

# Josephson 结中激发孤子的电流脉冲方法——原理与数值实验\*

王强华 姚希贤

南京大学物理系, 南京 210008

1993年3月6日收到

根据反散射理论讨论了电流脉冲法产生磁通孤子的阈值条件. 对甚长结作的数值实验与理论符合很好. 对有限结, 考虑到边界效应, 电流台阶范围等因素, 对孤子激发条件有额外的要求. 对圆对称环域结用脉冲法激发了孤子, 并分析了其中间波效应、外磁场等对激发条件的影响. 所有结果表明, 电流脉冲法是在 Josephson 结中激发孤子态的有效方法, 理论阈值条件可以提供有益的参考作用.

PACC: 7450; 0340K

## 一、引言

Josephson 隧道结上下超导体序参量位相差  $\varphi$  遵从修正的 sine-Gordon 方程 (SGE)<sup>[1]</sup>,

$$\varphi_{tt} - \nabla^2 \varphi + \sin \varphi = -\alpha \varphi_t + \eta, \quad (1)$$

其中下标  $t$  为对时间的偏微分,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为对空间的偏微分.  $\varphi_x, \varphi_t$  分别与  $y$  方向、 $x$  方向的局域磁场强度有关,  $\varphi_t$  为约化电压,  $\alpha \varphi_t$  为约化准粒子电流,  $\eta$  为约化均匀偏置电流. 有关单位的约化方法为,  $t$  以  $\omega_J^{-1}$  为单位,  $x$  以  $\lambda_J$  为单位, 电流密度以  $J_0$  为单位, 磁场以  $J_0 \lambda_J$  为单位, 电压以  $\omega_J \phi_0$  为单位. 下面如非特别指出, 所有量均视为无量纲量. 这里  $\lambda_J$  为 Josephson 穿透深度,  $\omega_J$  为 Josephson plasmon 频率,  $J_0$  为临界 Josephson 超电流密度,  $\phi_0 = h/2e$  为磁通量子. (1) 式中我们已略去了耗散性 (即正常) 表面电流项<sup>[2]</sup>, 因为通常情况下这一项是小到可以忽略的. (1) 式在不同情况下有不同的边界条件, 下面将具体讨论.

我们知道, 在一维情况下 (结宽  $W \ll \lambda_J$ , 结长  $L \gg \lambda_J$ ), 方程(1)的退化形式<sup>[1,2]</sup>

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\alpha \varphi_t + \eta \quad (2)$$

具有令人感兴趣的孤子解, 特别是  $2\pi$ -kink 孤子解. 每个孤子携带量子化磁通  $\phi_0$ , 可以从偏置电流中吸收能量与耗散达到功率平衡, 从而得以在隧道结中稳定地传播. 孤子

\* 国家自然科学基金资助的课题.

在结中的共振式的往复运动在结的 I-V 特性上表现为台阶式的奇异性,直流电压约为  $V_{dc} = n\phi_0\bar{c}/L$ , 其中  $n$  为孤子数目,  $\bar{c}$  为氧化层中的光速,  $L$  为结的长度。这种台阶常称作零场台阶<sup>[1]</sup>。在结的两端由于孤子的周期反射而有周期的微波辐射,频率为 10—100GHz,即使考虑在液氮温区的温度下,热噪声的影响也只使其辐射频带变为 1—10kHz 的窄带。辐射频率可以通过偏置电流、外磁场等来控制。Josephson 孤子的这种可恢复、可调节、稳定性好,辐射的窄带性质等具有良好的应用前景。例如作为超导微电子电路中的逻辑单元,作为毫米波、亚毫米波的微波发生器,作为参量放大器等等<sup>[1,2]</sup>。目前关于 Josephson 孤子动力学已有比较丰富的研究工作,诸如孤子的传播、碰撞、湮没、锁相、混沌等运动<sup>[2-4]</sup>对于准一维的 Josephson 结,如环域圆对称结,目前也有较系统的研究工作,研究了圆对称 Josephson 孤子的传播特性(包括 I-V 特性)、回波效应、几何尺寸和外磁场对孤子稳定性的影响(称为尺寸效应)等<sup>[5-9]</sup>。然而理论上的研究都是以孤子存在为前提的。虽然实验上已有研究小组通过电流脉冲方法激发了孤子<sup>[10]</sup>,但基本上仍停留在定性的理解上,为此有必要仔细探讨实验上如何激发孤子,和孤子数目的控制等一些较实际的问题。

我们注意到 Sakai 等人实验上用在 Josephson 结边缘馈以电流脉冲的方法成功地激发了孤子,并研究了孤子的一些有趣的性质和应用前景<sup>[10]</sup>。Sakai 和 Samuelsen 还用数值实验方法半解析地研究了这一问题,然而他们的模型只考虑了单孤子的激发问题,而且应用的理论方法似乎过于粗糙<sup>[11]</sup>。Kivshar 等人则从反散射方法的角度讨论了半无限结模型中孤子的脉冲激发,成功地得到了激发任意数目的孤子的对脉冲面积的阈值条件<sup>[12]</sup>。所有这些结果都肯定了电流脉冲方法的可行性。在文献[5]中提到另一种激发孤子的方法是先使系统达到所谓“旋转态”,再减小偏置电流直至旋转态失稳而得到孤子稳态。虽然在文献[5]中考虑的是环域圆对称结,但预计用电流脉冲法也是可行的。本文的目的就在于从理论上分析电流脉冲法激发孤子的条件,再结合几个较实际的系统(主要是几何构形上的差异),以数值实验进行验证和分析。

## 二、半无限结中电流脉冲激发孤子的条件

实验上以适当形式在 Josephson 结的一端馈以脉冲电流而产生一等效脉冲磁场。考虑系统处在  $x \geq 0$  的半无限空间,方程(2)在  $x = 0$  处的边界条件为

$$\varphi_x(x = 0^+) = -\frac{1}{2}h(t), \quad (3)$$

其中  $h(t)$  的时间变化如图 1 所示,其中的 dc 分量  $-h_0/2$  是所加的恒定磁场,且  $|h_0| \ll 1, T \ll 1, |a|T \sim 1$ 。如果把  $\varphi$  偶延拓到  $x < 0$  的区间,则可将边界条件并入  $-\infty < x < +\infty$  区间的 SGE 中,

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\alpha\varphi_t + \eta + h(t)\delta(x). \quad (4)$$

值得提出的是,  $\eta, h_0$  均很小,在无脉冲电流作用下,系统总处在无孤子的静态;又因  $\varphi(x)$  的偶宇称性质,脉冲激发的孤子总是成对的,且关于  $x = 0$  对称。为简单起见,在  $0 < t < T$  时间内,先忽略  $\eta, h_0$ 。方程(3)的初始条件为  $\varphi(x) = 0, \varphi_t(x) = 0$ 。在  $t < T$

时间内,方程(3)中的  $\sin \varphi$  项相对很小,故(3)式在这段时间里可简化为具有耗散和驱动源的达朗贝方程,

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \alpha\varphi = h(t)\delta(x).$$

这一线性方程的求解是容易的,在  $t = T$  时的解为(准确到  $\alpha$  的一阶项)

$$\begin{aligned} \varphi(x, T) = \frac{1}{2} a \left\{ -|x| + \frac{1}{2} |x + T| \left[ 1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \alpha(x - T) \right] + \frac{1}{2} |x \right. \\ \left. - T \right| \left[ 1 - \frac{1}{4} \alpha(x + T) \right] \right\}; \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\varphi_t(x, T) = \frac{1}{4} a \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha T \right) [\operatorname{sgn}(x + T) - \operatorname{sgn}(x - T)]. \quad (5b)$$

它们的空间分布示意图分别为图 2(a) 和 (b).

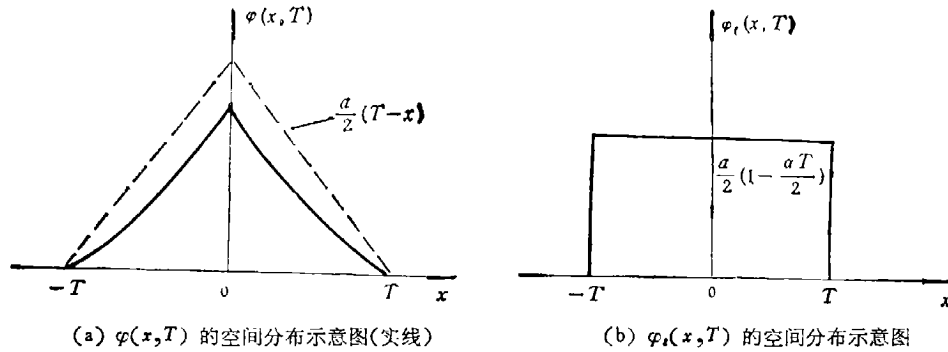


图 2

现在把  $t = T$  时的解作为初始条件,考虑到  $\alpha$  很小,方程(4)近似可积。根据反散射理论<sup>[13]</sup>,我们对(5)式作直接散射谱分析,求出对应的反射信息  $a(k)$ ,  $b(k)$  等,  $a(k)$  在一定范围中零点的存在性即意味着孤子(含呼吸子)的激发。所有的非线性激发在  $t > T$  的时间里的演化则遵从方程(4)。下面作简单分析,详见文献[12]。

在反散射理论的框架里,SGE 联系着以下线性散射问题:

$$\hat{L}\phi(x, t; \lambda) = 0, \quad (6)$$

其中

$$\hat{L} \equiv \hat{I} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \left[ \left( \lambda - \frac{1}{4\lambda} \cos \varphi \right) \hat{\sigma}_3 - \frac{\hat{\sigma}_2}{4\lambda} \sin \varphi + \frac{\hat{\sigma}_1}{2} (\varphi_x - \varphi_t) \right];$$

$$\phi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

其中  $t$  仅被理解为散射问题中的参数,  $\hat{I}$  为单位矩阵,  $\hat{\sigma}_i (i = 1, 2, 3)$  为泡利矩阵,  $\lambda$  为本征值。根据  $\hat{L}$  的基本性质,可以定义一类本征解,其边界条件为

$$\phi(x, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-ik(\lambda)x/2} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (7a)$$

$$\psi(x, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} b(\lambda)e^{i k(\lambda)x/2} \\ a(\lambda)e^{-i k(\lambda)x/2} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (7b)$$

其中  $k(\lambda) = \lambda - \frac{1}{4\lambda}$ . 按(7)式规定的条件,可以证明,  $\psi$  可向  $\lambda$  的上半复平面延拓,  $a(\lambda)$

的零点则对应于束缚态解(从而对应于孤子激发). 利用边界条件(7)式, 联合(5),(6)两式, 求解一维空间上的分块区间  $-\infty < x < -T$ ,  $-T < x < T$  和  $x > T$  上的散射问题, 各段的匹配条件给出  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  为<sup>[12]</sup>

$$a(\lambda) = e^{i k T} \left\{ \left( 1 - \frac{i k T}{2} \right) \cos \frac{B T}{2} + \frac{\alpha B T^2}{4} \sin \frac{B T}{2} - \frac{i k}{B} \sin \frac{B T}{2} \right\}; \quad (8a)$$

$$b(\lambda) = -i e^{-i k T} \left\{ \left( 1 - \frac{i k T}{2} \right) \sin \frac{B T}{2} + \frac{i \alpha B T^2}{4} \cos \frac{B T}{2} \right\}, \quad (8b)$$

其中  $k \equiv \lambda - \frac{1}{4\lambda}$ ,  $B \equiv \frac{1}{2} a(1 - \alpha T) \gg 1$ . 由于求解过程简单, 但冗长, 故只列出结果,

求解过程中用到条件  $B \gg 1$  作为近似估计.

$a(\lambda)$  在上半平面的零点对应于孤子激发. 一个束缚态孤子-反孤子对相对应的零点为

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \exp(\pm i \mu), \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

对应的解  $\varphi$  可以表示为 ( $b(\lambda) = 0$  对所有  $\text{Im} \lambda = 0$  的情况下)

$$\varphi = 4 \tan^{-1} \left[ \tan \mu \frac{\sin(\cos \mu t)}{\cosh x} \right], \quad (9)$$

而自由孤子、反孤子对的零点为

$$\lambda_1 = i \kappa, \quad \kappa > 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4\lambda_1},$$

当两孤子完全分开时, 分别可表示为(同样在条件  $b(\lambda) = 0 \quad \forall \text{Im} \lambda = 0$  下)

$$\varphi = 4 \sigma \tan^{-1} \exp \left( \frac{\mp x + \xi(t)}{\sqrt{1 - u^2}} \right), \quad (10)$$

其中  $\mp$  对应于  $x > 0$ ,  $x < 0$ ; 而  $\xi(t) > 0$ ,  $\sigma = \pm 1$  为极性, 决定于  $a$  的符号,  $\sigma = \text{sgn}(a)$ .

物理上只有  $x > 0$  部分的解是我们感兴趣的,  $x < 0$  部分仅为虚镜像而已. 呼吸子事实上对应于  $x > 0$  部分的孤子在  $x = 0$  附近的有效势阱里的振荡. 应该指出(9),(10)两式是在指定条件下的解, 对于我们考虑的激发问题, 孤子伴随着其它的非线性激发, 即  $b(\lambda) \neq 0$  的连续模. 但是由于耗散的作用, 最后的定态就只有自由孤子态, 它们开始是由  $a(\lambda)$  的零点决定的, 由方程 (8a), 令  $a(\lambda) = 0$ , 得到

$$\left( 1 - \frac{i k T}{2} \right) \cot \frac{B T}{2} + \frac{\alpha B T^2}{4} = \frac{i k}{B}, \quad (11)$$

上式满足  $\text{Im} \lambda > 0$  的解的存在条件即孤子激发条件. 易知呼吸子激发条件为<sup>[12]</sup>

$$|a|T \geq 2\pi(1 + \alpha T); \quad (12)$$

多呼吸子激发条件为<sup>[12]</sup>

$$|a|T \geq 2\pi(2N - 1)(1 + \alpha T); \quad (13)$$

自由孤子激发条件对  $k$  有额外的要求, 因  $k = \lambda - \frac{1}{4\lambda}$ ,  $\text{Re}\lambda = 0$ , 故  $|k| \geq 1$ ,

临界条件为  $k = i$ , 从而单自由孤子(含镜像虚孤子)的激发条件为<sup>[12]</sup>

$$|a|T \geq 2\pi(1 + \alpha T) + \frac{4T}{\pi}; \quad (14)$$

而  $N$  个自由孤子(含镜像)激发条件为<sup>[12]</sup>

$$|a|T \geq 2\pi(2N - 1)(1 + \alpha T) + \frac{4T}{\pi(2N - 1)}, \quad (15)$$

其中求解的方法是, 利用条件  $B \gg 1$ , 知  $S = \frac{BT}{2}$  应满足  $S = (2n + 1)\frac{\pi}{2} + \delta$ ,  $|\delta|$

$\ll 1$ , 求出  $\delta$  即得  $S$ , 再考虑到  $B = \frac{1}{2}a(1 - \alpha T)$ , 就可以得到条件(12)–(15)式。

也可以用作图法直观看出条件  $|\delta| \ll 1$ 。

值得指出的是, 脉冲激发孤子的同时也激发了大量的连续模, 这些连续模由反散射问题中的系数  $b(\lambda)$  刻画。可以在求出  $a(\lambda)$  的同时也求出  $b(\lambda)$  为 ( $k \ll T^{-1}$  条件下)<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= -ie^{-ikT} \left[ \left(1 - \frac{ikT}{2}\right) \sin \frac{BT}{2} + \frac{i\alpha BT^2}{4} \cos \frac{BT}{2} \right] \\ &\approx -i \left(1 - \frac{ikT}{2}\right) \cos \left(\frac{T}{\pi} + \frac{\pi\alpha T}{4}\right), \end{aligned}$$

上面第二个等式是用了单孤子激发条件(14)式中的等号, 这样可以考虑单孤子刚好被激发的同时激发连续模的情况。连续模的能量谱密度, 即  $\varepsilon(k) = dE_{em}/dk$  为<sup>[13]</sup>

$$\varepsilon(k) = 4\pi^{-1} \ln(1 - |b(k)|^2)^{-1}. \quad (16)$$

考虑到  $T^{-1} \gg 1$ , 对  $k$  采取截断近似, 即只估计出  $k < T^{-1}$  那部分连续模的总能量<sup>[12]</sup>

$$E_{em} = \int \varepsilon(k) dk \sim \frac{1}{T} \int_0^1 \varepsilon\left(\frac{y}{T}\right) dy \sim \frac{\text{const}}{T}.$$

而一个静孤子能量为 8 (约化单位), 可见脉冲产生的场能量只有很小部分用于产生孤子。

最后应当指出, 在作谱分析时我们完全忽略了微扰因素。孤子产生后将受以下几种因素的制约: 耗散作用使孤子在不受其它因素影响下大约运动  $\xi_0 = v_0/\alpha$  的距离而停止,  $v_0$  是初速度; 孤子受镜像反孤子的吸引, 作用力约为  $-e^{-2\xi}$  (见文献[14]),  $\xi$  为孤子距边界的距离; 孤子受边界稳恒磁场的作用力可用微扰论估计为  $4\sigma h_0 e^{-\xi}$  (见文献[12]), 其中  $\sigma = \text{sgn}(a)$ ,  $a, h_0$  同号时为斥力, 反之为引力; 孤子受均匀偏置的电流  $\eta$  的作用力也可用微扰论估计为  $\frac{\pi}{4} \eta^{[2,15]}$ 。这样合驱动力为

$$F \approx -e^{-2\xi} + 4\sigma h_0 e^{-\xi} + \frac{\pi}{4} \eta, \quad (17)$$

这里我们已经假定选择了适当的  $a$  的符号,产生的孤子使偏置电流的作用力为  $\frac{\pi}{4} \eta$ . 显

然存在一个位置  $\xi_m$ , 使得  $\xi < \xi_m$  时,  $F < 0$ ; 而  $\xi > \xi_m$  时,  $F > 0$ . 如果孤子已经位于  $\xi = \xi_m$  处且速度  $v \geq 0$  (相对于  $a$  所处的边界), 则它就可以继续穿入结内, 否则孤子由于吸引力作用将回波而只能在边界附近振荡 (即形成呼吸子) 并被耗散掉. 现在对  $v_0$  的限制条件可以写为

$$v_0/\alpha \geq \xi_m, \quad (18)$$

结合(17)和(18)式可以分析在 over-lap 结 ( $\eta \neq 0$ ) 和 in-line 结 ( $\eta = 0$ ) 等不同情况下对  $v_0$  的要求, 也即对  $|a|$  的, 除(15)式之外的进一步要求. 这是因为  $k = ik_0$  需满足  $a(k) = 0$  [见(8)式], 而孤子速度  $v_0$  满足  $v_0^2 = (k_0^2 - 1)/k_0^2$ , 其中  $k_0 \geq 1$ , 由(8)式可见

$$k_0 = -B \frac{\cos BT/2 + \alpha BT^2/4 \sin BT/2}{\sin BT/2 + BT/2 \cos BT/2}.$$

定性地说, 要产生自由孤子,  $a$  需满足条件

$$|a| \geq a_{0N}^* > a_N,$$

其中  $a_N$  为(15)式中的阈值条件,  $a_{0N}^*$  为考虑到  $v_0$  的进一步限制所规定的条件.

### 三、电流脉冲激发孤子的数值实验

对于实际物理系统, 虽然结长  $L$  有限, 但只要  $l = L/\lambda_j \gg 1$ , 并且  $l \gg \xi_m$  [见方程(18)], 仍可以用半无限结模型的结果. 考虑到  $\xi_m$  本身并非常数, 因此所谓长短, 也只是相对而言. 对于  $l$  较小的结, 由于在两边界处孤子、连续模频繁地反射, 情况比较复杂, 我们将只关心其终态是否为孤子态.

为便于与数值实验比较, 表 1 列出对于  $T \equiv 0.1; \alpha = 0, 0.05, 0.1$  的产生不同数目孤子的阈值  $|a|_{thr}$  的理论值 [见(15)式]. 从中可见,  $\alpha$  值愈大, 要求  $|a|_{thr}$  愈大, 这一点在文献[16]中也提到, 物理上这是很自然的. 另一方面我们可以估计出产生单孤子条件  $|a|_{thr}$  对应的电流脉冲高度为  $I_{max} = \frac{|a|_{thr}}{2} \cdot W(\lambda_j J_c)$ , 其中  $W$  为结的约化宽度, 取典

型值  $W = 0.1$ ,  $\lambda_j \sim 10^{-4} \text{m}$ ,  $J_c = 10^2 \text{A/cm}^2$ , 得到  $I_{max} \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{A}$ . 因此电流脉冲激发孤子在实验上应是完全可行的<sup>[10]</sup>.

数值计算采用对  $\varphi$  空间差分, 对  $\varphi_1, \varphi_2$  等进行四阶 Runge-Kutta 积分的方法, 参见文献[5]. 计算稳定性可以通过改变差分、积分步长来检验. 由于脉冲使  $\varphi, \varphi_2$  等在初始阶段的空间变化非常剧烈, 计算精度受到一定的限制. 另外要精确地定出阈值  $a_N^*$  是不太现实的, 因为需对一系列  $|a|$  值进行大量计算. 考虑到这些因素, 本文只给出  $N$  个孤子 ( $N = 1, 2, 3$ ) 的激发范围和对  $a_N^*$  的估计. 更详细的工作有待进行.

首先考虑甚长结以直接验证理论. 对于  $\alpha = 0.05, \eta = 0, |h_0| = 0.2$  (对应于  $\varphi_2$

表1 在条件  $T = 0.1$  下孤子激发的阈值  $|a|_{thr}$  与  $\alpha$  的关系 ( $N$  为孤子数目)

$\alpha$ \ $N$	1	2	3	4	5
0.00	64.1051	188.9200	314.4139	440.0049	565.6281
0.05	64.4193	189.8624	315.9847	442.2039	568.4556
0.10	64.7334	190.8049	317.5555	444.4031	571.2830

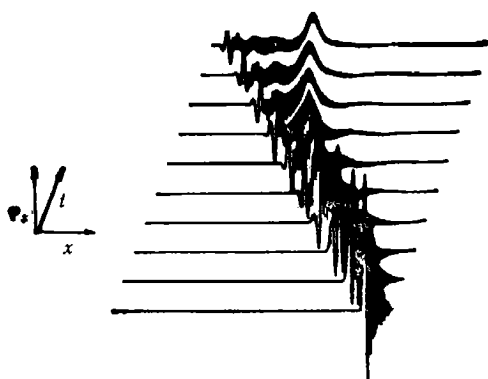
表2 数值计算结果中激发孤子的数目与  $|a|$  的关系 ( $\alpha = 0.05, T = 0.1, \eta = 0, |h_0| = 0.2$ )

$ a $	$\leq 64.5$	80.0	$80.0 \leq  a  \leq 200.0$	220.0	$220.0 \leq  a  \leq 340.0$	360.0
$N$	0	1	1	2	2	3

(0) = -0.1 的边界稳恒磁场强度),  $T = 0.1$  (脉冲宽度), 数值实验的结果列于表 2, 从中可以估计  $a_N^*$  值为

$$64.5 < a_1^* \leq 80.0, 200.0 < a_2^* \leq 220.0, 340.0 < a_3^* \leq 360.0.$$

对比表 1 给出的理论值, 并考虑到  $v_0$  的限制(见第二节)和计算精度的限制, 可见两者符合很好. 换言之, 理论可以为实验提供很好的指导作用. 图 3 至图 5 给出孤子的激发过程, 即  $\varphi_x - x - t$  关系, 其中纵轴为  $\varphi_x$  轴, 横轴为  $x$  轴.  $|a|$  值分别为 80.0, 220.0, 360.0. 由图



可见, 非孤子部分的连续模迅速衰减; 而孤子在远离边界处因无驱动, 近乎静止,  $\varphi_x$  的峰值高度从而均为 2.0. 如果加上偏置电流  $\eta$ , 孤子将运动起来并与耗散达到功率平衡<sup>[2]</sup>, 这联系到 Josephson 结的 I-V 特性, 这里不再详述.

其次我们考虑  $l = 10$  的中等长度 Josephson 结中孤子的激发问题. 与无限结模型比较, 它并非一个平庸的问题. 由于孤子、连续模均会在边界发生反射, 故它们之间存在持续的相互作用, 系统的不可积性(即使是微扰性的)可以使这种相互作用变为“非弹性”的. 真实反映孤子态稳定范围的是结的 I-V 特性上的电流台阶范围. 关于电流台阶的上、下限电流的理论估计可参阅文献[6, 7, 17]. 因此这里需考虑到的条件除  $a$  值外, 尚需选择适当的偏置电流.

图3 在条件  $\alpha = 0.05, \eta = 0, |h_0| = 0.2, T = 0.1$  下, 取  $|a| = 80.0$ , 脉冲过后经时间  $t_0 = 5.0$  后孤子的激发过程  $\varphi_x - x - t$  每条曲线随  $t$  的增加 (间隔为  $\Delta t = 5.0$ ) 向上平移  $\Delta \varphi_x = 2.0$ , 并向右平移  $\Delta x = 2.0$

于电流台阶的上、下限电流的理论估计可参阅文献[6, 7, 17]. 因此这里需考虑到的条件除  $a$  值外, 尚需选择适当的偏置电流.

零外场下 overlap 结中, (2) 式的边界条件为  $\varphi_x|_{边界} = 0$ , 而  $\eta$  表示偏置电流. 表 3 给出对于  $l = 10, \alpha = 0.05$ , 脉冲峰宽  $T = 0.1$  情况下, 对不同  $a$  和  $\eta$  值激发孤子的情

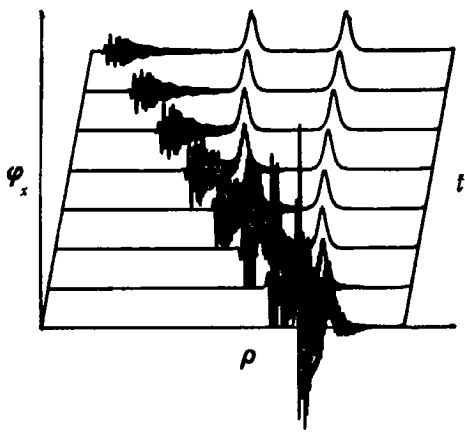


图4 除  $|a| = 220.0$ ,  $t_0 = 40.0$ ,  $\Delta t = 10.0$  以外,其余说明同图3

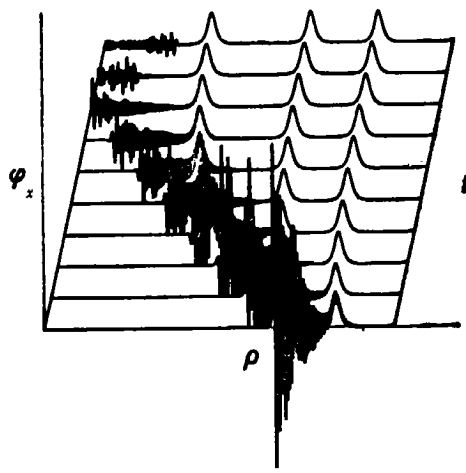


图5 除  $|a| = 360.0$ ,  $t_0 = 25.0$ ,  $\Delta t = 10.0$  以外,其余说明同图3

况。从中看到,在适当的电流偏置条件下,理论值  $a_{thr}$  与实际阈值  $a_N^*$  (估计)仍很符合。比如  $a_1^* \sim 64.4$ ,  $a_2^* \sim 196.0$ ,  $a_3^* \sim 320.0$ 。值得指出的是在  $\eta = 0.2$  时,即使  $|a| = 320.0$ ,终态也只是双孤子态而非预期的三孤子态,其原因就在于第三电流台阶的下限电流比 0.2 大。

表3 在条件  $l = 10$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $T = 0.1$  下在 over-lap 结中激发孤子的情况 (整数表示孤子个数,0 表示零电压态,下同)

$\eta \backslash a$	$\leq 60.0$	64.4	$65.0 \leq a \leq 192.0$	196.0	316.0	320.0
0.1	0	1	1	2		
0.2					2	2
0.3						3

对于 in-line 结,情况是类似的。这里  $\eta = 0$ ,且零外磁场下(2)式的边界条件为  $\varphi_x|_{x=0} = -\kappa$ ,  $\varphi_x|_{x=l} = \kappa$ ,其中  $\kappa = I_{dc}/W$  (约化单位)反映了偏置电流的大小。在此情况下,孤子主要在边界反射时吸收能量,因此可以预计其激发对脉冲  $a$  的要求更高,以使孤子以足够的速度被激发出来。表4列出对  $l = 10$ ,  $\alpha = 0.05$  的 in-line 结,在脉冲宽度  $T = 0.1$  条件下,激发孤子的情况。从中可以看出,  $a_1^* \sim 64.6$ ,  $a_2^* \sim 200.0$ ,这里同样反映了对偏置电流 ( $\kappa$ ) 的要求。比如  $a = 200.0$  的情况下,  $\kappa = 0.2$  时得到的是单孤子态,而  $\kappa = 0.4$  时得到的是预期的双孤子态。另外,表4还反映了电流台阶的上限问题。比如  $\kappa = 0.5$ ,  $a = 340$  情况下按理论估计应为三孤子态,即使三孤子态不稳定也至少为双孤子态,但实际为单孤子态。原因是第二电流台阶的上限小于第一电流台阶上限,  $\kappa = 0.5$  可能已超过第二台阶上限,但仍在第一台阶范围之内。表4中没有列出三孤子态情况,因为数值实验中没有发现。这一现象的原因可能是第三电流台阶太窄,换言

表 4 对  $l = 10, \alpha = 0.05$  的 in-line 结, 在条件  $T = 0.1$  下激发孤子的情况

$\kappa \backslash a$	$\leq 60.0$	64.6	194.0	200.0	320.0	330.0	340.0
0.2	0	1	1	1			
0.4			1	2			
0.5					2	2	1
0.6						1	

之, 三孤子态在这一系统中本来就不甚稳定。为此, 另外对  $l = 10, \alpha = 0.02$  的 in-line 结进行了数值实验, 发现  $\kappa = 0.5, a = 340.0$  时可以得到三孤子稳态。因此, 有限结确有其特殊性。尽管如此, 理论阈值  $a_{thr}$  仍是有益的参考。

最后考察圆对称环域 Josephson 结中的孤子激发问题。值得指出的是, 我们将考虑的环境结其结宽较大 (相比于  $\lambda_J$ ), 自场效应使得场  $\varphi$  完全有可能具有圆对称性。若假定  $\varphi$  初始为圆对称分布, 则这种对称性具有局域稳定性。尽管现实中有可能有内禀的或外禀的噪声干扰, 角度方向的扰动, 几何缺陷, 对圆对称孤子的稳定性有一定的影响。但是, 上述噪声总可以通过与外界小心的屏蔽, 降低工作温度, 提高结的制作工艺来加以抑制, 而且角度方向的扰动只要小, 对圆对称性并非一个致命因素。事实上后者在文献[18]中关于  $\phi^4$  模型和 sine-Gordon 模型中的圆对称脉冲激发的问题中提到, 其结果是肯定的, 即这些激发对小角度扰动(无耗散情况)是稳定的。这种稳定性与上面提到的具有简并“真空”态(基态)的系统中的大幅度脉冲激发的“自成形”(self-forming)性质有内在关系。物理上很自然的解释是角度无关的解使系统的哈密顿量最小。对于我们关心的圆对称孤子, 还有一种物理上更为直观的解释。文献[8]中已求得单孤子的能量为

$$E = 16\pi R / \sqrt{1 - u^2},$$

其中  $R$  为孤子中心位置,  $u$  为其速度。现在若视孤子为“无结构”的一条圆圈, 则单位长度的能量即能量密度为  $dE/dl = 8/\sqrt{1 - u^2}$ 。物理上这将对对应于一种张力<sup>[19]</sup>, 它决定于能量密度和圆圈的局域曲率。可以想象, 如果这一圆圈稍有变形, 则张力的作用将尽可能使圆对称性得以恢复。更有甚者, 耗散因素将使这种对称性更趋稳定。关于环境结中的圆对称性稳定性问题, 目前正在作系统的研究, 将另文报道。

考虑到以上的讨论, 我们将局限于考察圆对称孤子的激发问题。在文献[5]中曾经提到一种方法是先使系统到达旋转态, 再减小电流使旋转态失稳, 然后得到孤子态。但其不完善之处是孤子数目的控制问题没有讨论。尽管如此, 这一方法原则上也适用于 over-lap 结和 in-line 结。我们注意到文献[20]中提到过旋转态-孤子态转变, 但没有明确指出这种转变可以作为激发孤子的有效途径。之所以有效, 是因为从任何初态出发到达的旋转态是等同的, 其中的初态包括较现实的零电压态。

无论从控制和效率方面看, 电流脉冲方法均比较好。又由于环境结与 in-line 结虽

有类似,但也有特殊性质,故有必要对此加以讨论。圆对称环域结(下面简记为环结)由下面的方程描述<sup>[5-9]</sup>:

$$\varphi_{rr} - \varphi_{\rho\rho} + \sin\varphi = \frac{1}{\rho} \varphi_{\rho} - \alpha\varphi,$$

其中  $\rho$  为半径,  $\rho_i \leq \rho \leq \rho_o$ ,  $\rho_i, \rho_o$  分别为环域的内、外半径。此外,方程的意义完全与(2)式同 ( $\eta = 0$ )。关于圆对称孤子的性质,目前已有了较详细的研究<sup>[5-9]</sup>。圆对称孤子的特殊性在于其可能的回波效应<sup>[6]</sup>,这与孤子的边界反射耗散<sup>[11]</sup>结合在一起不仅对电流台阶的下限有影响<sup>[6]</sup>,而且也由于电流台阶上限是有限的,下限随环结内径减小而增大<sup>[9]</sup>,结果台阶电流范围愈来愈小,直至单孤子态根本就不稳定,这就是文献[9]提到的尺寸效应。适当的外磁场可以减小尺寸效应。外磁场和偏置电流通过边界条件体现出来<sup>[9]</sup>,

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho}(\rho = \rho_i) &= I_H/2\pi\rho_i \equiv \kappa_i, \\ \varphi_{\rho}(\rho = \rho_o) &= (I_H + I)/2\pi\rho_o \equiv \kappa_o + \gamma, \end{aligned}$$

其中  $\kappa_o = I_H/2\pi\rho_o$ ,  $\gamma = I/2\pi\rho_o$ 。  $\kappa_i, \kappa_o$  为外磁场电流  $I_H$  在内、外边界上产生的等效磁场,  $\gamma$  为约化偏置电流。这些量的引入,我们可以直接与 over-lap 结和 in-line 结进行对比。

对  $\rho_i = 20$ ,  $\rho_o = 30$ ,  $\alpha = 0.05$  的环结,取脉冲宽度  $T = 0.1, \gamma = 0.8, \kappa_i = 0$ , 当  $|a| = 134.0$  时,计算结果为单孤子稳态;其余参数相同,取  $|a| = 202$ , 没有产生预期的双孤子态而回到零电压态;若加上负外场  $\kappa_i = -0.4$ , 则只得到单孤子态;其余参数同,而取  $\kappa_i = -0.4, \gamma = 0.9, |a| = 202$  时,则成功地得到了双孤子稳态。另外对  $\alpha = 0.01$  的较小耗散的情况进行了数值实验,根据文献[7]中的电流台阶结果,第二台阶的电流范围为  $\gamma \in [0.167, 0.500]$ , 因此取  $\rho_i = 20, \rho_o = 30, \alpha = 0.01, \kappa_i = 0 (\kappa_o = 0)$ ,  $\gamma = 0.35, T = 0.1$ , 取  $|a| = 202$  时,结果为零电压态;其余参数同,而  $\kappa_i = -0.3$  ( $\kappa_o$  与  $\kappa_i$  有关) 时则成功地得到双孤子稳态。负外场的作用在于使孤子传播到内边界时及时补充能量,反射后又以足够大的初速向外扩展到外边界,否则就会发生回波效应<sup>[6]</sup>。详细工作正在进行中。

综上所述,电流脉冲方法激发孤子是一种有效途径。实验上已经实现的是 over-lap 结中的孤子激发<sup>[10]</sup>,但对孤子数目的控制没有明确的报道。

## 四、总 结

本文概述了电流脉冲方法激发孤子的原理,根据反散射理论中的直接散射问题的求解,可以得出产生孤子所要求的脉冲峰高(宽度一定时)的阈值。由于虚实孤子间的有效作用及边界、耗散等因素,对阈值有进一步要求,对此就单孤子情况给予了解释。为验证理论的可行性,对甚长 Josephson 结(即半无限结模型)的情况进行了仔细的数值计算实验,结果与理论符合甚好。最后对较实际的中等长度结进行了数值实验,在各孤子态稳定范围内(即 I-V 特性中的电流台阶范围内),证实确实能激发孤子。较为特殊的是圆对称环域结中的孤子激发,由于可能的回波效应,对激发出的孤子的初速有较高要求;另外,适当的外磁场可以明显改善激发条件。关于环域结的具体研究和实际的物理实验有待进行。

- [1] A. Barone and G. Pagano, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York (1982).
- [2] D. MacLaughlin and A. Scott, *Phys. Rev.*, **A18**(1978), 1652.
- [3] M. Salerno, *Phys. Lett.*, **A144**(1990), 453.
- [4] R. Monaco, S. Pagano and G. Costabile, *Phys. Lett.*, **A131**(1988), 122.
- [5] Q. H. Wang, W. Wang and X. X. Yao, *J. Phys.*, **C4**(1992), 4653.
- [6] Q. H. Wang, W. Wang and X. X. Yao, *J. Appl. Phys.*, **71**(1992), 1014.
- [7] W. Wang, Q. H. Wang and X. X. Yao, *J. Appl. Phys.*, **70**(1991), 6970.
- [8] Q. H. Wang, W. Wang and X. X. Yao, *Phys. Rev.*, **B45**(1992), 3013.
- [9] Q. H. Wang, W. Wang and X. X. Yao, *Phys. Rev.*, **B46**(1992), 11730.
- [10] See e. g., H. Akoh, S. Sakai, A. Yagi and H. Hayakawa, *IEEE Trans. on Magn.*, **Mag-21**(1984), 737.
- [11] S. Sakai and M. Samuelsen, *Appl. Phys. Lett.*, **50**(1987), 1107.
- [12] Y. Kivshar and B. Malomed, *Sov. Phys. JETP*, **68**(1989), 421.
- [13] M. Ablowitz, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Studies in Appl. Math. **4**, Philadelphia.
- [14] J. Rubinstein, *J. Math. Phys.*, **11**(1970), 258.
- [15] Y. Kivshar and B. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989) 763.
- [16] V. Kamemsky and Z. Kudriasheva, *Physica*, (**B+C**)**38**(1988), 4677.
- [17] S. Pagano, M. Sorensen, P. Christiansen and R. Parmentier, *Phys. Rev.*, **B38**(1988), 4677.
- [18] I. Bogolubsky and V. Makhankov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor.* **24**(1976), 15; **25**(1977), 120.
- [19] B. Malomed, *Physica*, **D52**(1991), 157.
- [20] S. Pagano, M. Sorensen, R. Parmentier, P. Christiansen, O. Skovgaard, J. Mygind, N. Pedersen and M. Samuelsen, *Phys. Rev.*, **B33**(1986), 174.
- [21] N. Pedersen, M. Samuelsen and D. Welner, *Phys. Rev.*, **B30**(1984), 4057.

# FLUXON GENERATION BY A CURRENT PULSE IN JOSEPHSON JUNCTIONS—THEORY AND SIMULATIONS

WANG QIANG-HUA    YAO XI-XIAN

*Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210008*

(Received 6 March 1993)

## ABSTRACT

The problem of fluxon generation in Josephson junctions by a current pulse is addressed, with the help of the inverse scattering transform theory. The threshold conditions for soliton (breather or fluxon) generation are obtained analytically, with respect to relevant studies in the same direction. The reliability of the theory is examined by direct numerical experiments. Fairly good agreements exist between the theory and the numerical results, particularly in the case of semi-infinitely long junctions. Practically long ( $L \sim 10\lambda_J$ ) Josephson junctions are also explored, namely, overlap, in-line and circularly-symmetric annular junctions. Explained are those factors that complicate the generation processes such as boundary effects, stability of soliton states against the driving current, soliton return effect and the applied magnetic field (in annular junctions only). The current pulse method is shown to be effective and practical for fluxon generation in Josephson junctions.

**PACC:** 7450; 0340K