

量子 $U_q(SU(1,1))$ 群, 普适 R 矩阵和 Casimir 不变量

张 耀 中¹⁾

中国科学院物理研究所, 北京 100080;

澳大利亚昆士兰大学数学系

(1993 年 4 月 26 日收到)

给出了一个直接推导量子 $U_q(SU(1,1))$ 群普适 R 矩阵的方法; 至少对低秩量子群, 此方法是简单有效的. 应用所得到的 R 矩阵, 得到了上述量子群的 Casimir 不变量的明显表达式. 作为应用, 本文重新得到了上述量子群的二阶 Casimir 算子.

PACC: 0210

一、引 言

量子群, 更准确地讲量子普适包络代数被定义为经典包络代数的(量子) q -形变. 对这个领域的研究, 已经出现了成千上万的文献, 以致于在此不可能把这些参考文献一一(哪怕其中一部分)列出来. 在这里只列出 Drinfeld^[1] 和 Jimbo^[2] 的经典文献供读者参考.

量子群是 Hopf 代数, 即存在一个正则元素 R , 它满足标准的 Hopf 代数公理和量子杨-Baxter 方程. 此正则元素 R 称为“普适 R 矩阵”.

本文给出一个直接推导普适 R 矩阵的方法. 至少对低秩量子群, 此方法是简单有效的. 我们取量子 $U_q(SU(1,1))$ 群做为例子来详细简述此方法. 选择量子 $U_q(SU(1,1))$ 群的原因在于它是非紧的; 我们知道, 对非紧群, 所有么正表示均是无穷维的. 对于这些么正的无穷维量子群表示, 目前文献中似乎很少讨论. 例如: 对应的 q 量纲, Casimir 和 Link 不变量等; 这些都是有趣的问题. 作为探讨上述问题的第一步, 在这里先考虑非么正有限维最高权表示.

文献 [3] 中的作者发展了一个构造量子群不变量的一般方法. 我们将把他们的方法用到我们得到的普适 R 矩阵和非么正有限维最高权表示, 从而得到了量子 $U_q(SU(1,1))$ 群 Casimir 不变量的明显表达式. 做为应用、从这个表达式诱导出了最简单的二阶 Casimir 算子.

¹⁾ 王宽诚科研奖金获得者.

二、记号与基础

量子 $U_q(SU(1,1))$ 群由下列关系定义:

$$\begin{aligned} [K_0, K_{\pm}] &= \pm K_{\pm}, \\ [K_-, K_+] &= [2K_0]_q. \end{aligned} \quad (1)$$

这里

$$[x]_q \equiv \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$$

上乘 $\Delta: U_q(SU(1,1)) \rightarrow U_q(SU(1,1)) \otimes U_q(SU(1,1))$ 定义为:

$$\begin{aligned} \Delta(K_0) &= K_0 \otimes 1 + 1 \otimes K_0, \\ \Delta(K_{\pm}) &= K_{\pm} \otimes q^{-K_0} + q^{K_0} \otimes K_{\pm}. \end{aligned} \quad (2)$$

让 $\bar{\Delta}$ 为相反的上乘: $\bar{\Delta} = T\Delta$, 这里 T 为扭曲映射: $T(x \otimes y) = y \otimes x, \forall x, y \in U_q(SU(1,1))$. 那么 Δ 和 $\bar{\Delta}$ 满足关系

$$\bar{\Delta}(a)R = R\Delta(a) \quad a \in U_q(SU(1,1)), \quad (3)$$

R 为普适 R 矩阵, 它可写为

$$R = \sum_i a_i \otimes b_i, \quad (4)$$

并且 R 满足量子杨-Baxter 关系

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad (5)$$

其中 $R_{12} = R \otimes 1, R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, R_{23} = 1 \otimes R$.

运用归纳法, 可以证明下列关系:

$$\begin{aligned} (K_-)^k K_+ &= K_+ (K_-)^k + (K_-)^{k-1} [k]_q [2K_0 - (k-1)]_q, \\ K_- (K_+)^k &= (K_+)^k K_- + (K_+)^{k-1} [k]_q [2K_0 + (k-1)]_q. \end{aligned} \quad (6)$$

让 π_{Λ_0} 为 $U_q(SU(1,1))$ 的非平庸不可约表示, 它属于不可约最高权模 $V(\Lambda_0)$; 让 $\Delta_{\Lambda_0} = (1 \otimes \pi_{\Lambda_0})\Delta$; 那么根据文献[3], 有

定理 1 如果算子 $\Gamma \in U_q(SU(1,1)) \otimes \text{End } V(\Lambda_0)$ 满足 $\Delta_{\Lambda_0}(a)\Gamma = \Gamma\Delta_{\Lambda_0}(a), \forall a \in U_q(SU(1,1))$, 那么

$$C^{\Lambda_0} = (1 \otimes \text{Tr})\{(1 \otimes \pi_{\Lambda_0})(1 \otimes q^{-2K_0})\Gamma\} \quad (7)$$

属于 $U_q(SU(1,1))$ 的中心, 即 C^{Λ_0} 为 $U_q(SU(1,1))$ 的 Casimir 不变量.

本文将考虑一般 q 的情况, 即 q 不是 1 的根.

三、普适 R 矩阵的推导

我们将采用物理学家们较熟悉的记号. 这样来标记 $U_q(SU(1,1)) \otimes U_q(SU(1,1))$ 中的量: 张量积中第一个 $U_q(SU(1,1))$ 中的量用不带撇的“ x ”表示, 第二个 $U_q(SU(1,1))$ 中的量用带撇的“ x' ”表示. 应用这样的记号, (2) 式中的上乘可写为

$$\Delta(K_0) = K_0 + K'_0,$$

$$\Delta(K_{\pm}) = K_{\pm}q^{-K'_0} + q^{K_0}K'_{\pm}. \quad (8)$$

而(3)式变为

$$\bar{\Delta}(K_0)R(x, x') = R(x, x')\Delta(K_0), \quad (9a)$$

$$\bar{\Delta}(K_{\pm})R(x, x') = R(x, x')\Delta(K_{\pm}). \quad (9b)$$

我们的主要任务是求解上式中的 $R(x, x')$, 为此写

$$R(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(K_0, K'_0)(K_-)^l(K'_+)^l \quad (10)$$

其中 $C_l(K_0, K'_0)$ 为依赖于 l, K_0, K'_0, q 的泛函。

代入(9a)式可以看到(9a)式被平庸地满足。所以非平庸的方程为(9b)式。利用(1), (6)和(8)式, 经过冗长的计算, 得到(9b)式化为下列方程组:

$$q^{K'_0+l}C_l(K_0-l, K'_0+l) = q^{-K'_0}C_l(K_0-l+1, K'_0+l); \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} q^{-K_0+l}C_l(K_0-l, K'_0+l) - q^{K_0}C_l(K_0-l, K'_0+l+1) \\ = q^{K'_0+l+1}[l+1]_q[2K_0-l]_q C_{l+1}(K_0-l-1, K'_0+l+1); \end{aligned} \quad (11b)$$

$$q^{-K'_0}C_l(K_0-l, K'_0+l) = q^{K_0}C_l(K_0-l, K'_0+l-1); \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} q^{-K'_0}C_l(K_0-l-1, K'_0+l) - q^{K'_0+l}C_l(K_0-l, K'_0+l) \\ = q^{-K_0+l+1}[l+1]_q[2K'_0+l]_q C_{l+1}(K_0-l-1, K'_0+l+1). \end{aligned} \quad (11d)$$

为了解方程组(11), 令

$$C_l(K_0, K'_0) = \tilde{C}_l q^{aK_0K'_0+bK_0+cK'_0}, \quad (12)$$

代入(11a)和(11c)式, 得到

$$b = -l, \quad c = l, \quad a = 2. \quad (13)$$

然后代入(11b)和(11d)式, 得到

$$\tilde{C}_{l+1} = \tilde{C}_l(q^{-2} - 1)q^{-l}/[l+1]_q. \quad (14)$$

由此可得

$$\tilde{C}_l = \tilde{C}_0(q^{-2} - 1)^l q^{-l(l-1)/2}/[l]_q!, \quad (15)$$

其中 $[l]_q! = [l]_q[l-1]_q \cdots [1]_q$; $\tilde{C}_0$ 为一常数, 将令 $\tilde{C}_0 = 1$. 这样可以得普适 R 矩阵

$$R(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q^{-2} - 1)^l q^{-l(l-1)/2}}{[l]_q!} q^{2K_0K'_0-l(K_0-K'_0)} \times (K_-)^l(K'_+)^l. \quad (16)$$

现在来验证普适 R 矩阵(16)式满足量子杨-Baxter 方程(5)。用本节的记号, (5)式化为

$$R(x, x')R(x, x'')R(x', x'') = R(x', x'')R(x, x'')R(x, x'). \quad (17)$$

经过一些计算可得

$$\begin{aligned} (17) \text{式左端} &= \sum_{M, N=0}^{\infty} q^{2K_0K'_0+2K_0K''_0+2K'_0K''_0} \times q^{-M(K_0-K'_0)-N(K'_0-K''_0)+NM} (K_-)^M(K'_+)^N \\ &\times \sum_{l=0}^{\min(M, N)} \tilde{C}_{M-l}\tilde{C}_l\tilde{C}_{N-l} q^{-l(2K'_0+2N-l)} (K'_+)^{M-l}(K'_-)^{N-l}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$(17) \text{式右端} = \sum_{M, N=0}^{\infty} q^{2K_0K'_0+2K_0K''_0+2K'_0K''_0} \times q^{-M(K_0-K'_0)-N(K'_0-K''_0)+NM} (K_-)^M(K'_+)^N$$

$$\times \sum_{l=0}^{\min(M,N)} \tilde{C}_{N-l} \tilde{C}_l \tilde{C}_{M-l} q^{l(2K'_0-2M+l)} (K'_-)^{N-l} (K'_+)^{M-l}. \quad (19)$$

利用归纳法,可以证明,对所有非负整数 M 和 N ,下式成立:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\min(M,N)} \tilde{C}_{M-l} \tilde{C}_l \tilde{C}_{N-l} q^{-l(2K'_0+2N-l)} (K'_+)^{M-l} (K'_-)^{N-l} \\ &= \sum_{l=0}^{\min(M,N)} \tilde{C}_{N-l} \tilde{C}_l \tilde{C}_{M-l} q^{l(2K'_0-2M+l)} (K'_-)^{N-l} (K'_+)^{M-l}. \end{aligned} \quad (20)$$

这样可以看到(17)式成立,即我们得到的 R 矩阵满足量子杨-Baxter 关系。

四、Casimir 不变量

现在来构造 Casimir 不变量的明显形式。为此定义

$$E = q^{K_0} K_+, \quad F = q^{-K_0} K_-. \quad (21)$$

恢复到第二节的符号,那么 R 矩阵(16)式可写成如下形式:

$$R = q^{2(K_0 \otimes K_0)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q^{-2} - 1)^l q^{l(l-1)/2}}{[l]_q!} F^l \otimes E^l. \quad (22)$$

利用(3)式,不难证明

$$\Gamma = (1 \otimes \Pi_{A_0})(R^T R) \quad (23)$$

满足定理1的条件。因此

$$C^{A_0} = (1 \otimes \text{Tr})\{(1 \otimes \Pi_{A_0})(1 \otimes q^{-2K_0})R^T R\}, \quad (24)$$

其中 $R^T = T R$ 。应用(22)式可得

$$\begin{aligned} R^T R &= q^{4(K_0 \otimes K_0)} \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{(q^{-2} - 1)^{l+k} q^{-l(3l+1)/2 + k(k-1)/2}}{[l]_q! [k]_q!} \\ &\quad \times q^{2l(K_0 \otimes l^{-1} \otimes K_0)} E^l F^k \otimes F^l E^k. \end{aligned} \quad (25)$$

因此

$$\begin{aligned} C^{A_0} &= \text{Tr} \left\{ q^{4K_0 \Pi_{A_0}(K_0)} \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{(q^{-2} - 1)^{l+k} q^{-l(3l+1)/2 + k(k-1)/2}}{[l]_q! [k]_q!} \right. \\ &\quad \left. \times q^{2lK_0} E^l F^k \Pi_{A_0}(q^{-2(l+1)K_0} F^l E^k) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

方程(26)是一个明显的表达式,它即为 $U_q(SU(1,1))$ 的 Casimir 不变量的明显表达式。

作为一个例子,选择 Π_{A_0} 为 $U_q(SU(1,1))$ 的最小表示,即2维表示。由于对最小二维表示,有如下性质:

$$(\Pi_{A_0}(E))^2 = 0 = (\Pi_{A_0}(F))^2. \quad (27)$$

因此在(26)式中所有对 l 和 k 的和仅取二个值:0和1。从而(26)式简化为

$$C^{A_0} = \text{Tr} \{ q^{4K_0 \Pi_{A_0}(K_0)} [\Pi_{A_0}(q^{-2K_0}) + (q^{-2} - 1)^2 q^{-2} \times q^{2K_0} E F \Pi_{A_0}(q^{-4K_0} F E)] \}. \quad (28)$$

我们知道,最小(非平庸)二维表示的量子形式并不发生形变,即与经典形式相同,换言之,

$$\begin{aligned}
\Pi_{A_0}(K_+) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{A_0}(K_-) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{A_0}(K_0) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{A_0}(q^{K_0}) &= \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{29}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\Pi_{A_0}(E) &= \Pi_{A_0}(q^{K_0}K_+) = q^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Pi_{A_0}(F) &= \Pi_{A_0}(q^{-K_0}K_-) = q^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{30}$$

代入(28)式,得

$$C^{A_0} = q^{2K_0-1} + q^{-2K_0+1} - (q - q^{-1})^2 K_+ K_-. \tag{31}$$

因此

$$C_{L^0}^{A_0} \equiv (C^{A_0} - 2)/(q - q^{-1})^2 = [K_0 - 1/2]_q^2 - K_+ K_-. \tag{32}$$

(32)式即为众所周知的 $U_q(SU(1,1))$ 群的二阶 Casimir 算子。这里在我们框架下重新得到了它。

对中国科学院物理研究所及蒲富恪教授的接待,王宽诚教育基金会(香港)的资助,谨此一并致谢。

- [1] V. G. Drinfeld, *Proc. Int. Congr. Math., Berkeley*, **1**(1986), 798.
- [2] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11**(1986), 247.
- [3] R. B. Zhang, M. D. Gould and A. J. Bracken, *Commun. Math. Phys.*, **137**(1991), 13.

QUANTUM GROUP $U_q(SU(1,1))$, UNIVERSAL R MATRIX AND CASIMIR INVARIANT

ZHANG YAO-ZHONG

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080, China; Department of Mathematics, The University of Queensland, Australia

(Received 26 April 1993)

ABSTRACT

In this paper a method of direct derivation for the universal R matrix of quantum group $U_q(SU(1,1))$ is given. It is simple and efficient for quantum groups of low rank at least. By the application of the R matrix obtained, the explicit expression for Casimir invariant of the above quantum group is given. As an application, the second order Casimir operator is rederived as well.

PACC: 0210