

非线性声学谐波方程的特解及其在边值问题中的应用*

钱祖文

中国科学院声学研究所, 北京 100080

1992 年 1 月 29 日收到

在流体或固体介质中, 微扰法求解非线性声波的反射和折射问题时, 谐波场通常满足非齐次波动方程. 应用分离变量法及拉格朗日变动参数法求它的特解, 出现了待定的分离常数, 给这类非线性声学边值问题带来困难. 本文结果表明, 为使定解问题出现伴谬, 其独立的特解只有两类, 一类是沿边界法线方向有积累效应的解, 另一类则是沿平行界面方向上有积累效应的解, 由定解条件来决定究竟选用哪一类解. 应用这个结果研究了平面边界的反射和折射谐波, 该理论对非线性声学中的平面边值问题有普遍的应用意义.

PACC: 4325; 4330

一、引言

正如作者指出, 微扰法求解流体或固体介质中的非线性声学边值问题时, 二阶谐波场满足非齐次波动方程. 在应用分离变量法求解这个方程, 出现了一个待定的分离参数^[1-4]没有确定, 使得该方程的特解难以唯一地确定. 另一方面, 由于特解中含有所谓积累项, 即出现正比于坐标变量的项, 从而在应用边界条件决定齐次波动方程解的积分常数时, 使得这些常数依赖于坐标变量, 这显然是不合理的. 上述两个问题给非线性声学边界值研究带来了困难, 就作者所知, 这些困难至今尚未克服. 本文将给出确定分离常数的方法, 从而给出满足边界条件的唯一解.

二、非齐次波动方程特解的确定

在文献[1-6]中都给出了下述类型的非齐次波动方程, 即

$$\nabla^2 \varphi + 4k^2 \varphi = a \exp\{2j[(k_x x \pm k_z z) - \omega t]\} \quad (1)$$

$$k^2 = \omega^2/c^2 = k_x^2 + k_z^2.$$

利用分离变量法求解方程(1), 令

$$\varphi(x, z) = \varphi_1(x) \exp(\pm 2jk_z z) + \varphi_2(z) \exp(2jk_x x) \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式可得

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$\begin{aligned} & [\varphi_1'(x) + 4k_x^2 \varphi_1(x)] \exp(\pm 2jk_x z) + [\varphi_2'(z) + 4k_z^2 \varphi_2(z)] \exp(2jk_x x) \\ & = \alpha \exp(2j(k_x x \pm k_z z)) \end{aligned} \quad (3)$$

在(3)式中如果令

$$\varphi_1'(x) + 4k_x^2 \varphi_1(x) = \alpha' \exp(2jk_x x), \quad (4)$$

式中 α' 为分离参数, 它是一个待定的常数, 迄今为止, 尚不能确定. 将(4)式代入(3)式, 于是有

$$\varphi_2'(z) + 4k_z^2 \varphi_2(z) = (\alpha - \alpha') \exp(\pm 2jk_z z) \quad (5)$$

如果解出(4)和(5)式, 将所得到的解代入(2)式, 便得到方程(1)的非齐次特解, 其中包含了一个尚无法确定的分离常数 α' . 除此以外, 这里还存在另一个问题, 即是(1)式的完全解应当包括这个非齐次特解和相应的齐次方程的通解这两部分, 而后者中的积分常数由边界条件来确定, 但从文献[1—7]可以看出, 这样求得的结果不合理, 因为积分常数将与坐标变量有关, 这显然是不符合逻辑的. 为了克服这两个困难, 我们先来求解方程(4)和(5). 在文献[1]中, 应用了拉格朗日变动参数法, 即引入二个待定函数 $A(x)$, $B(x)$, 使得待求的解可表达为

$$\varphi_1(x) = A(x) \exp(2jk_x x) + B(x) \exp(-2jk_x x). \quad (6)$$

因为(4)式中只有一个未知函数 $\varphi_1(x)$, 而(6)式中却有两个未知函数 $A(x)$ 和 $B(x)$, 故可以任意指定一个关系, 例如, 将(6)式代入(4)式, 可指定

$$A'(x) \exp(2jk_x x) + B'(x) \exp(-2jk_x x) = 0, \quad (7)$$

式中 $A'(x)$ 和 $B'(x)$ 分别为 $A(x)$ 和 $B(x)$ 对 x 的微商. 由(4), (6)和(7)式可得

$$\varphi_1(x) = \alpha' \left(\frac{x}{4jk_x} + \frac{1}{16k_x^2} \exp(2jk_x x) \right). \quad (8)$$

用同样的方法可以求(5)式的解为

$$\varphi_2(z) = (\alpha - \alpha') \left[\pm \frac{z}{4jk_z} + \frac{1}{16k_z^2} \right] \exp(\pm 2jk_z z) \quad (9)$$

将(8)和(9)两式代入(2)式, 得到一个包含待定分离参数 α' 的非齐次特解 $\varphi(x, z, \alpha')$, 其中 α' 至今尚无法确定. 另一方面, 该特解中含有正比于坐标变量 x 和 z 的积累项, 致使在利用边界条件待确定的齐次解积分常数中至少有一项正比于坐标变量(例如正比于 x 的项), 这显然不合理.

如果在(1)式中令 $\alpha = 0$, 则它成为一个齐次波动方程, 其特解应当为零. 但由(8), (9)两式得到的却不然, 因为这时的 $\varphi_1(x)$ 仍如(8)式所示, 而 $\varphi_2(z)$ 为

$$\varphi_2(z) = -\alpha' \left(\pm \frac{z}{4jk_z} + \frac{1}{16k_z^2} \right) \exp(\pm 2jk_z z).$$

将它们代入(2)式则有

$$\varphi(x, z, \alpha') = \alpha' \left\{ \frac{x}{4jk_x} \pm \frac{z}{4jk_z} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{k_x^2} + \frac{1}{k_z^2} \right) \right\} \exp(2jk_x x \pm 2jk_z z).$$

这里略去 $\exp(-2j\omega t)$ 这个因子. 一般而言, 上式不为零, 除非 $\alpha' = 0$, 否则会出现齐次波动方程有非零的特解这一悖论. 由此可见, 合理的解应为

$$\varphi_1(x) = 0,$$

$$\varphi_2(z) = \alpha \left(\pm \frac{z}{4jk_z} + \frac{1}{16k_z^2} \right) \exp(\pm 2jk_z z).$$

或者说, 方程(1)的合理特解应为

$$\varphi(x, z) = \alpha \left(\pm \frac{1}{4jk_z} + \frac{1}{16k_z^2} \right) \exp(2j(k_x x \pm k_z z)). \quad (10)$$

另一个可能的情况是,如果我们当初在(3)式中不是令(4)式成立,而是令

$$\varphi'_2(z) + 4k_z^2 \varphi_2(z) = a'' \exp(\pm 2jk_z z),$$

a'' 为另一个分离常数,将此式代入(3)式可得

$$\varphi'_1(x) + 4k_x^2 \varphi_1(x) = (a - a'') \exp(2jk_x x).$$

仍应用拉格朗日变动参数法来求 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(z)$ 的解,显然,它们均依赖于分离参数 a'' ,为了不出佯谬,必须在上面的两个方程中令 $a'' = 0$,从而得出方程(1)还有另一个特解如下:

$$\varphi(x, z) = \alpha \left(\frac{j}{4jk_x} + \frac{1}{16k_x^2} \right) \exp(2j(k_x x \pm k_z z)). \quad (11)$$

由此可见,方程(1)只可能独立地选取(10)式或者(11)式作为它的特解,究竟选取哪一个,这要由具体情况而定.显然,(10)式表示一类沿正方向有积累效应的解;而(11)式是沿 x 方向有积累效应的解,它们都是平面波解.在无限介质中,平面波在其传播方向上应当有积累效应.在处理平面边值问题时,如果选 z 轴垂直于边界面 ($z = 0$),为使该边值问题可解,则选取(10)式作为特解是合理的,不然,若选(11)式或者选(10)式与(11)式的某个组合作为特解,则会使问题成为不可解,因为这时的齐次方程通解的积分常数依赖于变量 x ,正如上面指出过,这是不符合逻辑的.

三、有限振幅波在平面边界的反射和折射

现在讨论二阶谐波在平面边界的反射和折射.设介质 I 和 II 均为流体,界面的坐标为 $z = 0$. 关于这一问题很多工作都曾涉及过.例如,文献[1,3,7]都选特解为沿 x, z 两个方向上有积累效应的解,为了克服积分常数依赖于坐标变量 x 这一困难,曾假设正比于坐标变量 x 的积累项前的系数为零,从表面来看这个麻烦已经解决,但这一人为的假设给平面波入射角和折射角之间强行引入了一个新的关系,如果这一关系与 Snell 定律不矛盾,则表明该问题是可解的,否则是不可解的^[2,4].

在文献[1—5]中曾经证明,二阶谐波满足下述形式的波动方程,在介质 I 中有

$$\nabla^2 \varphi_1 + 4k^2 \varphi_1 = 4\{\alpha_1 + \alpha_2(\exp(-2jk_z z) + V^2 \exp(2jk_z z))\} \exp(-2j(\omega t - k_x x)). \quad (12)$$

在介质 II 中有

$$\nabla^2 \varphi_1 + 4l^2 \varphi_1 = 4A \exp(-2j(\omega t - k_x x + l_z z)), \quad (13)$$

$$l^2 = k_x^2 + l_z^2,$$

式中 α_1, α_2 及 A 等所有的符号见文献[3,5]. (12)和(13)式皆为非齐次波动方程,其完全解应是齐次波动方程的通解 φ_{10} (或 φ_{10}) 与非齐次特解 φ_{11} (或 φ_{11}) 之和,即

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}, \quad (14)$$

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}. \quad (15)$$

φ_{11} 中应包括 Q 谐波^[1]和“反射”的二阶谐波,前者是与(12)式等号右边 α_1 相对应的非齐次解,后者是与非齐次项 α_2 相对应,这里在反射二字加了引号,是因为这种谐波并非由于在边界上有二阶谐波入射所产生的,而是由于入射了一阶场,通过介质的非线性产生的反射场. Q 波的解已在文献[1]中给出,这里的任务是如何选取“反射”二阶谐波解?从上一节的分析可知,为

了满足边界条件,从而使问题可解,选取形如(10)式的特解是适宜的,即

$$\varphi_{11} = \left\{ \frac{\alpha_1}{k_z^2} + \alpha_2 \left[\exp(-2jk_z z) \cdot \left(-\frac{z}{jk_z} + \frac{1}{4k_z^2} \right) + V^2 \exp(2jk_z z) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{z}{jk_z} + \frac{1}{4k_z^2} \right) \right] \right\} \exp(-2j(\omega t - k_x x)), \quad (16)$$

式中等号右边花括号中的第一项是 Q 波解^[1], V 是平面波的反射系数. 同理可得

$$\varphi_{11} = A \exp[2j(k_x x - l_z z - \omega t)] \cdot \left(-\frac{z}{jk_z} + \frac{1}{4l_z^2} \right). \quad (17)$$

现在讨论齐次通解 φ_{10} 和 φ_{10} . 一般而言, 齐次波动方程有两个独立的通解, 即有两个积分常数待定, 上下两种介质内, 积分常数共有 4 个, 而边界条件只有两个, 初看, 条件似乎不够, 但实际上并非如此. 因为能常的一阶入射波是在一种介质内 (例如这里是介质 I), 故第 II 介质内只能有一阶透射波, 通过非线性相互作用, 它产生二阶“透射”波, 故在第 II 介质中, 齐次通解只能有一项. 而在第 I 介质中, 只有一阶入射场通过非线性自作用产生二阶“入射”场, 根本不存在原始的二阶入射场, 因此, 介质 I 中的齐次通解也只能有一项. 这样, 可以得到

$$\varphi_{10} = F_1 \exp[2j(k_x x + k_z z - \omega t)], \quad (18)$$

$$\varphi_{10} = F_2 \exp[2j(k_x x - l_z z - \omega t)], \quad (19)$$

F_1, F_2 为积分常数, 由边界条件确定.

正如文献[3]中指出, 由于各阶谐波之间不独立, 边界条件的严格陈述有一定的困难. 但如果假设各阶场在边界上分别连续, 则它们的和在边界上也连续 (反之, 不一定成立), 故在这里可以认为在平面边界面上, 各阶场分别连续, 即 (文献[3]中少了一个因子 4, 这里改正)

$$p_1^{(2)} = 4\rho_1 \omega^2 \varphi_1 + 2k_z^2 \omega^2 \rho_1 V \exp[2j(k_x x - \omega t)], \quad (20)$$

$$p_1^{(2)} = 4\rho_2 \omega^2 \varphi_1. \quad (21)$$

边界条件叙述如下, 当 $z = 0$ 时, 有

$$p_1^{(2)} = p_1^{(2)}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}. \quad (23)$$

将(16)–(21)式代入(22)和(23)式, 可得确定积分常数 F_1 和 F_2 的代数方程如下:

$$F_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} F_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{A}{4l_z^2} - \frac{\alpha_1}{k_z^2} - \frac{1}{2} k_z^2 V - (1 + V^2) \frac{\alpha_2}{4k_z^2}, \quad (24)$$

$$F_1 + \frac{l_z}{k_z} F_2 = -\frac{l_z}{k_z} \frac{A}{4l_z^2} + \frac{A}{2l_z k_z} - \frac{\alpha_2}{k_z^2} (1 - V^2). \quad (25)$$

F_1 和 F_2 方程组的系数行列式为

$$\Delta = \frac{l_z}{k_z} + \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1 C_1 \cos \theta'}{\rho_2 C_2 \cos \theta} + 1 \right), \quad (26)$$

θ 和 θ' 分别为一阶场的入射角和折射角. F_1 和 F_2 可从(24)和(25)式得到

$$F_1 = -\frac{\alpha_2}{4k_z^2} (1 - V^3) + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\rho_2 A}{2\rho_1 l_z k_z} - \frac{l_z \alpha_1}{k_z^2} - \frac{1}{2} l_z k_z V \right], \quad (27)$$

$$F_2 = -\frac{A}{4l_z^2} + \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{A}{2l_z k_z} + \frac{\alpha_1}{k_z^2} + \frac{1}{2} k_z^2 V + \frac{\alpha_2 V^2}{4k_z^2} \right\}. \quad (28)$$

将 F_1 和 F_2 代入(18)和(19)式, 将得到的结果以及(16)和(17)式代入(14)和(15)式, 便得到 φ_1 和 φ_1 , 再利用(20)和(21)式得到两种介质中的二阶谐波声压.

- [1] Qian Zuwen, *Scientia Sinica A*, **25**(1982), 492.
- [2] Qian Zuwen, Zheng Xiaoyu, *Chinese Phys. Lett.*, **7**(1990), 72.
- [3] Qian Zuwen, Zheng Xiaoyu, *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 305.
- [4] 钱祖文, 非线性声学, (科学出版社, 北京, 1992).
- [5] Qian Zuwen, "Reflection of finite-amplitude Sound Wave in Solid on a boundary", International Workshop, On Physical Aconstics (Nanjing, August, 1—4, 1990).
- [6] 郑晓瑜、钱祖文, 物理学报, **39**(1990), 89.
- [7] F. D. Cotaras *et al.*, *proc. 13th ICA*, (yugoslavia, 1989), P. 263.

SPECIAL SOLUTION OF SECOND HARMONIC WAVE EQUATION IN NONLINEAR ACOUSTICS AND APPLICATIONS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEM

QIAN ZU-WEN

Institute of Acoustics, Academia Sinica, Beijing 100080

(Received 29 January 1992)

ABSTRACT

Based on the perturbation theory, an investigation on reflection and refraction of nonlinear wave on a boundary in fluids or solids was carried out a familiar result was obtained that the second harmonic wave always satisfies an inhomogeneous wave equation. In order to find its special solution, the method of separated variables as well as Lagrange's method of variation parameters were invoked, and a trouble to the boundary-value problem of nonlinear acoustics will consequently result in that a separation constant is to be determined. In this paper, the constant was determined and the special solution was given uniquely. It is shown that a paradox will occur unless we select a special solution from the following two solutions, which are accumulation along the direction either parallel to or perpendicular to the boundary plane. Whether one can be selected depends on the boundary situation. By using the theory, the reflection and the refraction on a plane boundary were analysed. Furthermore, it is pointed out that this theory can deal with all of the boundary-value problems in nonlinear acoustics.

PACC: 4325;4330