

光学非均匀复合材料的多元滞后器模型*

张 武 王 燕

(西北工业大学, 西安 710072)

(1993 年 6 月 30 日收到)

提出了光学非均匀纤维增强复合材料的复杂双折射现象的多元滞后器模型, 给出了多元滞后器矩阵以及由此衍生的一组光强、方位角及滞后量公式, 给出了多元与二元等效的证明, 并认为二元滞后量应被看作是多元滞后量的一种统计等效值。

穿过非均匀介质的偏振光具有复杂的波前, 可分解为一组具有不同空间频率的平面波, 且每一束平面波都由一对正交偏振光组成。所有这些平面波在试样前方的、垂直于原入射光方向的屏幕上任一点的干涉, 在数学上可表示为表征这些平面波的 Jones 向量的不同权值的叠加。由于每一对正交偏振光均对应于一个光学均匀微元的 Jones 矩阵, 因而可用由若干这些 Jones 矩阵的叠加所得的多元滞后量矩阵来表征光学非均匀纤维增强复合材料的双折射行为。

PACC: 7820F;8120T;4220;8170C

1 引 言

对于具有光学不均匀性的材料目前尚未见到评定其光学各向异性的透射式光弹性方法。现有评定光学各向异性或双折射率的方法都是对均质, 高度透明材料而言的。

早在 1942 年, 美国科学院院士 Jones 在发表他的有关矩阵算法的工作时, 在文章开头就明确指出: 不考虑由棱镜或透镜引起的光线偏折问题, 所有关于光学各向异性的矩阵表示方法都是建立在均质材料基础上的, 因而可假定光在试样中的传播属平面波过程。最新发展起来的透明正交异性复合材料研究, 在双折射或条纹值的测试上则仍沿用为均质材料而建立的方法及设备。从而, 需特别选择折射率尽可能相等的材料作为复合材料的纤维和基体, 而最终制成的光弹性复合材料也只能作为模拟实际复合材料的模型材料。迄今我们所见文献中的有关研究均未超出光学均匀性材料的范畴。

但是光学各向异性对于非均匀材料而言是尤其重要的。至少体现在两个方面, 一是与结构有关。复合材料一般具有结构的各向异性, 它必然反映到光学上; 其二是内部应力或应变, 由于两相模量、泊松比和膨胀系数的差异, 复合材料中普遍存在着残余应力和残余应变。内应力是裂纹、缺陷的根源和扩展策动力, 是材料性能分散可靠性差的主要原因。另一方面, 合适的内应力却有利于某些性能的提高。而且, 与裂纹、缺陷等不可逆损伤相比, 内应力具有可逆性, 可设计、可消除, 因而通过光学各向异性检测应力具有比只对裂纹、缺陷的检测具有更进一步的意义。但是, 以前的研究尚未建立起对光学非均匀的实

* 国家自然科学基金资助的课题。

际复合材料的光学各向异性进行无损检测的方法。

已有研究发现^[1,2],光在非均匀介质中的传播及其光学各向异性表征具有不同于均质材料的新规律。表现在试样在偏光场中的光强方位角曲线用传统的光弹理论无法解释。因而不能简单地套用光学均匀材料的光学各向异性评定方法。为了解释该现象已提出二元滞后器理论^[3]。该理论简单地基于纤维复合材料的两相特征(由纤维与基体这两相组成),指出用只含一个滞后量的 Jones 矩阵不能描述其特征,提出应当用两个独立的滞后量(δ_1, δ_2)来描述,由此所得的光强-方位角公式能很好地描述所发现的现象。但二元滞后量的提出并未经过严格的推理。体系由两相组成并不意味着只具有两个滞后量。事实上自试样上表面处由同一根纤维上的不同点出射的光线在试样内部中传播时一般具有不同的经历,因而组成这些光线的各对椭圆正交偏振光一般具有不同的相对滞后量。因此,认为体系只含两个滞后量在逻辑上似有问题。

2 多元滞后器理论

由衍射理论可知^[3],光在具有细观光学不均匀性的介质中传播时,将发生极其复杂的衍射,从而自试样另一侧面出射的光波将具有复杂的波前,并可按傅里叶变换分解成若干束空间频率不同的平面波。若把这若干束平面波均看作是经历了若干列均质滞后器或若

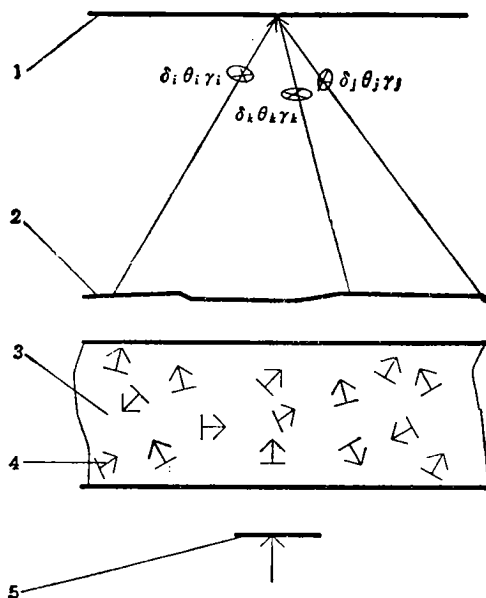


图 1 多元滞后器模型

1 为光屏; 2 为出射光波前; 3 为试样; 4 为试样内的随机衍射光波; 5 为入射光波前

千个这些均质滞后器的等效滞后器的椭圆偏振光,则试样前方垂直于光路的任一平面上任一点的光振动,均可看作来自并行排列着的若干个等效滞后器的椭圆偏振光的不同权值 γ_i 的叠加,因而可写出复合材料的多元滞后器矩阵:

$$R_{\theta_i, \delta_i, \gamma_i} = \begin{bmatrix} \sum_i \gamma_i (e^{i\delta_i} \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i) & \sum_i \gamma_i (e^{i\delta_i} - 1) \cos \theta_i \sin \theta_i \\ \sum_i \gamma_i (e^{i\delta_i} - 1) \cos \theta_i \sin \theta_i & \sum_i \gamma_i (e^{-i\delta_i} \sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 θ_i 为第 i 元滞后器的滞后量; δ_i 为第 i 元滞后器的方位角; γ_i , 第 i 元滞后器的贡献量。由多元滞后器矩阵可导出相应的公式:

在平面偏光仪亮场下,

$$I_{\parallel} = 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_j \gamma_k \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_k \sin^2 \frac{\delta_k}{2} \\ - 4 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \gamma_j \gamma_k \cos^2 \theta_j \cos^2 \theta_k \sin^2 \frac{\delta_k - \delta_j}{2}; \quad (2)$$

在平面偏光仪暗场下,

$$I_{\perp} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \sin^2 2\theta_j \sin^2 \frac{\delta_j}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \gamma_j \gamma_k \sin 2\theta_j \sin 2\theta_k \left[\sin^2 \frac{\delta_j}{2} \right. \\ \left. + \sin \frac{\delta_k}{2} - \sin \frac{\delta_k - \delta_j}{2} \right]; \quad (3)$$

在平面偏振光入射情形,

$$I_{\parallel} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \gamma_j \gamma_k \left\{ \sin^2 \frac{\delta_j}{2} [\sin 2\theta_j \sin 2\theta_k - 4 \cos^2 \theta_j \sin^2 \theta_k] \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{\delta_k}{2} [\sin 2\theta_j \sin 2\theta_k - 4 \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_j] \right. \\ \left. - \sin^2 \frac{\delta_k - \delta_j}{2} [\sin 2\theta_j \sin 2\theta_k + 4 \cos^2 \theta_j \cos^2 \theta_k] \right\}. \quad (4)$$

由于多元滞后器矩阵和公式中的 n 理论上应为无穷大, 故无法直接使用。但它有广义性, 将均质材料的光强-双折射关系作为特例之一概括于其中。而且, 与二元滞后器模型相比它更具自洽性。

3 等效性证明

多元滞后量的求解十分复杂, 有无穷多组解。经分析, 发现可以从信息量相等的角度将多元等效为二元。如对平面偏光仪亮场下的情形, 多元滞后器公式可化为 (见附录 A)

$$I_{\parallel} = A_{\parallel 0} + A_{\parallel 2} \cos(2\theta - \alpha_{\parallel 2}) + A_{\parallel 4} \cos(4\theta - \alpha_{\parallel 4}), \quad (5)$$

式中, $A_{\parallel 0}, A_{\parallel 2}, A_{\parallel 4}, \alpha_{\parallel 2}, \alpha_{\parallel 4}$ 均为与方位角无关的量。上式表示多元滞后器 $I_{\parallel}-\theta$ 曲线实质上由在 360° 内分别有两个和四个变化周期的两个正弦波及一个常数项组成。另一方面, 相应地也可将二元滞后量公式 $I_{\parallel}-\theta$ 曲线公式化为完全相同的形式。

同理, 对另外两种情形, 多元滞后量和二元滞后量公式均可化为相同的形式 (见附录 A)。

在平面偏光仪暗场下,

$$I_{\perp} = A_{\perp 0} + A_{\perp 4} \cos(4\theta - \alpha_{\perp 4}); \quad (6)$$

在平面偏振光入射情形,

$$I_{\parallel} = A_{\parallel 0} + A_{\parallel 2} \cos(2\theta - \alpha_{\parallel 2}), \quad (7)$$

式中 $A_{\perp 0}, A_{\perp 4}, \alpha_{\perp 4}; A_{\parallel 0}, A_{\parallel 2}, \alpha_{\parallel 2}$ 等均为与方位角无关的量。

这些结果表明基于 $I-\theta$ 曲线所含有的信息量的观点出发, 多元与二元等效, 因而可用二元滞后量矩阵和公式代替多元滞后量矩阵和公式表征纤维复合材料的偏振光学行为。即可用只含 $\delta_1, \delta_2, \theta_1, \theta_2$ 和 $\gamma_1 (\gamma_2 = 1 - \gamma_1)$ 等 5 个独立参量的二元滞后量公式描述所有曲线。但这 5 个参量只具有统计性的物理意义。故更确切地应称为等效二元滞后量。

4 结 论

1. 与二元滞后器模型相比, 多元滞后器模型更接近地描述了偏振光经过光学非均匀介质而传播的现象。

2. 从 $I-\theta$ 曲线信息量相等的角度, 可以证明多元滞后量与二元滞后量等效。

附 录 A

考察平面偏光仪亮场下的情形, (2) 式等号右端第一项 $\sum \sum$ 中的一项可化为

$$I_{jk} = \gamma_j \gamma_k \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_k \sin^2 \frac{\delta_k}{2},$$

◆

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \gamma_j \gamma_k \sin^2 \frac{\delta_k}{2}, \quad I_{jk} = A_{jk} \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_k = A_{jk} \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_k) (1 - \cos 2\theta_j) \\ &= \frac{A_{jk}}{4} \left\{ 1 - \cos 2\theta_j + \cos 2\theta_k - \frac{1}{2} [\cos 2(\theta_j + \theta_k) + \cos 2(\theta_j - \theta_k)] \right\}. \end{aligned}$$

令 $\theta_j = \theta + \alpha_j, \theta_k = \theta + \alpha_k$. 其意义是, 某元滞后器的方位角 θ_j 为试样宏观参考方向方位角 θ 与该元滞后器方位角的初相角 α_j 之和。代入后, 原式变为

$$\begin{aligned} I_{jk} &= \frac{A_{jk}}{4} \left\{ 1 - \cos 2(\theta + \alpha_j) + \cos 2(\theta + \alpha_k) - \frac{1}{2} [\cos(4\theta + 2(\alpha_j + \alpha_k)) + \cos 2(\alpha_j - \alpha_k)] \right\} \\ &= \frac{A_{jk}}{4} \left\{ 1 - 2\sin(2\theta + \alpha_j + \alpha_k) \sin(\alpha_j - \alpha_k) - \frac{1}{2} \cos[4\theta + 2(\alpha_j + \alpha_k)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha_j - \alpha_k) \right\}. \end{aligned}$$

再令 $S_k = \sin(\alpha_j - \alpha_k), C_{2k} = \cos 2(\alpha_j - \alpha_k), \alpha_{jk} = \alpha_j + \alpha_k$, 则上式进一步化为

$$I_{jk} = \frac{A_{jk}}{4} \left[1 - \frac{1}{2} C_{2jk} - 2S_{jk} \sin(2\theta + \alpha_{jk}) - \frac{1}{2} \cos(4\theta + 2\alpha_{jk}) \right].$$

考虑到 $S_{jk}, C_{2jk}, \alpha_{jk}, A_{jk}$ 等均为与方位角 θ 无关的量, 故上式可进一步表示为

$$I_{jk} = A_{0jk} + A_{2cjk} \cos(2\theta + \alpha_{2cjk}) + A_{4cjk} \cos(4\theta + \alpha_{4cjk}), \quad (A1)$$

式中 A_{0ik} 表示一般项 I_{ik} 中与 θ 无关的常数项; $A_{0jk} = \frac{A_{jk}}{4} \left(1 - \frac{1}{2} C_{2jk} \right)$; A_{2cik} 表示一般项 I_{ik} 中 2θ 的余

弦项的模; $A_{2cjk} = \frac{A_{jk}}{2} S_{jk}$; α_{2cik} 表示一般项 I_{ik} 中 2θ 的余弦项的初相角, $\alpha_{2cjk} = \alpha_{jk} - \pi/2$; A_{4cik} 表示一般项 I_{ik} 中 4θ 的余弦项的模, $A_{4cjk} = -A_{jk}/8$; α_{4cik} 表示一般项 I_{ik} 中 4θ 的余弦项的初相角, $\alpha_{4cjk} = 2\alpha_{jk}$.

毋须证明, (A1) 式的任意两式相加后, 其和仍具有完全相同的形式, 即由一个常数项和自变量分别为 θ 和 2θ 的两个余弦项组成。由此推知, 若将 $\sum_i \sum_k$ 和式中任意项两两相加后, 再两两相加, 直至最后, 所得之和必然也具有与 (A1) 式完全相同的形式, 即有

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_i \gamma_k \sin^2 \theta_j \cos^2 \theta_k \sin^2 \frac{\delta_k}{2} = A_{\theta 0} + A_{\theta 2} \cos(2\theta + \alpha_{\theta 2}) + A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}). \quad (\text{A2})$$

对于(2)式等号右端第三项 $\sum_i \sum_k$ 和式, 类似地亦可得到

$$-4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \gamma_i \gamma_k \cos^2 \theta_j \cos^2 \theta_k \sin^2 \frac{\delta_k - \delta_i}{2} = A_{\theta 0} + A_{\theta 2} \cos(2\theta + \alpha_{\theta 2}) + A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}). \quad (\text{A3})$$

将 (A2) 和 (A3) 式相加后, 2θ 的余弦项可合并为

$$\begin{aligned} & A_{\theta 2} \cos(2\theta + \alpha_{\theta 2}) + A_{\theta 2} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 2}) \\ &= A_{\theta 2} (\cos 2\theta \cos \alpha_{\theta 2} - \sin 2\theta \sin \alpha_{\theta 2}) + A_{\theta 2} (\cos 2\theta \cos \alpha_{\theta 2} - \sin 2\theta \sin \alpha_{\theta 2}) \\ &= A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2} \cos 2\theta - A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2} \sin 2\theta \\ &= A_{\theta 2} \cos(2\theta + \alpha_{\theta 2}), \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} A_{\theta 2} &= \sqrt{(A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2})^2 + (A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2})^2}, \\ \alpha_{\theta 2} &= \arctan \frac{A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \sin \alpha_{\theta 2}}{A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2} + A_{\theta 2} \cos \alpha_{\theta 2}}. \end{aligned}$$

类似地, 4θ 的余弦项可合并为

$$A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}) + A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}) = A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}).$$

再将所有常数项合并为 $A_{\theta 0}$, 于是得

$$I_{\theta} = A_{\theta 0} + A_{\theta 2} \cos(2\theta + \alpha_{\theta 2}) + A_{\theta 4} \cos(4\theta + \alpha_{\theta 4}). \quad (\text{A4})$$

观察同样条件下的二元滞后量公式^[1,2], 它们均由 θ 或 2θ 的正弦、余弦项或正、余弦的平方项和四次项组成。通过差化积、积化和差及其它并项简化措施, 不难证明, 可将其最终化为(A4)式的形式。其中的5个常数 $A_{\theta 0}$, $A_{\theta 2}$, $A_{\theta 4}$, $\alpha_{\theta 2}$ 和 $\alpha_{\theta 4}$ 唯一地确定了 $I_{\theta} - \theta$ 曲线的形状。而且, 由任一确定的 $I_{\theta} - \theta$ 曲线能求且只能求得上述5个常数, 因此可以说, 多元滞后量 $I_{\theta} - \theta$ 公式与二元滞后量 $I_{\theta} - \theta$ 公式等效。而这一等效是从 $I_{\theta} - \theta$ 曲线所包含的信息量的角度而言的。

用完全类似的方式, 也可证明, 在平面偏光仪暗场和平面偏振光透射两种条件下, 仍有多元与二元等效。

[1] 张武、林伟、罗建, 复合材料学报, 6(1989), 68.

[2] 张武、王燕, 力学进展, 23(1993), 12.

[3] J. W. Goodman, Statistical Optics (A Wiley-Interscience Publication, 1984), Ch. 8.

A MULTI-RETARDATOR MODEL FOR OPTICALLY HETEROGENEOUS COMPOSITE MATERIALS

ZHANG WU WANG YAN

(*Northwestern Polytechnical University, Xian 710072*)

(Received 30 June 1993)

ABSTRACT

This paper presents a multi-retardation model for the complex birefringent phenomenon of an optically heterogeneous fiber reinforced composites. A multi-retardator matrix, and deduced from which, a group of light intensity, azimuth and retardator formula are given. Secondly, a equivalent theorem of the multi-retardators to two-retardators is proved, which in turn leads to a point that the later should be considered as a kind of statistic equivalence of the former.

The multi-retardator model can be explained briefly as follows. After having passed accross the heterogeneous medium, the emerging polarized light is of complex wave front and can be divided into a set of plane waves with different spatial frequencies, each of them being composed of a pair of orthogonal polarized rays. The coherence of all these waves at any point of any front screen perpendicular to the original incident beam can be represented mathematically by the addition of their Jones vectors. Therefore, a multi-retardator matrix resulting from the addition of Jones matrixes which are corresponding to each pairs of orthogonal polarized beam with different spatial frequency is used to characterize the birefringent behaviors of optically heterogeneous composites.

PACC: 7820F; 8120T; 4220; 8170C