghost’ field and next-nearest-neighbour interactions. The critical probability P_c and the critical exponents $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \delta, \eta$ are obtained.

PACC: 0550;6220