

# 2+1 维双线性 Sawada-Kotera 方程的对称结构\*

楼森岳<sup>1)2)†</sup> 俞 军<sup>3)</sup> 翁建平<sup>4)</sup> 钱贤民<sup>3)</sup>

1) (宁波师范学院物理系, 宁波 315020)

2) (中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

3) (绍兴师范专科学校物理系, 绍兴 312000)

4) (丽水师范专科学校物理系, 丽水 323000)

(1993 年 8 月 6 日收到)

对一类 2+1 维双线性方程从两个不同角度建立了形式级数对称理论. 从一已知的时间无关对称出发或从与一维空间坐标有关的任意函数出发, 均可得到一包含时间任意函数的形式级数对称. 对于 2+1 维双线性 Sawada-Kotera 方程, 存在 6 个截断对称. 这些截断对称构成一无穷维李代数. 一些有意义的子代数(如 Virasoro 代数等)也被给定.

PACC: 0220;1110;1130

## 1 引 言

可积模型的对称性研究已经引起了人们的广泛兴趣<sup>[1]</sup>. 在 1+1 维的情况下, 利用可积模型的多 Hamilton 体系, 可以方便地构造强对称算子. 将强对称算子作用于平凡对称(恒等变换)后, 即可得到一系列非平凡的无穷多对称<sup>[2,1]</sup>. 如对于 1+1 维的 Sawada-Kotera (缩写为 SK) 方程, 我们利用强对称算子方法得到了该模型的 12 族无穷多对称<sup>[3]</sup>. 然而要研究高维可积模型的对称, 要比 1+1 维模型困难得多. 如对 2+1 维可积模型, 人们仅对某些方程在推广到 3+1 维后给出了它们的广义的强对称算子<sup>[4]</sup>, 而且这些广义强对称算子在实际应用中是很不方便的. 最近, 作者之一(楼森岳)对 KP 方程,  $Sl(\infty)$  Toda 模型等 2+1 维可积模型利用简单的直接法给出了包含无穷多任意函数的对称<sup>[5]</sup>. 并且证明这些对称构成广义的  $w_\infty$  代数<sup>[5,6]</sup>. 本文中将进一步推广利用这种方法研究 2+1 维双线性 SK 方程的对称结构.

## 2 形式理论

本节研究下述一般 2+1 维双线性方程

\* 国家自然科学基金和浙江省自然科学基金资助的课题.

† 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080.

$$(A(D_x, D_y) + D_x D_t) F \cdot F \equiv \Delta F \cdot F = 0 \quad (1)$$

的形式级数对称理论, 其中  $A(D_x, D_y)$  是双线性算子  $D_x, D_y$  的任意函数。双线性算子

$$D_x, D_y, D_t \text{ 的定义为 } \left( \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$D_x^n D_y^m D_t^l F \cdot G = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_y - \partial_{y'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^l F(x, y, t) G(x', y', t')|_{x'=x, y'=y, t'=t}. \quad (2)$$

双线性方程(1)的对称定义为(1)式的线性化方程

$$\Delta(\sigma \cdot F + F \cdot \sigma) \equiv \Delta F * \sigma = 0 \quad (3)$$

的解。即(1)式是在变换

$$F \rightarrow F + \varepsilon \sigma \quad (\varepsilon \text{ 为无穷小参量}) \quad (4)$$

下形式不变的。下面寻求(3)式的具有下述形式的形式级数解:

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \sigma[k], \quad (5)$$

其中  $f$  为时间  $t$  的任意函数,  $f^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} f$ ,  $\sigma[k]$  为  $F, F_x, F_y, \dots$  的待定函数。将(5)

式代入(3)式得

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \Delta F * \sigma[k] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k+1)} (F \sigma_x[k] - \sigma[k] F_x) = 0, \quad (6)$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \Delta F * \sigma[k] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} (F \sigma_x[k-1] - \sigma[k-1] F_x) = 0. \quad (6)$$

由于  $f$  为时间  $t$  的任意函数。因此(6)'式必须对  $f$  的各级导数成立。即

$$\Delta F * \sigma[0] = 0, \quad (7)$$

$$\Delta F * \sigma[k] + 2(F \sigma_x[k-1] - \sigma[k-1] F_x) = 0. \quad (8)$$

比较(7)与(3)式, 看到  $\sigma[0]$  本身必须是一个对称的。原则上从一个初始对称(时间无关对称)  $\sigma[0]$  出发, 通过求解递推关系(线性微分方程)(8)式, 可得到一个包含时间任意函数的形式级数对称

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \sigma[k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} [-2(\Delta F *)^{-1} F^2 \partial_x F^{-1}] \sigma[k-1] = \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} [-2(\Delta F *)^{-1} F^2 \partial_x F^{-1}]^k \sigma[0], \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $(\Delta F *)^{-1}$  为  $\Delta F *$  的形式逆算子。然而上述表达式中, 必须首先给定一个已知的时间无关对称, 然后再求解微分方程(8)以使形式算子  $(\Delta F *)^{-1}$  有意义。下面将从另一个角度来考虑(3)式的包含时间任意函数的解。设形式级数解的形式为

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k)} \sigma_n[k], \quad (10)$$

$\sigma_n[k]$  为时间无关待定函数。  $f^{(-1)} = \int^t f(t_1) dt_1$ ,  $n$  为某个正整数。 将(10)式代入(3)式得

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k)} \Delta F * \sigma_n[k] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k+1)} F^2 \partial_x F^{-1} \sigma_n[k] = 0, \quad (11)$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^{(n-k+1)} \Delta F * \sigma_n[k-1] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k+1)} F^2 \partial_x F^{-1} \sigma_n[k] = 0. \quad (12)$$

由于  $f$  为  $t$  的任意函数。 从(12)式即得  $\sigma_n[k]$  的表达式

$$\partial_x F^{-1} \sigma_n[0] = 0, \text{ 即 } \sigma_n[0] = g_n(y) F, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n[k] &= -\frac{1}{2} F \partial_x^{-1} F^{-2} \Delta F * \sigma_n[k-1] \\ &= \left( -\frac{1}{2} F \partial_x^{-1} F^{-2} \Delta F * \right)^2 \sigma_n[k-2] = \dots \\ &= \left( -\frac{1}{2} F \partial_x^{-1} F^{-2} \Delta F * \right)^k g_n(y) F. \end{aligned} \quad (14)$$

最后(10)式成为

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k)} \left( -\frac{1}{2} F \partial_x^{-1} F^{-2} \Delta F * \right)^k g_n(y) F. \quad (15)$$

从(15)式可知, 从一个  $y$  的任意函数  $g_n(y)$  出发可得到一个包含任意函数  $t$  的形式级数对称。 有意义的是在某些情况下, 形式级数(15)或(9)式成为一个有限项的截断级数对称。 下面利用本节的形式理论研究 2+1 维双线性 SK 方程的对称。

### 3 SK 方程的对称与代数

对于 2+1 维 SK 方程, 其双线性算子函数  $\Delta$  为

$$\Delta = \Delta_{SK} = D_x^6 + 5D_y D_x^3 - 5D_y^2 + D_x D_t. \quad (16)$$

由(16)式可知, 对于任意的  $F, G$ ,  $\Delta_{SK} F \cdot G = \Delta_{SK} G \cdot F$ , 即  $\Delta_{SK} F * G = 2\Delta_{SK} F \cdot G$ 。

所以对于 SK 方程, 形式级数对称(15)式可等价地写为

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n-k)} (-F \partial_x^{-1} F^{-2} \Delta_{SK} F \cdot)^k g_n(y) F. \quad (17)$$

如果取定

$$g_n(y) = \frac{1}{2 \cdot 3^{6-n} \cdot 5^{n-1} \cdot n!} y^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

则具体计算表明, 对于  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , 形式级数(17)式被自动截断为有限项, 结果为

$$\left( h = f = \frac{df}{dt} \right)$$

$$\sigma_0(h) = \frac{5}{2 \cdot 3^6} F \int^t h(t_1) dt_1, \quad (19)$$

$$\sigma_1(h) = \frac{1}{2 \cdot 3^5} y h F, \quad (20)$$

$$\sigma_2(h) = \frac{1}{2 \cdot 3} \left( xh + \frac{1}{10} y^2 \dot{h} \right) F, \quad (21)$$

$$\sigma_3(h) = -\frac{1}{9} h F_x + \left( \frac{1}{270} xy \dot{h} + \frac{1}{8100} y^3 \ddot{h} \right) F, \quad (22)$$

$$\sigma_4(h) = -h F_y - \frac{1}{15} y \dot{h} F_x + \left( \frac{1}{180} x^2 \dot{h} + \frac{1}{900} xy^2 \ddot{h} + \frac{1}{54000} y^4 \ddot{h} \right) F, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_5(h) = & -h F_t - \frac{3}{5} y \dot{h} F_y - \frac{1}{5} \left( xh + \frac{1}{10} y^2 \dot{h} \right) F_x \\ & + \left( \frac{1}{300} x^2 y \dot{h} + \frac{1}{4500} xy^3 \ddot{h} + \frac{1}{450000} y^5 \ddot{h} \right) F. \end{aligned} \quad (24)$$

由于计算的复杂性,尚未得到更多的截断对称。

进一步计算表明, SK 方程的截断对称  $\sigma_0(h) - \sigma_5(h)$  在李乘积

$$[A, B] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [A(F + \varepsilon B) - B(F + \varepsilon A)]|_{\varepsilon=0} \quad (25)$$

下构成一无限维李代数

$$\begin{aligned} [\sigma_m(h_1), \sigma_n(h_2)] = & \frac{1}{5} \sigma_{m+n-5}((2m-5)\dot{h}_1 h_2 - (2n-5)\dot{h}_2 h_1) \\ & m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, (\sigma_k(h) = 0, k < 0). \end{aligned} \quad (26)$$

对于 KP 方程,  $Sl(\infty)$  Toda 方程, 2+1 维色散长波方程等, 类似于(26)式的代数存在, 且  $m, n$  可推广为任意正整数<sup>[9]</sup>。对于 SK 方程, (26)式的  $m, n$  能否被推广至任意正整数还有待于进一步研究。本文中, 只讨论(26)式中一些有意义的子代数:

1)  $\{\sigma_0(h), \sigma_1(h), \sigma_2(h), \sigma_3(h), \sigma_4(h)\}$  构成一个无限维子代数, 且为代数(26)式的理想。

2)  $\{\sigma_5(h)\}$  构成代数(26)式的一个无限维单李代数<sup>[9]</sup>其对易关系为

$$[\sigma_5(h_1), \sigma_5(h_2)] = \sigma_5(\dot{h}_1 h_2 - \dot{h}_2 h_1). \quad (27)$$

3) 当取  $h = \exp rt$ , 并记  $\sigma_5(\exp rt) = \sigma'$ , ( $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时, 单李代数(27)式成为众所周知的 Virasoro 代数

$$[\sigma', \sigma'] = (r-s)\sigma'^{r+s} \quad (r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (28)$$

Virasoro 代数在 1+1 维可积模型, 弦理论, 二维引力, 其形场论等等物理领域中起着非常重要的作用<sup>[10]</sup>。

4) 若取  $h = t'^p$  ( $p$  为固定整数,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 并记  $\sigma_5(t'^p) = \sigma'$ , 则(27)式退化成另一种类型的 Virasoro 代数

$$[\sigma', \sigma'] = \frac{1}{p} (r-s)\sigma'^{r+s-p} \quad (r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (29)$$

5)  $\{\sigma_i(1), \sigma_j(t), i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  构成一“物理的”有限维 (12 维) 子代数。其中  $\sigma_0(1), \sigma_1(1), \sigma_2(1)$  分别表示坐标  $x, y$  和时间  $t$  的平移不变性。  $\sigma_3(t) = -tF_t - \frac{3}{5} yF_y - \frac{1}{5} xF_x$  表示时空标度不变性。  $\sigma_4(t) = -tF_t - yF_x + \frac{1}{180} x^2 F$  表示了坐标旋转和  $y$

方向的伽利略不变性。而  $\sigma_z(x) = -\frac{x}{9} F_x + \frac{xy}{270} F$  表示的是  $x$  方向的伽利略不变性。

如果选择形式级数具有(9)式的形式, 那么选择  $\sigma[0] = \sigma_n(1)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) 为出发点, 可得到完全相同的截断对称  $\sigma_n(f)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ )。

## 4 结论与讨论

本文首先对一类一般的  $2+1$  维双线性模型从两个不同的角度建立了形式级数对称理论。从一个任意已知对称(如时空平移不变对称等)出发, 可以得到一个包含任意时间函数的形式级数对称。或从一个空间坐标  $y$  的任意函数出发, 可以得到一个包含任意时间函数的形式级数对称。

对于  $2+1$  维双线性 SK 方程, 从一些已知的“物理对称”出发或选定  $y$  的任意函数为多项式形式, 得到 6 个截断对称表达式。这 6 个截断对称(包含 6 个任意函数)构成一无限维李代数。该无限维代数是两种类型的 Virasoro 代数及其它一些有意义代数的推广。在某些  $2+1$  维可积系统中(如 KP 方程,  $Sl(\infty)$  Tada 模型等), 该代数还可以被进一步推广为由无穷多截断对称构成的广义  $w_\infty$  代数。 $w_\infty$  代数已在可积模型,  $Sl(\infty)$  Tada 理论,  $w$  弦,  $w$  引力, 膜理论<sup>[6]</sup>等众多的物理理论中得到了广泛的应用。在 SK 方程中是否可以得到类似的广义  $w_\infty$  代数还有待于进一步研究。

作者之一(楼森岳)感谢与倪光炯教授、黄国翔博士、胡星标博士以及刘青平博士的讨论。

- [1] K. M. Tamizhmani, A. Ramani and B. Grammaticos, *J. Math. Phys.*, **32**(1991), 2635; A. S. Fokas and B. Fuchssteiner, *Phys. Lett.*, **A86**(1981), 341; Y. S. Li and G. C. Zhu, *J. Phys. A*, **19**(1986), 3713; C. Tian, *Scientia Sinica*, **A31**(1988), 141; Tian, C., and Y-j Zhang, *J. Phys. A*, **23**(1990), 2867; W-x Ma, *J. Phys. A*, **23**(1990), 2707; P. J. Olver, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **88**(1980), 71; W. Oevel, and B. Fuchssteiner, *Phys. Lett.*, **A88**(1982), 323; G. A. Guthrie and M. S. Hickman, *J. Math. Phys.*, **34**(1993), 193; H. H. Chen, Y. C. Lee and J. E. Lin, *Phys. Lett.*, **A91**(1982), 381; *Physica D***9**(1983), 439.
- [2] S-y Lou, *Phys. Lett.*, **B302**(1993), 261; *J. Math. Phys.*, **34**(1993), June issue; P. Han and S-y Lou, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1993), 257.
- [3] S-y Lou, *Phys. Lett.*, **A175**(1993), 23.
- [4] P. M. Santini and A. S. Fokas, *Commun. Math. Phys.*, **115**(1988), 375; A. S. Fokas and P. M. Santini, *Commun. Math. Phys.*, **116**(1988), 449; *J. Math. Phys.*, **29**(1988), 1606; B. Fuchssteiner, *Prog. Theor. Phys.*, **70**(1983), 1508; **65**(1981), 861; Nonlinear Analysis TMT 3,(1979), p. 849; A. S. Fokas, B. Fuchssteiner, *Phys. Lett.*, **86A**(1981), 341.
- [5] S-y Lou, *J. Phys. A*, (1993) (in press)
- [6] I. I. Kogan, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**(1992), 3717. I. Bakas, *Phys. Lett.*, **B228**(1989), 57; *Commun. Math. Phys.*, **134**(1990), 487; Q. H. Park, *Nucl. Phys.*, **B333**(1990), 267; I. Bakas et al., *Commun. Math. Phys.*, **151**(1993), 233.
- [7] D. David, N. Kamran, D. Levi and P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **27**(1986), 1225.
- [8] D. J. Gross et al., *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 127.

# SYMMETRY STRUCTURE OF 2+1 DIMENSIONAL BILINEAR SAWADA-KOTERA EQUATION

LOU SEN-YUE<sup>1)2)</sup>    YU JUN<sup>3)</sup>    WENG JIAN-PIN<sup>1)</sup>    QIAN XIAN-MIN<sup>4)</sup>

1)(*Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo 315020*)

2)(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

3)(*Department of Physics, Shaoxin Normal College, Shaoxin 312000*)

4)(*Department of Physics, Lishui Normal College, Lishui 323000*)

(Received 6 August 1993)

## ABSTRACT

We established a formal series symmetry theory for a type of generalized 2+1 dimensional bilinear equation in two different ways. Starting from a known time independent symmetry or an arbitrary function of 1-D space, we can get a formal series symmetry with an arbitrary function of time  $t$ . For the 2+1 dimensional bilinear Sawada-Kotera equation, there exist six truncated symmetries. These truncated symmetries constitute an infinite dimensional Lie algebra. Some significant subalgebras such as the Virasoro algebras are also given.

**PACC:** 0220; 1110; 1130