

一种数值方法定义 Hénon 映射符号动力学的讨论*

应阳君 王光瑞 陈式刚

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(1993年8月11日收到)

一种能方便地求解 Hénon 映射周期轨道的数值方法可以定义相应的符号动力学, 本文讨论了它在 (a, b) 参数平面上的有效区间, 同时分析了它在周期轨道分叉临界曲线附近个别区域出现的特殊现象.

PACC: 0545; 0260

1 引言

应用符号动力学方法, 可以把动力系统极复杂的行为用简单的符号序列方式表示出来. 一维映射的符号动力学及其在研究非线性系统周期和混沌运动中的应用, 已经取得了很好的结果^[1]. 在高维情况下, 问题要复杂得多, 它存在一维映射所没有的性质. 建立符号动力学的关键是要寻找一个适当的相空间划分. 对于一般情形如 Hénon 映射, 要求找到的相空间分割使映射动力学引起的折叠有单叶分解, 能够方便地确定逆, 并建立符号序列字母和逆算符之间的对应关系. 但是高维映射太复杂, 目前还很难对它进行透彻的研究.

现在一般认为对二维 Hénon 映射符号动力学的相空间, 应该由混沌吸引子上不稳定不动点的不稳定流形与稳定流形相切点的连线来划分. 由于 Hénon 奇怪吸引子具有无穷嵌套的自相似结构, 因此不稳定流形与稳定流形的切点可能会有无穷多个, 这样要严格确定定义符号动力学的分割将是一件困难的事情. 只是对于个别的参数点, 有这方面的工作^[2].

Biham 和 Wenzel 提出了一种数值求解 Hénon 映射 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (a - x_n^2 + by_n, x_n)$ 所有周期轨道的拓扑动力学方法^[3]. 其基本思想是: 对一系列常数 s_i , 求解下列方程:

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= s_i f_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ f_i(\mathbf{x}) &= a - x_{i+1} - x_i^2 + bx_{i-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

显然, 如果方程有满足 $f_i = 0$ 的解, 则相应的 $\{x_i\}$ 必定是映射的轨道. N 周期的轨道

* 国家基础性研究重大项目和国家自然科学基金资助的课题.

就是方程(1)同时满足周期条件 $x_{N+i}(t) = x_i(t)$ 的解。按他们的结论, 认为只要研究方程(1)对应于 $s_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, N$ 的所有随 t 趋于无穷收敛于稳定解的可能系数序列, 就能得到所有存在的周期轨道。同时, 周期轨道对应的这种 $s_i = \pm 1$ 的表示方式可以定义一个二元符号动力学: 方程(1)收敛于稳定解对应的序列 $\{s_i\}$ 是允许的, 方程(1)解发散的那些 $\{s_i\}$ 是禁止的。在典型参数值 $(a, b) = (1.4, 0.3)$ 处, 它得到了与其它方法研究完全一致的符号动力学结果。下面为便于讨论, 我们把 $s_i = 1$ 记为 R , $s_i = -1$ 记为 L , 这样的符号类似于一维单峰映象符号动力学^[1]的表示方式。

后来, Grassberger 等发现在参数点 $(1.0, 0.54)$ 应用该方法时, 得出的符号动力学存在缺陷。那么, 这样的数值方法在什么参数下能得到自洽的符号动力学? 它与已有的单峰映象符号动力学有什么样的关系吗? 我们在广泛的参数区间 $|b| < 1.0, a > 0$ 上对数值方法作了全面的计算分析, 得到的结果表明这样的数值方法在大多数的参数区间定义了有效的符号动力学, 而在少数特定区域的特殊表现在物理图象上适合对所定义的符号动力学分割的新的理解。

2 数值结果与分析

2.1 周期轨道分叉临界曲线

用数值方法我们计算了直到 10 周期的所有周期轨道在参数平面上存在区间的分布 (原则上可计算更大周期), 以 6 周期为例得到了图 1 的周期轨道存在域分叉临界曲线分布, 其意义是某个 $p = 6$ 的 $\{s_i\}$ 符号序列对应的周期轨道在分叉临界曲线的右边参数区

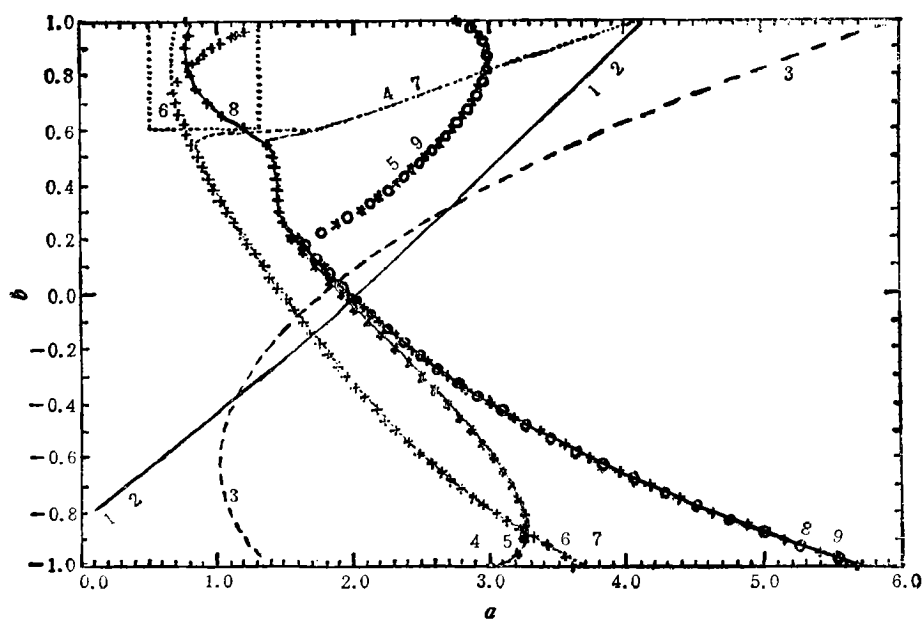


图 1 周期 6 轨道在参数平面上存在域的分叉临界曲线 1 为 RL^5 ; 2 为 RL^4R ; 3 为 RLR^5L^5 ; 4 为 RL^5R^5 ; 5 为 RL^5R^4L ; 6 为 RLR^5L ; 7 为 RLR^4 ; 8 为 RL^5R^5 ; 9 为 RL^5RL

域内都能在数值求解中找到。

黄永念曾用“代数分析法”^[4]求得了 6 周期以下的有关周期轨道的分叉临界曲线。“代数分析法”结果与图 1 是一致的。但“代数分析法”中定义的周期轨道,与用符号字表示的周期轨道不是一一对应的。图 1 的 6 周期轨道线与文献[4]中 5 条不同的 6 周期分叉临界曲线 $\Lambda_{(6)}^1, \Lambda_{(6)}^2, \Lambda_{(6)}^3, \Lambda_{(6)}^4$ 和 $\Lambda_{2 \times 3}$ 的对应关系大致为: RL^5, RL^4R 与 $\Lambda_{(6)}^1$ 一致, RL^2R^3 与 $\Lambda_{(6)}^3$ 一致, RL^3RL 与 $\Lambda_{(6)}^2$ 一致, RLR^2L^2 与 $\Lambda_{2 \times 3}$ 一致,其它字的边界与文献[4]的分叉临界曲线之间则为分段对应:

$$\begin{aligned} RL^2R^2L: -1.0 < b < 0.2 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^1, \\ 0.2 < b < 1.0 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^2; \\ RLR^3L: -1.0 < b < 0.75 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^1; \\ RLR^4: -1.0 < b < 0.55 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^1, \\ 0.55 < b < 1.0 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^2; \\ RL^3R^2: -1.0 < b < 0.2 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^2, \\ 0.2 < b < 0.55 & \text{ 对应于 } \Lambda_{(6)}^1. \end{aligned}$$

这就是说,某些字所代表的周期轨道在不同的 b 参数区间可以通过不同的分叉产生的。此外,对 4, 6, 8 等偶周期轨道的计算表明: 在 a 较小、 b 较大(如图 1 中左上角的方框所标)的部分区域很难得到 Hitzl 和 Zele^[5] 及黄永念^[4]等以前的工作中认为应存在的周期轨道解。大量的数值计算表明,这里方程(1)初值吸引域的范围很小,不能再如文献[3]中认为由 $\sqrt{a}$ 表征,这是数值方法本身的局限。

2.2 符号字与周期轨道性质

由 R, L 两个字母定义的双符号字与周期轨道 $\{x_i\}$ 本身的性质存在有一些一般的关系。从 2 周期轨道的简单推导知,其非重根解为

$$x_{1,2} = [(1-b) \pm \sqrt{4a - 3(1-b)^2}] / 2 \quad (2)$$

这个 2 周期解对应的符号字是 RL , 其存在域为 $a > 3(1-b)^2/4$, 并且

$$\begin{aligned} \text{在 } 3(1-b)^2/4 < a < (1-b)^2 \text{ 有 } x_{R,L} = x_{1,2} > 0, \\ \text{在 } a \geq (1-b)^2 \text{ 有 } x_R = x_1 > 0, x_L = x_2 < 0. \end{aligned}$$

数值计算与这些解析结果完全一致。其它周期的轨道数值结果出现的现象保留了低周期轨道解的这种性质: 随着参数 a 的增大, 周期轨道经由分叉临界出现后, 符号字表示的轨道必会达到 $x_R > 0, x_L < 0$ 。

虽然 Hénon 映射在 $b = 0$ 时退化为一维单峰映象, 但与单峰映象的符号动力学相比较, 在前面定义的 Hénon 映射双符号字体系中, 由于相空间的划分形式不象单峰映象临界点那样直接, 故符号动力学的表示也有所区别。首先, 这里用 N 个字母表示周期为 N 的轨道, 象上列 2 周期轨道 $(RL)^\infty$, 在单峰映象中只用超稳定轨道 R 表示即可, 它在不同的 a 参数区间分别是 $(RR)^\infty$ 和 $(RL)^\infty$ 。不过另一方面, 为便于比较, 借用单峰映象的轨道表示法, 在 Hénon 映射周期轨道的符号表示中, 认为一对只差最后一个字母的轨道, 可以用前面相同的 $N-1$ 个字母表示, 则单峰映象所有允许字, 随着参数 a 的增加都会出现, 但出现的顺序已有改变。不同的 b 参数下, 各个周期轨道(字)随参数 a 增加出现的顺

序不同,表现在分叉临界曲线图上,不同周期不同轨道的分叉临界曲线在参数平面上有不同位置的相交。

分析周期轨道的数值结果,在固定一个 b 参数时,随着 a 参数增大,两条经由同一个分叉临界点产生的一对周期轨道(它们只相差一个字母),产生后逐渐分离。

另外,在 3 周期轨道分叉临界曲线的计算中, RL^2 和 RLR 在 $(a,b) = (1.75,0.0)$ 等一系列点处数值解收敛特别慢。从一维单峰映象 ($b = 0$) 知道, $a = 1.75$ 正是出现 $3p$ 切分叉的临界点,这里出现的慢收敛是临界慢化现象在数值解中的表现。

3 关于符号动力学特殊表现的讨论

在某些参数条件下,数值方法及其定义的相应符号动力学会出现一些特殊现象。Grassberger 等用这样的数值方法研究 $(a,b) = (1.0,0.54)$ 点处的符号动力学时^[6],发现与 Biham 等的推想不一样:对 8, 16, 20 等周期的某些轨道字,方程(1)的数值迭代解出现了“极限环”;同时还发现这里有二个 22 周期轨道字,用本文定义的符号表示是 $RLR^3LRLR^3LRLR^3L$ 和 $RL^3R^3LRLR^3LRLR^3L$, 其数值解收敛于同一个不动点: $(0.179386, -0.227626)$, 这与“好的”符号动力学符号字与周期轨道互相一一对应的一般要求不一致。

对这些特殊表现,我们在参数平面上作了广泛的考察,对它们在参数平面上的出现及其表现得到一个较完整的图象:实际上,只有部分偶数周期的个别轨道存在这样的特殊现象,而且它们只出现在分叉临界曲线附近的少量区间内,对于不同周期具有相似的分布

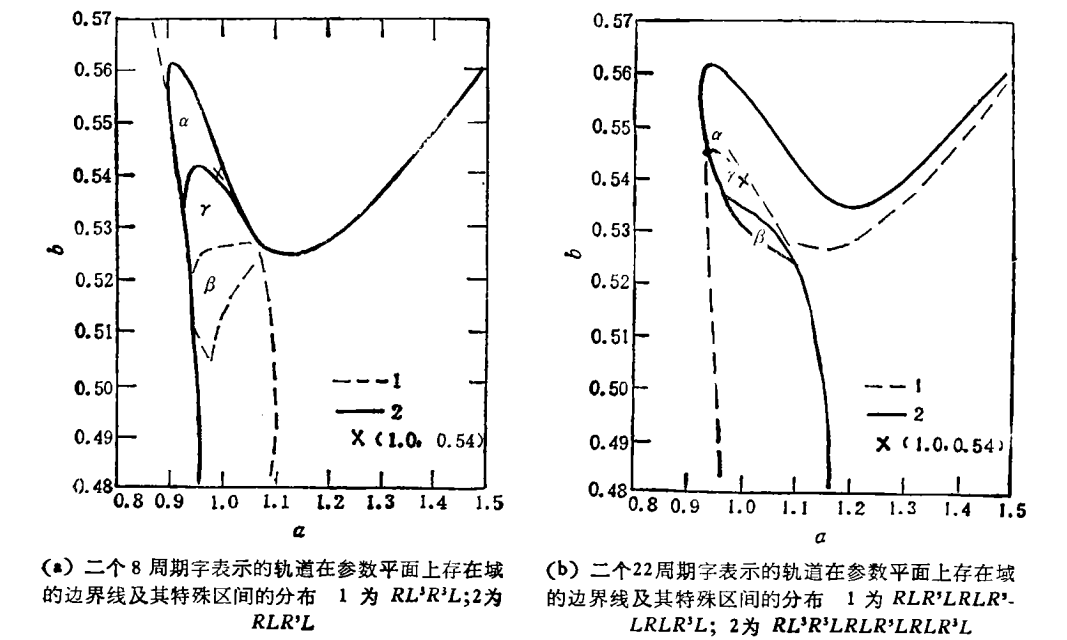


图 2

结构。以二个 8 周期字和二个 22 周期字为例: 图 2(a) 中,在“ a ”区间 8 周期字 RLR^3L

对应的数值解为极限环;在与“ α ”相对的“ β ”区间,另一个 8 周期字 RL^3R^3L 对应的数值解为极限环;在“ α ”与“ β ”之间,还有一个“ γ ”区,在“ γ ”区间 RLR^5L 和 RL^3R^3L 的数值解收敛于同一个不动点,也即这时候这两个符号字对应于吸引子上的同一条周期轨道。在数值计算中,即使方程(1)取相同的初始值,这两个字趋于不动点的轨迹是完全不同的,它们从两个不同的方向收敛到同一个不动点。类似地,图 2(b) 中“ α ”是 22 周期字 $RLR^5LRLR^5LRLR^3L$ 数值解的极限环区,“ β ”是 22 周期字 $RL^3R^3LRLR^5LRLR^5L$ 数值解的极限环区,“ γ ”是这两个 22 周期字收敛于相同不动点解的参数区域。

除了以上这样的特殊区域,在其它的参数范围,对于不同的符号字,方程(1)在轨道存在域边界线的右边区间 ($a > a_c$, a_c 为临界线上的参数值)有解,且都收敛于不同的不动点解,也即代表了不同的周期轨道,该数值方法定义的符号动力学是“好的”。Hénon 映射经典参数值 $(a,b) = (1.4,0.3)$ 在特殊区域的交集之外,而 $(a,b) = (1.0,0.54)$ 对 8 周期处于“ α ”区,对 22 周期处于“ γ ”区。在特殊区域,实际上方程(1)只有满足 $f_i = 0$ 的不动点解才对应于 Hénon 映射的周期轨道,而极限环解不是映射的周期轨道解。

在“ γ ”区间两个不同的符号字对应的方程(1)收敛于相同的稳定不动点,随着 (a,b) 参数从“ γ ”区进入“ α ”或“ β ”区,其中一个符号字对应的不动点失稳,发生 Hopf 分叉,出现极限环,但此时极限环内的这个不稳定不动点对于另一个符号字仍然是稳定不动点。图3给出了 8 周期的“ β ”区内, $(a,b) = (1.0,0.52)$ 时 RL^3R^3L 对应的方程(1)解的极限环,

此时极限环的中心对于 RL^3R^3L 是不稳定不动点,但它同时却是另一个 8 周期字 RLR^5L 对应的稳定不动点解。该不动点相应的周期轨道由稳定不动点解对应的符号字表征。因此数值求解时出现极限环可以判定对应的字为禁止。按这样的理解,数值方法定义的符号动力学在图 2(a) 中,参数取值在“ α ”区内时, RLR^5L 属于禁止字, RL^3R^3L 属于允许字;参数取值在“ β ”区内时, RLR^5L 属于允许字,而 RL^3R^3L 则属于禁止字。

在“ γ ”区域,由于出现了两个符号字对应同一条周期轨道的现象,这时相应的周期轨道是一条特殊的周期轨道:它通过了“分割线”上的点.在单峰映象中,若用 N 个字母表示周期为 N 的轨道,如

如果一条轨道中有一个点对应的字母既可以是 R 又可以是 L , 此时它必定处在临界点 C 上,轨道是一条超稳定轨道。

Hénon 吸引子具有无穷自相似的分形结构,从 $(a,b) = (1.0,0.54)$ 时直到周期27的所有周期轨道的计算结果(数值精度为 0.1×10^{-9}) 来看,吸引子上稠密的周期轨道点按前面方式定义的 R,L 分布,在分界线附近也有细致的结构,它们在 $(x_i,y_i) = (0.85,$

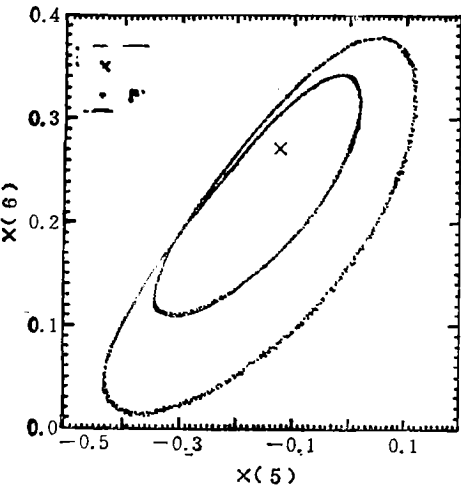
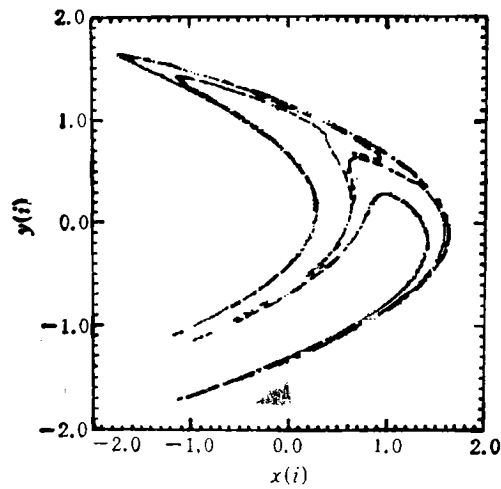
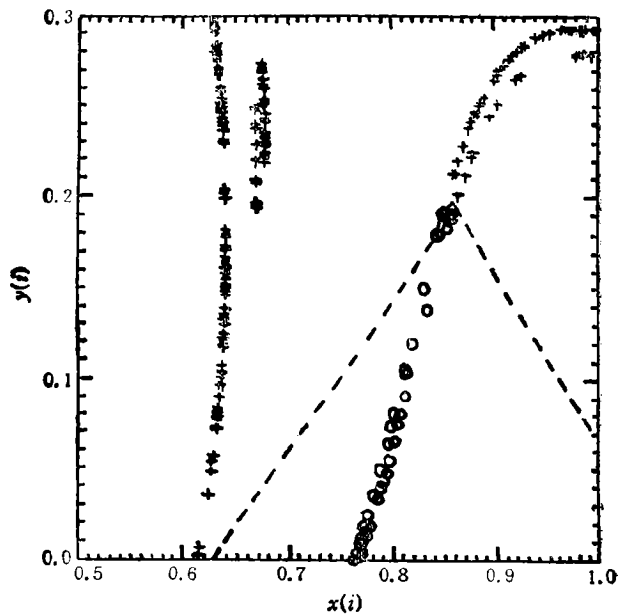


图 3 $(a,b) = (1.0,0.52)$ 时 RL^3R^3L 的数值解收敛到极限环, RLR^5L 的数值解收敛到极限环内的不动点 $\times$ 为 RLR^5L ; $\bullet$ 为 RL^3R^3L



(a) $(a, b) = (1.0, 0.54)$ 时 Hénon 映射直到周期 27 的所有周期轨道



(b) (a) 的局部放大. 图中与 R 对应的点用“+”号表示, 与 L 对应的点用“o”表示. 虚线画出了分割线可能的位置

图 4

0.18) 和 (0.18, -0.22) 附近的两个区域最先表现出来. 图 4(a) 画出了 $(a, b) = (1.0, 0.54)$ 时吸引子上所有的直到周期 27 的周期轨道点, 图 4(b) 给出 $(x_i, y_i) = (0.85, 0.18)$ 附近相应的周期轨道点按 R, L 分布的局部放大图, 同时图 4(b) 中画出了这样定义的符号动力学可能具有的分割线. 我们设想描写二维 Hénon 映射的符号动力学分割(线)是一维的(到目前还不能说明分割线是否具有分形的结构), 这时数值结果中, 同时对应于符号 R 和 L 的点是分割线上的边界点.

在 $(a, b) = (1.0, 0.54)$ 时, 22 周期有一条这样的轨道, 对应的二个符号字分别是

$RLR^5LRLR^5LRLR^3L$ 和 $RL^3R^3LRLR^5LRLR^3L$, 两个处在分割线上的边界点分别是 $(0.1793865, -0.2276262)$ 和 $(0.8449023, 0.1793865)$ 。26 周期也有一条这样的轨道, 对应的二个符号字分别是 $RLR^5LRLR^5LRLRLRLR^3L$ 和 $RL^3R^3LRLR^5LRLRLRLR^3L$, 两个处在分割线上的边界点是 $(0.1894502, -0.2120512)$ 和 $(0.8496010, 0.1894502)$ 。同样, 从 8 周期轨道的计算结果可知, $(a, b) = (1.0, 0.53)$ 时, 类似的吸引子上, 符号动力学的分割线经过 $(x_i, y_i) = (0.213817, -0.200966)$ 和 $(0.847770, 0.213817)$ 两点。

4 讨 论

我们研究的数值结果表明了以 $a = 1.4, b = 0.3$ 时的 Hénon 映射为标准吸引子, 同样的数值方法可以在广泛的参数范围内对 Hénon 映射定义类似的二元符号动力学。

如何能方便地确定一个符号动力学的分割是一个关键的问题。在本文中, 所讨论的这种数值方法定义的符号动力学, 由于出现了有二个符号字表示一条轨道的情形, 直观地理解, 我们认为它处在分割线的边界上, 这样的看法与目前得到的数值结果是可以相符的, 但由于只研究了有限周期, 这个结论是否一致有效还有待其它方面的进一步考验。

当然, 用数值方法还可以尝试别的方式定义符号动力学, 例如, 在方程(1)中取 $f_i(\bar{x})$ 为

$$f'_i(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, a, b) = \sqrt{a - x_{i+1} + bx_{i-1}} - |x_i| \quad (3)$$

这样由 f'_i 定义的符号动力学, 至少在前面凡满足 $x_R > 0, x_L < 0$ 的区域都是互相一致的, 至于它是否在 (a, b) 平面上普遍有效, 则需要进一步作计算分析。

- [1] 郑伟谋, 郝柏林, 物理学进展, **10**(1990), 316.
- [2] P., Cvitanovic G.H., Gunaratue and I. Procaccia *Phys. Rev.*, **A38** (1988), 1503.
- [3] O. Biham and W. Wenzel *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 819.
- [4] 黄永念, 中国科学 (A 辑), (1986), 822.
- [5] D.L. Hitzl and F., Zele *Physica*, **14D**(1985), 305.
- [6] P. Grassberger, H. Kantz, and U. Moeing, *J. Phys. A*, **22**(1989), 5217.

ON THE SYMBOLIC DYNAMICS OF THE HENON MAP DEFINED BY A NUMERICAL METHOD

YING YANG-JUN WANG GUANG-RUI CHENG SHI-GANG

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

(Received 11 August 1993)

ABSTRACT

We studied the effective region of parameters where a numerical method for finding all periodic orbits of the dissipative Henon map can define a good symbolic dynamics, and analysed the special expression appearing next to the critical curves of bifurcations.

PACC: 0545; 0260