活动标架系下 $O(3)$ 非线性 σ 模型 Lax-pair 矩阵的 Poisson-Lie 结构

丁祥茂　　王延申　　侯伯宇
西北大学现代物理研究所，西安　710069
1993 年 3 月 24日收到

在 $O(3)/O(2)$对称空间上给出了非线性 σ 模型的 Poisson-Lie 括号，用协变分解的方法讨论了活动标架与固定标架系的协变关系。

PACC： 0220；0290；0340K

一、引　　言

非线性 σ 模型是一种可积二维非超定域模型，其相互作用不是靠对自由场拉氏量外加相互作用部分，而是靠几何方法由流形度规所决定的联络与曲率引入[1]．它在 Riemann 对称空间上正则结构已被 Maillet 等人在固定标架下详细地讨论过[2,3]，它的Lax-pair 空间分量 L_1 的 Poisson-Lie 括号是非超定域型的，由依赖于场量的 r 和 s 矩阵来决定．本文将用协变分解的方法在 $O(3)/O(2)\simeq S^2$ 的对称空间上讨论非线性 σ 模型的 Lax-pair 空间分量 L_1 矩阵的 Poisson-Lie 括号，得到的 r 和 s 矩阵可以清楚地看出除了流形联络以外不依赖于场量。

二、活动标架系的建立

$O(3)$ σ 模型的拉氏量为[4]

$$L=\frac{1}{8}\ \mathrm{Tr}(\partial_\mu N(x)\partial^\mu N(x)),\tag{1}$$

其中 $N(x)=N^a(x)\sigma_a\ (a=1,2,3)$，
σ_a 是三个 Pauli 矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$N(x)$ 满足约束

$$N^2(x)=\sum_{a=1}^{3}(N^a)^2I=I,\tag{2}$$

I 是 2×2 单位矩阵．由(1)式和约束方程(2)式可以得到运动方程为

$$\partial_\mu K^\mu = 0, \qquad K_\mu = -\frac{1}{2} N\partial_\mu N, \tag{3}$$

其 Noëther 流 $J_\mu = \mathrm{Tr}(K_\mu G)$, (4)

其中 $G = G^a\sigma_a$ (G^a 是常数),

K_μ 的 Poisson-Lie 括号为[3]

$$\{K_0(x)\otimes, K_0(y)\} = -\frac{1}{2}[1\otimes K_0, C]\delta(x-y),$$

$$\{K_0(x)\otimes, K_1(y)\} = -\frac{1}{2}[1\otimes K_1, C]\delta(x-y) + J(y)\delta'(x-y),$$

$$\{K_1(x)\otimes, K_1(y)\} = 0, \tag{5}$$

其中C是 Casimir 算符,其定义见下文. 经过简单的计算可知 K_μ 与 $N(x)$ 反对易:

$$[K_\mu, N]_+ = 0, \tag{6}$$

故可将 K_μ, N 看成 E^3 中的活动标架,场流形的法方向是 $N(x)$. 由于 $N(x)$ 取值在对称空间 $O(3)/O(2)$ 上,所以可引入局域规范变换 $g(x)$, 使法向量 $N(x)$ 变为与场量无关:

$$N(x) \to g^{-1}(x)N(x)g(x) = n = \sigma_3, \tag{7}$$

n 是对合自同构算子, $n^2 = 1$. $g(x)$具有 $U(1)$ 规范自由度, $g(x) \to g'(x) = g(x)g_0(x)$, 只要 $g_0(x)$ 满足 $g_0(x)\sigma_3 g_0^{-1}(x) = \sigma_3$, 令

$$T_a = \frac{1}{2i}\sigma_a,$$

选取 $g(x) = \exp(\varphi T_3)\exp(\theta T_2)$, 使得(7)式成立,则 K_μ 协变为

$$k_\mu = g^{-1}(x)K_\mu(x)g(x). \tag{8}$$

引入纯规范势 $a_\mu = g^{-1}\partial_\mu g$, 则 a_μ 可分解为[4]

$$a_\mu = k_\mu + h_\mu, \tag{9}$$

在固定标架系下, $g = 1$, 则

$$A_\mu = 0, \quad H_\mu = -K_\mu. \tag{10}$$

由(3),(8)—(10)式可得

$$k_\mu = \frac{1}{2} n[n, a_\mu],$$

$$h_\mu = \frac{1}{2} n[n, a_\mu]_+. \tag{11}$$

现在用流形上的度规和联络来表示(11)式. 首先在 $O(3)/O(2) \simeq S^2$ 流形上选正交标架 e_1, e_2, 令 $e_3 = e_1 \times e_2$, 流形上的线元

$$dx = e_1\omega_1 + e_2\omega_2 \tag{12}$$

其中 $\omega_i = \sqrt{g_{ij}}du^j$ ($u^1 = \theta$, $u^2 = \varphi$, g_{ij} 是流形度规), u^1, u^2 是流形上的坐标. 并有 Gauss-Weingavtan 公式 $de_i = e_j\omega_{ji}$, 则

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = -\omega_{21} = -\cos\theta d\varphi, && d\omega_{12} = \omega_1\wedge\omega_2, \\ &\omega_{13} = -\omega_{31} = \omega_1, && d\omega_1 = -\omega_{12}\wedge\omega_2, \\ &\omega_{23} = -\omega_{32} = \omega_2, && d\omega_2 = -\omega_1\wedge\omega_{12}. \end{aligned} \tag{13}$$

因为 ω_{ij} 和 ω_k 都是 1-形式,所以可用 ω_k 来展开 ω_{ij}

$$\omega_{ij}=\Gamma^k_{ij}\omega_k,$$

其中 Γ^k_{ij} 称为联络,

$$\Gamma^2_{12}=-\Gamma^2_{21}=-\cot\theta,$$

选正交标架的 e_3 沿场量 $N((x)=(N_1,N_2,N_3)$,注意到 $N=N^a\sigma_a$,可将(7)式推广为

$$g^{-1}e^a_i\sigma_a g=\sigma_i. \tag{14}$$

微分(14)式可得

$$g^{-1}\mathrm{d}g=\frac{1}{4}\,\mathrm{i}\varepsilon^{abc}\omega_{bc}\sigma_a. \tag{15}$$

把(15)式代入(11)式,可得

$$k_\mu=-\sqrt{g_{22}}\,\partial_\mu u^2T_1+\sqrt{g_{11}}\,\partial_\mu u^1T_2,$$

$$h_\mu=-\Gamma^2_{12}\sqrt{g_{22}}\partial_\mu u^2T_3, \tag{16}$$

其中 $g_{11}=1$, $g_{22}=\sin^2\theta$. g_{ij} 的逆矩阵为 g^{ij}, $g^{11}=1$, $g^{22}=1/\sin^2\theta$.

在 S^2 流形上,非线性 σ 模型的作用量为

$$S=-\int\mathrm{d}^2x\mathrm{Tr}(k_\mu\cdot k^\mu)$$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^2xg_{ij}\partial_\mu u^i\partial^\mu u^j, \tag{17}$$

选 θ,φ 为正则坐标,由(17)式可知正则动量为 $\pi_\theta=\delta S/\delta(\partial^0\theta)=g_{1j}\partial_0u^j=\partial_0\theta$,

$$\pi_\varphi=\delta S/\delta(\partial^0\varphi)=g_{2j}\partial_0u^j=\sin^2\theta\partial_0\varphi. \tag{18}$$

$\theta(x)$, $\varphi(x)$, $\pi_\theta(x)$, $\pi_\varphi(x)$ 满足基本 Poisson 括号:

$$\{\theta(x),\pi_\theta(y)\}=\{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}=\delta(x-y), \tag{19}$$

其余为零. 把 k_0 用正则坐标和正则动量表示为

$$k_0=k^a_0T_a=-\sqrt{g^{22}}\,\pi_\varphi T_1+\sqrt{g^{11}}\pi_\theta T_2, \tag{20}$$

利用(19)式可计算 k^a_μ,h^a_μ 之间的 Poisson 括号:

$$\{k^1_0(x),k^2_0(y)\}=h^3_0\delta(x-y),$$

$$\{k^1_0(x),k^1_1(y)\}=-\Gamma^2_{12}k^2_1\delta(x-y)+\delta^1(x-y),$$

$$\{k^2_0(x),k^1_1(y)\}=h^3_1(x)\delta(x-y),$$

$$\{k^2_0(x),k^2_1(y)\}=\delta'(x-y),$$

$$\{h^3_1(x),k^1_0(y)\}=-k^2_1\delta(x-y)+\Gamma^2_{12}(y)\delta'(x-y),$$

$$\{h^3_1(x),k^2_0(y)\}=k^1_1\delta(x-y). \tag{21}$$

另一方面,我们也可利用规范变换 $g(x)$ 从固定标架系下得到 k_μ 和 h_μ 的 Poisson-Lie 括号. 由(8)—(10)式可知

$$k_\mu=g^{-1}K_\mu g,$$

$$h_\mu=g^{-1}H_\mu g+g^{-1}\partial_\mu g. \tag{22}$$

由(15)式可知

$$g^{-1}\partial_\theta g=T_2,$$

$$g^{-1}\partial_\varphi g=-\sqrt{g_{22}}T_1-\Gamma^2_{12}\sqrt{g_{22}}\,T_3. \tag{23}$$

利用(5),(10),(20),(23)式可得

$$\{k_0(x)\otimes, k_0(y)\} = g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0\otimes, K_0\}g\otimes g + [k_0\otimes 1,\ g^{-1}\otimes 1\{g\otimes, k_0\}] + [1\otimes k_0, 1\otimes g^{-1}\{k_0\otimes, g\}] = -\frac{1}{2}[1\otimes h_0, C]\delta(x-y), \quad (24)$$

$$\{k_0(x)\otimes, k_1(y)\} = g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0\otimes, K_1\}g\otimes g + [1\oplus k_1,\ 1\otimes g^{-1}\{k_0\otimes, g\}] = \left(\frac{1}{2}[1\otimes h_1,\ C] - [1\otimes k_1,\ \Gamma_{12}^2 T_1\otimes T_3]\right)\delta(x-y) + j\delta'(x-y), \quad (25)$$

$$\{k_0(x)\otimes, h_1(y)\} = g^{-1}\otimes g^{-1}\{K_0\otimes H_1\}g\otimes g + [1\otimes h_1,\ 1\otimes g^{-1}\{k_0\otimes, g\}] + \partial_y(1\otimes g^{-1}\{k_0\otimes, g\}) = -[1\otimes k_1,\ j]\delta(x-y) + \Gamma_{12}^2(x)T_1\otimes T_3\delta'(x-y), \quad (26)$$

其中 Casimir 算符 $C = -2(T_1\otimes T_1 + T_2\otimes T_2 + T_3\otimes T_3)$, Schwinger 项 $j = T_1\otimes T_1 + T_2\otimes T_2$

三、Lax-pair 的 Poisson-Lie 括号

按照可积场论，非线性σ模型的可积性是通过其运动方程可用 Lax-pair 的零曲率条件

$$\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] = 0$$

来表达，Lax-pair 的空间分量为[4]:

$$L_1(x,\lambda) = h_1(x) - (1+\lambda^2)/(1-\lambda^2)k_1(x) - 2\lambda/(1-\lambda^2)k_0(x). \quad (27)$$

根据(21)式或者(24)—(26)式可计算 $L_1(x,\ \lambda)$ 的 Poisson Lie 括号:

$$\begin{aligned}\{L_1(x,\ \lambda)\otimes, L_1(y,\mu)\} = \delta(x-y)\{&-2\lambda\mu/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)][1\otimes h_0,\ C]\\ &+ 2\lambda/(1-\lambda^2)[1\otimes k_1, j] - 2\mu/(1-\mu^2)[k_1\otimes 1, j]\\ &+ 2\mu(1+\lambda^2)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)][[h_1\otimes 1,\ j] + [k_1\otimes 1,\ \Gamma_{12}^2 T_3\otimes T_1]]\\ &- 2\lambda(1+\mu^2)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)][[1\otimes h_1, j] + [1\otimes k_1, \Gamma_{12}^2 T_1\otimes T_3]]\}\\ &+ \delta'(x-y)\{2(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]j\\ &- 2\lambda/(1-\lambda^2)\Gamma_{12}^2(x)T_1\otimes T_3 - 2\mu/(1-\mu^2)\Gamma_{12}^2(y)T_3\otimes T_1\}. \end{aligned} \quad (28)$$

按照 Maillet 对非超定域模型的讨论,上式可写为

$$\begin{aligned}\{L_1(x,\lambda)\otimes, L_1(y,\mu)\} = r'(x,\ \lambda,\ \mu)\delta(x-y) &- [r(x,\ \lambda,\mu),\ L_1(x,\ \lambda)\otimes 1 + 1\otimes L_1(y,\ \mu)]\delta(x-y) + [s(x,\ \lambda,\ \mu),\ L_1(x,\ \lambda)\otimes 1\\ &- 1\otimes L_1(y,\mu)]\delta(x-y) - (s(x,\ \lambda,\ \mu) + s(y,\ \lambda,\ \mu))\delta'(x-y). \end{aligned} \quad (29)$$

(28),(29)两式相比较可得

$$\begin{aligned} r(x,\ \lambda,\ \mu) = &-(\lambda-\mu)(1+\lambda\mu)^2/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)(1-\lambda\mu)]j\\ &+ \lambda\mu/[(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)]C + \Gamma_{12}^2(\lambda/(1-\lambda^2)T_1\otimes T_3\\ &- \mu/(1-\mu^2)T_3\otimes T_1),\\ s(x,\ \lambda,\ \mu) = &-(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]j\\ &+ \Gamma_{12}^2(\lambda/(1-\lambda^2)T_1\otimes T_3 + \mu/(1-\mu^2)T_3\otimes T_1). \end{aligned} \quad (30)$$

定义 $H^{(r\pm s)}_{1,23}(x;\ \lambda,\ \mu,\ \eta)\delta(x-y)=\{L_1(x,\ \lambda)\otimes,(r\pm s)_{23}(y;\ \mu,\eta)\}$，经过计算，可以证明 r 和 s 矩阵满足下面的修正的杨-Baxter 方程：

$$
\begin{aligned}
&[(r+s)_{23}(x;\ \mu,\ \eta),\ (r+s)_{12}(x;\ \lambda,\ \mu)] \\
&\quad+[(r+s)_{23}(x;\ \mu,\ \eta),\ (r+s)_{13}(x;\ \lambda,\ \eta)] \\
&\quad+[(r+s)_{13}(x;\ \lambda,\ \eta),\ (r-s)_{12}(x;\ \lambda,\ \mu)] \\
&\quad+H^{(r+s)}_{1,23}(x;\ \lambda,\ \mu,\ \eta)-H^{(r+s)}_{2,13}(x;\ \mu,\ \lambda,\ \eta)=0。
\end{aligned}
\tag{31}
$$

四、讨　　论

现在把这个结果同 Forger 等人[3]在固定标架下得到的 $\bar{r},\bar{s}$ 矩阵进行比较。在固定标架下

$$
\begin{aligned}
\bar{r}=&\lambda\mu/[(1-\lambda\mu)(\lambda-\mu)]C \\
&-2(1+\lambda\mu)(\lambda-\mu)/[(1-\lambda\mu)(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]J(x), \\
\bar{s}=&-2(\lambda+\mu)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]J(x)。
\end{aligned}
\tag{32}
$$

当 L_1 矩阵作规范变换，

$$
L^g_\mu=g^{-1}L_\mu g+g^{-1}\partial_\mu g
$$

时，$\bar{r}$，$\bar{s}$ 矩阵将按以下规律变换：

$$
\begin{aligned}
\bar{r}\to r^g=&g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot\bar{r}\cdot g\otimes g \\
&-\frac{1}{2}\left(1\otimes g^{-1}\{L^g_1(x,\lambda)\otimes,g(y)\}+g^{-1}\otimes 1\{g(x)\otimes,L^g_1(y,\mu)\}\right) \\
\bar{s}\to s^g=&g^{-1}\otimes g^{-1}\bar{s}\cdot g\otimes g \\
&-\frac{1}{2}\left\{1\otimes g^{-1}\{L^g_1(x,\lambda)\otimes,g(y)\}-g^{-1}\otimes 1\{g(x)\otimes,L^g_1(y,\mu)\}\right\},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

在 $\bar{r},\bar{s}$ 中，$J(x)$ 是协变的，C 是不变的，

$$
\begin{aligned}
&g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot J(x)\cdot g\otimes g=j, \\
&g^{-1}\otimes g^{-1}\cdot C\cdot g\otimes g=C, \\
&1\otimes g^{-1}\{L_1(x,\ \lambda)\otimes,\ g(y)\}=-2\lambda/(1-\lambda^2)(j+\Gamma^2_{12}T_1\otimes T_3)\delta(x-y), \\
&g^{-1}\otimes 1\{g(x)\otimes,L_1(y,\mu)\}=2\mu/(1-\mu^2)(j+\Gamma^2_{12}T_3\otimes T_1)\delta(x-y)。
\end{aligned}
\tag{34}
$$

(34)式代入(33)式，得

$$
\begin{aligned}
r^g=&-(\lambda-\mu)(1+\lambda\mu)^2/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)(1-\lambda\mu)]j \\
&+\lambda\mu/[(\lambda-\mu)(1-\lambda\mu)]C \\
&+\Gamma^2_{12}[\lambda/(1-\lambda^2)T_1\otimes T_3-\mu/(1-\mu^2)T_3\otimes T_1], \\
s^g=&-(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu)/[(1-\lambda^2)(1-\mu^2)]j \\
&+\Gamma^2_{12}(\lambda/(1-\lambda^2)T_1\otimes T_3+\mu/(1-\mu^2)T_3\otimes T_1).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

由(30),(35)两式可看出活动标架系的 r，s 矩阵和固定标架下的 $\bar{r},\bar{s}$ 矩阵通过(33)式的联系是一致的。

作者王延申、丁祥茂衷心地感谢石康杰教授，杨焕雄、赵柳博士和杨文力同学在本工作中给予的帮

助。

[1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 79; M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **B135**(1978), 1; M. Lüscher and K. Pohlmeyer, *Nucl. Phys.*, **B137**(1978), 46; H. Eichenherr and M. Forger, *Nucl. Phys.*, **B155**(1979), 381; E. Brezin, C. Itzykson, J. Zinn-Justin and J. B. Zuber, *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 442; H. de Vega, *Phys. Lett.*, **87B**(1979), 233.
[2] J. M. Maillet, *Phys. Lett.*, **162B**(1985), 137; J. M. Maillet, *Nucl. Phys.*, **B269**(1986), 54.
[3] M. Forger, M. Bordemann, J. Laartz, U. Schäper, The Lie-Poisson Structure of Integrable Classical Non-Linear Sigma Models, Freiburg University Preprint THEP 91/11; H. Eichenherr, M. Forger, *Nucl. Phys.*, **B164**(1980), 528.
[4] Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou, Pei Wang, *J. Phys, A: Math. Gen.* **18**(1985), 165; 侯伯宇、侯伯元，物理学家用微分几何，科学出版社，(1990).

POISSON-LIE STRUCTURE OF LAX-PAIR MATRIX OF INTEGRABLE CLASSICAL NON-LINEAR SIGMA MODEL UNDER THE MOVING FRAME

Ding Xiang-mao Wang Yan-shen Hou Bo-yu
Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069
(Received 24 March 1993)

Abstract

We give out the Poisson-Lie brackets of non-linear σ model in $O(3)/O(2)$ symmetric space. Covariant properties from fixed frame to moving frame are discussed, in the process the covariant decomposing methods are used. The r-s-matrix independent of field except the connection of the space is found.

PACC: 0220; 0290; 0340K