一个经典完全可积的非共形约束的 $SL(2,R)$ Wess–Zumino–Novikov–Witten 模型 (I)

王延申　杨文力　杨焕雄　侯伯宇
西北大学现代物理研究所，西安　710069
(1993 年 4 月 12 日收到)

通过在 $SL(2,R)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten(缩写为 WZNW) 模型中加入破坏共形对称性的约束，获得了一个新的经典完全可积的二维场论体系，它把著名的 sinh-Gordon 方程作为其特例. 这个广义 sinh-Gordon 体系的特点是完全可积性和可超定域化，并且描写这些特点的 r 矩阵是杨-Baxter 方程(经典的)的一个解，它反对称，依赖于两个谱参数，但通过 Loop 代数的自同构变换和谱参数的重新定义后，此 r 矩阵仍是依赖于一个谱参数的三角型 r 矩阵.

PACC: 0220;0350;1110;0240

一、引　　言

二维 WZNW 模型是最著名的共形场论之一，对其进行 Hamilton 约化[1]可以给出一大类具有共形不变性的场论模型，如 Liouville-Toda 模型，广义 Toda 模型及共形仿射 Toda 模型等(这些模型的共形对称性由所谓W代数，广义W代数描写)[2]. 另一方面，根据 Zamolodchikov 的建议[3]，可以在共形场，如 WZNW 模型或各种规范 WZNW 模型[4]的作用量中加入适当的扰动项，将共形场破缺到临界外，但仍保持有无穷多守恒流，从而构造出完全可积的有质量场论[5].

本文研究 WZNW 模型在临界外的经典约束理论. 将某种破坏共形对称性的约束加入 $SL(2,R)$WZNW 模型，得到了一种新型的完全可积体系. 该体系的运动方程的一种退化情形是著名的 sinh-Gordon 方程组. 此广义 sinh-Gordon 方程组的完全可积性的特征之一是存在含谱参数的 Lax 对[6]. 令人感兴趣的是，由此 Lax 对推出的基本 Poisson-Lie 括号本质上是超定域化的[7]，其中出现的反对称 r 矩阵一方面满足通常的经典杨-Baxter 方程，另一方面依赖于两个谱参数 λ_1,λ_2，但是通过 Loop 代数的自同构变换和谱参数的重新定义后，此 r 矩阵仍然化为依赖于一个谱参数的三角型 r 矩阵. 从某种意义上讲，广义 sinh-Gordon 方程组实现了一种与经典的 sinh-Gordon 方程相似的可积动力学体系.

文章的结构安排如下：第二节采取与 Balog 等人提出的规范 WZNW 场论相似的形式，在 WZNW 模型的基础上构造出约束体系的作用量．但是约束的选择却使得体系不再具有共形对称性．将体系纳入 Hamilton 形式，用 Dirac 约束理论进行分析，得到了体系的广义 Hamilton 量、正则运动方程及能量动量张量密度，后者其迹非零且不能在保证作用量不改变的条件下修正为零，由此说明我们考虑的体系是在临界外．第三节在位形空间中写出体系的运动方程(广义 sinh-Gordon 方程组)，并将其表为零曲率方程的形式，进而引入 Lax 对．Lax 对可以有几种含谱参数的方式，分别相当于 Loop 代数的主分次和齐次分次，二者证明是等价的．第四节讨论体系的完全可积性．首先将 Lax 对的空间分量用正则变量表出．如此直接求得的基本 Poisson-Lie 括号表观上是非超定域的．但是我们发现可以利用零曲率方程的规范对称性将它化为超定域形式，从而得到含两个谱参数的反对称 r 矩阵，它通过 Loop 代数的自同构变换和谱参数的重新定义可化为三角型的 r 矩阵．直接计算表明这个 r 矩阵是经典杨-Baxter 方程的解．

二、约束体系及其 Hamilton 形式

考虑如下作用量定义的约束体系：

$$
\begin{aligned}
I(g, A_\pm) = S(g) + \kappa \int_{s^2} \mathrm{d}^2 x \mathrm{Tr}[A_-(\partial_+ g g^{-1} - \mu) + A_+(g^{-1}\partial_- g - \nu) \\
+ A_- g A_+ g^{-1}],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
S(g) = \frac{\kappa}{2}\int_{s^2} \mathrm{d}^2 x \mathrm{Tr}(\partial_+ g g^{-1}\partial_- g g^{-1}) \\
- \frac{\kappa}{3}\int_B \mathrm{d}^3 x \epsilon^{ijk}\mathrm{Tr}(\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g g^{-1}),
\end{aligned}
$$

这里约定 $s^2 \equiv \partial B$，$\partial_\pm \equiv \partial_0 \pm \partial_1$．(1) 式中 κ 是耦合常数，$S(g)$ 是 WZNW 模型的作用量，场 $g(x)$ 取值在连通的非紧实 Lie 群 $SL(2, R)$ 上，约束矩阵 μ, ν 及相应的 Lagrange 乘子场 $A_\pm(x)$ 分别取为

$$
\mu = \mu^- E_+ + \mu^+ E_-,\ \nu = \nu^- E_+ + \nu^+ E_-,\ A_\pm = A_\pm^- E_+ + A_\pm^+ E_-,
\tag{2}
$$

式中出现的 $\{H, E_+, E_-\}$ 表示 Lie 代数 $sl(2,R)$ 的正则基，

$$
\begin{gathered}
[H,H] = 0,\ [H,E_\pm] = \pm 2E_\pm,\ [E_+,E_-] = H, \\
\mathrm{Tr}(H^2) = 2,\ \mathrm{Tr}(E_+E_-) = 1,\ \mathrm{Tr}(HE_\pm) = 0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

由于约定场 $g(x) \in SL(2,R)$，故其允许有如下的 Gauss 分解表象[2,4]：

$$
g = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^\phi & 0 \\ 0 & e^{-\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}.
\tag{4}
$$

于是可以写出体系 Lagrange 密度的显示表达式(含约束的)

$$
I(g, A_\pm) = \int_{s^2} \mathrm{d}^2 x \mathscr{L}(x),
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(x) = \kappa(\partial_+\phi\partial_-\phi + \partial_- v\partial_+ w e^{-2\phi}) \\
+ \kappa A_-^+(\partial_+ v - 2v\partial_+\phi - v^2\partial_+ w e^{-2\phi} - \mu^-) \\
+ \kappa A_+^-(\partial_- w - 2w\partial_-\phi - w^2\partial_- v e^{-2\phi} - \nu^+)
\end{aligned}
$$

$$+\kappa A_-^-(\partial_+ w e^{-2\phi}-\mu^+)+\kappa A_+^+(\partial_- v e^{-2\phi}-\nu^-)$$
$$+\kappa[A_+^+A_-^- e^{-2\phi}-A_+^-A_-^- w^2 e^{-2\phi}-A_+^+A_-^+ v^2 e^{-2\phi}$$
$$+A_-^+A_+^-(e^\phi+vwe^{-\phi})^2]. \tag{5}$$

现在建立体系的 Hamilton 形式. 将 $v,\phi,w,A_+^-,A_+^+,A_-^+,A_-^-$ 看成 $SL(2,R)$ 流形上的正则坐标,并定义相应的正则动量

$$\Pi_v\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 v)}=\kappa\partial_+ w e^{-2\phi}+\kappa A_-^++\kappa A_+^+ e^{-2\phi}-\kappa A_+^- w^2 e^{-2\phi},$$
$$\Pi_\phi\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=2\kappa\dot\phi-2\kappa v A_-^+-2\kappa w A_+^-,$$
$$\Pi_w\equiv\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 w)=\kappa\partial_- v e^{-2\phi}+\kappa A_+^-+\kappa A_-^- e^{-2\phi}-\kappa A_-^+ v^2 e^{-2\phi},$$
$$\Pi_{A_-^-}\equiv\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_-^-)=0,\quad \Pi_{A_-^+}\equiv\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_-^+)=0,$$
$$\Pi_{A_+^-}\equiv\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_+^-)=0,\quad \Pi_{A_+^+}\equiv\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_+^+)=0, \tag{6}$$

正则 Hamilton 函数密度

$$\mathscr{H}_c(x)\equiv\sum_q \Pi_q\partial_0 q-\mathscr{L}(x)=\frac{1}{8\kappa}[\boldsymbol{g}^2(H,x)+\tilde{\boldsymbol{g}}^2(H,x)]$$
$$+\frac{1}{2\kappa}[\boldsymbol{g}(E_+,x)\boldsymbol{g}(E_-,x)+\tilde{\boldsymbol{g}}(E_+,x)\tilde{\boldsymbol{g}}(E_-,x)]$$
$$-A_-^-(x)[\boldsymbol{g}(E_+,x)-\kappa\mu^+]-A_-^+(x)[\boldsymbol{g}(E_-,x)-\kappa\mu^-]$$
$$+A_+^-(x)[\tilde{\boldsymbol{g}}(E_+,x)+\kappa\nu^+]+A_+^+(x)[\tilde{\boldsymbol{g}}(E_-,x)+\kappa\nu^-]$$
$$+\kappa A_-^-(x)A_-^+(x)+\kappa A_+^-(x)A_+^+(x), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}(H,x)\equiv\Pi_\phi+2v\Pi_v+2\kappa\partial_1\phi,$$
$$\boldsymbol{g}(E_+,x)\equiv\Pi_v,$$
$$\boldsymbol{g}(E_-,x)\equiv-v^2\Pi_v-v\Pi_\phi+e^{2\phi}\Pi_w+2\kappa\partial_1 v-2\kappa v\partial_1\phi,$$
$$\tilde{\boldsymbol{g}}(H,x)\equiv-\Pi_\phi-2w\Pi_w+2\kappa\partial_1\phi,$$
$$\tilde{\boldsymbol{g}}(E_+,x)\equiv w^2\Pi_w+w\Pi_\phi-e^{2\phi}\Pi_v+2\kappa\partial_1 w-2\kappa v\partial_1\phi,$$
$$\tilde{\boldsymbol{g}}(E_-,x)\equiv-\Pi_w, \tag{8}$$

和基本 Poisson 括号

$$\{v(x),\Pi_v(y)\}=\{\phi(x),\Pi_\phi(y)\}=\{w(x),\Pi_w(y)\}$$
$$=\{A_-^-(x),\Pi_{A_-^-}(y)\}=\{A_-^+(x),\Pi_{A_-^+}(y)\}$$
$$=\{A_+^-(x),\Pi_{A_+^-}(y)\}=\{A_+^+(x),\Pi_{A_+^+}(y)\}$$
$$=\delta(x-y), \tag{9}$$

(其余的基本 Poisson 括号为零), 这样就完成了体系向 Hamilton 形式过渡的第一步. 简单而初等的计算表明, (8) 式引入的辅助函数表观上可以看作经典的 $sl(2,R)$ Kac-Moody 流分量,

$$\{\boldsymbol{g}(A,x),\boldsymbol{g}(B,y)\}=\boldsymbol{g}([A,B],x)\delta(x_1-y_1)+2\kappa\mathrm{Tr}(AB)\delta'(x_1-y_1),$$
$$\{\tilde{\boldsymbol{g}}(A,x),\tilde{\boldsymbol{g}}(B,y)\}=\tilde{\boldsymbol{g}}([A,B],x)\delta(x_1-y_1)-2\kappa\mathrm{Tr}(AB)\delta'(x_1-y_1), \tag{10}$$
$$\{\boldsymbol{g}(A,x),\tilde{\boldsymbol{g}}(B,y)\}=0,$$

式中 A,B 是 $sl(2,R)$ 中的任意元素.

回到(6)式，由于某些正则动量为零，我们的研究对象(1)式实际上是一个约束的 Hamilton 体系。按照 Dirac 理论[10]，(1)式中约束的完备集合为

$$
\begin{aligned}
&G_1(x) = \Pi_{A_-^+}(x) \simeq 0, \quad G_2(x) = \Pi_{A_-^-}(x) \simeq 0, \\
&G_3(x) = \Pi_{A_+^+}(x) \simeq 0, \quad G_4(x) = \Pi_{A_+^-}(x) \simeq 0, \\
&G_5(x) = \dot{\boldsymbol{g}}(E_-, x) - \kappa\mu^- - \kappa A_-^-(x) \simeq 0, \\
&G_6(x) = \dot{\boldsymbol{g}}(E_+, x) - \kappa\mu^+ - \kappa A_-^+(x) \simeq 0, \\
&G_7(x) = \tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_-, x) + \kappa\nu^- + \kappa A_+^-(x) \simeq 0, \\
&G_8(x) = \tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_+, x) + \kappa\nu^+ + \kappa A_+^+(x) \simeq 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

显然，这些约束均为第二类的[10]，体系的物理自由度数为 3.

处理第二类约束的一个办法是定义 Dirac 括号 $\{f,g\}_{\mathrm{D}}$[10] 代替约束体系中原有的朴素 Poisson 括号。对于本文讨论的体系而言，$\{f,g\}_{\mathrm{D}}$ 可以等价地表为

$$
\{v(x), \Pi_v(y)\}_{\mathrm{D}} = \{\phi(x), \Pi_\varphi(y)\}_{\mathrm{D}} = \{w(x), \Pi_w(y)\}_{\mathrm{D}} = \delta(x_1 - y_1), \tag{12}
$$

以及如下的强方程:

$$
\begin{aligned}
&A_-^-(x) = \frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_-, x) - \mu^-, \quad A_-^+(x) = \frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_+, x) - \mu^+, \\
&A_+^-(x) = -\frac{1}{\kappa}\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_-, x) - \nu^-, \quad A_+^+(x) = -\frac{1}{\kappa}\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_+, x) - \nu^+.
\end{aligned} \tag{13}
$$

在 Dirac 括号(12)式的意义下，体系中不再含有约束，其 Hamilton 量写为

$$
\begin{aligned}
H_E &= \int \mathrm{d}\, x_1 \mathscr{H}(x) \\
\mathscr{H}(x) &= \frac{1}{8\kappa}[\dot{\boldsymbol{g}}^2(H, x) + \tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}^2(H, x)] \\
&\quad - \frac{1}{2\kappa}[\dot{\boldsymbol{g}}(E_+, x)\dot{\boldsymbol{g}}(E_-, x) + \tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_+, x)\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_-, x)] \\
&\quad + \mu^-\dot{\boldsymbol{g}}(E_+, x) + \mu^+\dot{\boldsymbol{g}}(E_-, x) - \nu^-\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_+, x) \\
&\quad - \nu^+\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(E_-, x) - \kappa\mu^+\mu^- - \kappa\nu^+\nu^-,
\end{aligned} \tag{14}
$$

其中 $\dot{\boldsymbol{g}}(A, x)$，$\tilde{\dot{\boldsymbol{g}}}(B, x)(A, B \in sl(2, R))$ 仍由(8)式给出，其满足的 Dirac 括号形式上仍是(10)式所示的 Kac-Moody 流代数，但正则动量的表示式中已经消除了约束的影响，

$$
\begin{aligned}
&\Pi_v = \kappa[\mathscr{P}_v + \mu^+], \quad \pi_w = K[\mathscr{P}_w + \nu^-], \\
&\Pi_\phi = 2\kappa[\partial_0\phi - v\mathscr{P}_v - w\mathscr{P}_w], \\
&\mathscr{P}_v \equiv (\nu^+ + \nu^- w^2 + 2w\partial_-\phi - \partial_- w)/(\mathrm{e}^{2\phi} + 2vw), \\
&\mathscr{P}_w \equiv (\mu^- + \mu^+ v^2 + 2v\partial_+\phi - \partial_+ w)/(\mathrm{e}^{2\phi} + 2vw).
\end{aligned} \tag{15}
$$

有了(12)，(14)，(8)及(5)诸式，体系的正则运动方程、Lagrange 函数密度、能量动量张量均可应用标准程序求得，结果为

$$
\begin{aligned}
&\partial_0\phi = \frac{1}{2\kappa}\Pi_\phi + \frac{1}{\kappa}v\Pi_v + \frac{1}{\kappa}w\Pi_w - \mu^+ v - \nu^- w, \\
&\partial_0 v = -\partial_1 v + \frac{1}{\kappa}v\Pi_\phi + \frac{2}{\kappa}v^2\Pi_v + 2v\partial_1\phi
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{2\phi}\Pi_w+\mu^- -\mu^+v^2+\nu^-\mathrm{e}^{2\phi},
$$

$$
\partial_0 w=\partial_1 w+\frac{1}{\kappa}w\Pi_\phi+\frac{2}{\kappa}w^2\Pi_w-2w\partial_1\phi
$$

$$
-\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{2\phi}\Pi_v+\nu^+-\nu^-w^2+\mu^+\mathrm{e}^{2\phi},
$$

$$
\partial_0\Pi_\phi=2\kappa\partial_1^2\phi-2\kappa\mu^+\partial_1 v+2\kappa\nu^-\partial_1 w+2\partial_1(v\Pi_v-w\Pi_w)
$$

$$
+\frac{2}{\kappa}\mathrm{e}^{2\phi}\Pi_v\Pi_w-2(\nu^-\Pi_v+\mu^+\Pi_w)\mathrm{e}^{2\phi},
$$

$$
\partial_0\Pi_v=-\partial_1\Pi_v+\left(\mu^+-\frac{1}{\kappa}\Pi_v\right)(\Pi_\phi+2v\Pi_v+2\kappa\partial_1\phi),
$$

$$
\partial_0\Pi_w=\partial_1\Pi_w+\left(\nu^--\frac{1}{\kappa}\Pi_w\right)(\Pi_\phi+2w\Pi_w-2\kappa\partial_1\phi), \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(x)&=\sum_q\Pi_q(\partial_0 q)-\mathscr{H}(x)\\
&=\kappa(\partial_0\phi)^2-\kappa(\partial_1\phi)^2-\kappa(2vw+\mathrm{e}^{2\phi})\mathscr{P}_v\mathscr{P}_w\\
&\quad+\kappa\mu^+\partial_-v+\kappa\nu^-\partial_+w+\kappa\mu^+\nu^-\mathrm{e}^{2\phi},
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{00}&=\kappa(\partial_0\phi)^2+\kappa(\partial_1\phi)^2-\kappa\mathscr{P}_v(2v\partial_0\phi-\partial_0 v)\\
&\quad-\kappa\mathscr{P}_w(2w\partial_0\phi-\partial_0 w)+\kappa(2vw+\mathrm{e}^{2\phi})\mathscr{P}_v\mathscr{P}_w\\
&\quad+\kappa\mu^+\partial_1 v-\kappa\nu^-\partial_1 w-\kappa\mu^+\nu^-\mathrm{e}^{2\phi},\\
T^{11}&=\kappa(\partial_0\phi)^2+\kappa(\partial_1\phi)^2+\kappa\mathscr{P}_v(2v\partial_1\phi-\partial_1 v)\\
&\quad-\kappa\mathscr{P}_w(2w\partial_1\phi-\partial_1 w)-\kappa(2vw+\mathrm{e}^{2\phi})\mathscr{P}_v\mathscr{P}_w\\
&\quad+\kappa\mu^+\partial_0 v+\kappa\nu^-\partial_0 w+\kappa\mu^+\nu^-\mathrm{e}^{2\phi},\\
T^{01}&=-2\kappa(\partial_0\phi-v\mathscr{P}_v-w\mathscr{P}_w)(\partial_1\phi)\\
&\quad-\kappa(\mathscr{P}_v+\mu^+)(\partial_1 v)-\kappa(\mathscr{P}_w+\nu^-)(\partial_1 w),\\
T^{10}&=-2\kappa(\partial_1\phi+v\mathscr{P}_v-w\mathscr{P}_w)(\partial_0\phi)\\
&\quad+\kappa(\mathscr{P}_v-\mu^+)(\partial_0 v)-\kappa(\mathscr{P}_w-\nu^-)(\partial_0 w).
\end{aligned} \tag{18}
$$

很明显,(18)式的能量动量张量不具有对称、无迹的性质. 由于 Kac-Moody 流代数的生成元不再满足守恒律,我们也无法将(18)式修正为对称、无迹的张量. 故我们的研究对象失去了 WZNW 模型具有的共形对称性.

三、体系的 Lagrange 运动方程

在(16)式中消去正则动量,体系的运动方程又可在位形空间表为

$$
\begin{aligned}
&\partial_+\partial_-\phi+\mu^+\nu^-\mathrm{e}^{2\phi}-(\mu^--\mu^+v^2)\mathscr{P}_v-\partial_-(w\mathscr{P}_w)=0,\\
&\partial_+\mathscr{P}_v+2(\partial_+\phi+\mu^+v-w\mathscr{P}_w)\mathscr{P}_v=0,\\
&\partial_-\mathscr{P}_w+2(\partial_-\phi+\nu^-w-v\mathscr{P}_v)\mathscr{P}_w=0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

参考(17)式,上式恰是体系的 Lagrange 方程组. 注意到取 $v=w=0$ 的解时(19)式退化为

$$\partial_+\partial_-\phi + \mu^+\nu^- e^{2\phi} - \mu^-\nu^+ e^{-2\phi} = 0.$$

故以后将(19)式称为广义 sinh-Gordon 方程组.

现在要说明的是,广义 sinh-Gordon 方程组(19)可以等价地表示为

$$\begin{aligned}
&\partial_-\dot{g}(H,x) + 2\mu^+\dot{g}(E_-,x) - 2\mu^-\dot{g}(E_+,x) = 0,\\
&\partial_+\dot{g}(E_+,x) - \mu^+\dot{g}(H,x) + \frac{1}{\kappa}\dot{g}(H,x)\dot{g}(E_+,x) = 0,\\
&\partial_+\dot{g}(E_-,x) + \mu^-\dot{g}(H,x) - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(H,x)\dot{g}(E_-,x) = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\dot{g}(H,x) = \Pi_\phi + 2\nu\Pi_\nu + 2\kappa\partial_1\phi = 2\kappa[\partial_+\phi - w\mathscr{P}_w + \mu^+\nu], \tag{21a}$$

$$\dot{g}(E_+,x) = \Pi_\nu = \kappa[\mathscr{P}_\nu + \mu^+], \tag{21b}$$

$$\begin{aligned}
\dot{g}(E_-,x) &= -\nu^2\Pi_\nu - \nu\Pi_\phi + e^{2\phi}\Pi_w + 2\kappa\partial_1\nu - 2\kappa\nu\partial_1\phi\\
&= \kappa[\nu^2\mathscr{P}_\nu + \mu^- + \nu^- e^{2\phi} - \partial_-\nu].
\end{aligned} \tag{21c}$$

进而又可表示为如下零曲率方程:

$$\partial_+ a_- - \partial_- a_+ - [a_+, a_-] = 0, \tag{22}$$

式中出现的零曲率势 $a_\pm$ 可以有多种选择. 例如选为

$$\begin{aligned}
&a_-(x) \equiv \left[\mu^- - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_-,x)\right]E_+ + \left[\mu^+ - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_+,x)\right]E_-,\\
&a_+(x) \equiv \frac{1}{2\kappa}\dot{g}(H,x)H + (\mu^- E_+ + \mu^+ E_-)
\end{aligned} \tag{23}$$

或者

$$\begin{aligned}
&a_-(x,\lambda) \equiv \lambda\left[\mu^- - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_-,x)\right]E_+ + \lambda\left[\mu^+ - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_+,x)\right]E_-,\\
&a_+(x,\lambda) \equiv \frac{1}{2\kappa}\dot{g}(H,x)H + \frac{1}{\lambda}(\mu^- E_+ + \mu^+ E_-)
\end{aligned} \tag{24}$$

或者

$$\begin{aligned}
&a_-(x,\gamma) \equiv \gamma\left[\mu^- - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_-,x)\right]E_+ + \left[\mu^+ - \frac{1}{\kappa}\dot{g}(E_+,x)\right]E_-,\\
&a_+(x,\gamma) \equiv \frac{1}{2\kappa}\dot{g}(H,x)H + \mu^- E_+ + \frac{1}{\gamma}\mu^+ E_-.
\end{aligned} \tag{25}$$

(24)式中的 λ, (25)式中的 γ 均是外加于理论的任意参数(与时空坐标无关).

Lax 对[6](24),(25)可看成(23)式中加入谱参数 λ,γ 而得. 应该注意的是,加入了谱参数的 Lax 对(24),(25)式与(23)式不同,其中的零曲率势不再在单 Lie 代数 $sl(2,R)$ 上取值,而是取值在 Loop 代数 $\widetilde{sl}(2,R)$ 上,相应的 Loop 参数分别为 λ,γ. (24)式相应的 $\widetilde{sl}(2,R)$ 取主分次[11],(25)式相应的 $\widetilde{sl}(2,R)$ 取齐次分次[11],故这两个 Lax 对是互相等价的,

$$a_\pm(x,\gamma)|_{\gamma=\lambda^2} = \lambda^{H/2}a_\pm(x,\lambda)\lambda^{-H/2}. \tag{26}$$

四、体系的完全可积性

根据上一节的分析,广义 sinh-Gordon 方程组(19)可以看成线性方程组

$$
\begin{aligned}
\partial_0 T(x,\lambda) &= \boldsymbol{a}_0(x,\lambda) T(x,\lambda),\\
\partial_1 T(x,\lambda) &= \boldsymbol{a}_1(x,\lambda) T(x,\lambda)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

的可积条件为

$$
\partial_0 \boldsymbol{a}_1(x,\lambda) - \partial_1 \boldsymbol{a}_0(x,\lambda) - [\boldsymbol{a}_0(x,\lambda), \boldsymbol{a}_1(x,\lambda)] = 0,
\tag{28}
$$

式中出现的零曲率势分量定义在 $\widetilde{sl}(2,R)$ 上（λ 是相应的 Loop 参数），

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_0(x,\lambda) &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{a}_+(x,\lambda) + \boldsymbol{a}_-(x,\lambda)]\\
&= \frac{1}{4\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(H,x)H + \frac{1}{2}\left[(1+\lambda^2)/\lambda\mu^- - \lambda\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_-,x)\right]E_+\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(1+\lambda^2)/\lambda\mu^+ - \lambda\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_+,x)\right]E_-,
\end{aligned}
\tag{29a}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1(x,\lambda) &= \frac{1}{2}[a_+(x,\lambda) - a_-(x,\lambda)]\\
&= \frac{1}{4\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(H,x)H + \frac{1}{2}\left[(1-\lambda^2)/\lambda\mu^- + \lambda\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_-,x)\right]E_+\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(1-\lambda^2)/\lambda\mu^+ + \lambda\frac{1}{\kappa}\dot{\boldsymbol{g}}(E_+,x)\right]E_-.
\end{aligned}
\tag{29b}
$$

按照(29)式所示的 Lax 对，结合(10)，(12)诸式，不难求得体系的基本 Poisson-Lie 括号．结果为

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{a}_1(x,\lambda_1)\otimes, \boldsymbol{a}_1(y,\lambda_2)\}_D\\
&\quad = [r(\lambda_1,\lambda_2), \boldsymbol{a}_1(x,\lambda_1)\otimes 1 + 1\otimes \boldsymbol{a}_1(y,\lambda_2)]\delta(x_1-y_1)\\
&\qquad - [s(\lambda_1,\lambda_2), \boldsymbol{a}_1(x,\lambda_1)\otimes 1 - 1\otimes \boldsymbol{a}_1(y,\lambda_2)]\delta(x_1-y_1)\\
&\qquad - 2s(\lambda_1,\lambda_2)\delta'(x_1-y_1),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
r(\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{1}{8\kappa}[(\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1^2\lambda_2^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)]H\otimes H\\
&\quad + \frac{1}{4\kappa}[(\lambda_1\lambda_2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)](2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)E_+\otimes E_-\\
&\quad + \frac{1}{4\kappa}[(\lambda_1\lambda_2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)](2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)E_-\otimes E_+,
\end{aligned}
\tag{31a}
$$

$$
s(\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{1}{4\kappa}\left(\frac{1}{2}H\otimes H + \lambda_1\lambda_2 E_+\otimes E_- + \lambda_1\lambda_2 E_-\otimes E_+\right).
\tag{31b}
$$

不难验证，(31)式给出的 $r(\lambda_1,\lambda_2)$，$s(\lambda_1,\lambda_2)$ 满足如下的"修正"杨-Baxter 方程[7]：

$$
\begin{aligned}
&[R_{12}(\lambda_1,\lambda_2), R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)] + [R_{12}(\lambda_1,\lambda_2), R_{23}(\lambda_2,\lambda_3)]\\
&\quad + [R_{32}(\lambda_3,\lambda_2), R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)] = 0,\\
&R_{ij}(\lambda_i,\lambda_j) \equiv r_{ij}(\lambda_i,\lambda_j) - s_{ij}(\lambda_i,\lambda_j).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

于是，由广义 sinh-Gordon 方程组 (19) 描写的体系是一个完全可积的动力学系统[7,6]。

值得强调的是，虽然基本 Poisson-Lie 括号(30)式采取非超定域的形式，但广义sinh-Gordon 理论本质上却是超定域的可积场论．事实上，注意到零曲率方程 (28) 具有第二

类规范变换

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_0 \to \boldsymbol{a}_0^\alpha = \alpha \boldsymbol{a}_0 \alpha^{-1} + \partial_0 \alpha \alpha^{-1}, \\
&\boldsymbol{a}_1 \to \boldsymbol{a}_1^\alpha = \alpha \boldsymbol{a}_1 \alpha^{-1} + \partial_1 \alpha \alpha^{-1}, \\
&\alpha = \alpha(x,\lambda) \in \widetilde{S}L(2,R)
\end{aligned} \tag{33}
$$

下的不变性，如果要求基本 Poisson-Lie 括号也具有相应的形式不变性，

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{a}_1^\alpha(x,\lambda_1) \otimes, \boldsymbol{a}_1^\alpha(y,\lambda_2)\}_D \\
&\quad = [r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2), \boldsymbol{a}_1^\alpha(x,\lambda_1)\otimes | + | \otimes \boldsymbol{a}_1^\alpha(y,\lambda_2)]\delta(x_1 - y_1) \\
&\qquad - [s^\alpha(\lambda_1,\lambda_2), \boldsymbol{a}_1^\alpha(x,\lambda_1)\otimes | - | \otimes \boldsymbol{a}_1^\alpha(y,\lambda_2)]\delta(x_1 - y_1) \\
&\qquad - 2s^\alpha(\lambda_1,\lambda_2)\delta'(x_1 - y_1),
\end{aligned} \tag{34}
$$

则

$$
\begin{aligned}
r_1^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) = {}& \alpha\otimes\alpha \cdot r(\lambda_1,\lambda_2) \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1}\delta(x_1 - y_1) \\
& + \frac{1}{2}\alpha\otimes | \cdot \{\boldsymbol{a}_1(x,\lambda_1)\otimes, \alpha\}_D \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1} \\
& + \frac{1}{2} | \otimes\alpha \cdot \{\alpha\otimes, \boldsymbol{a}_1(y,\lambda_2)\}_D \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1},
\end{aligned} \tag{35a}
$$

$$
\begin{aligned}
s_1^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) = {}& \alpha\otimes\alpha \cdot s(\lambda_1,\lambda_2) \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1}\delta(x_1 - y_1) \\
& + \frac{1}{2}\alpha\otimes | \cdot \{\boldsymbol{a}_1(x,\lambda_1)\otimes, \alpha\}_D \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1} \\
& - \frac{1}{2} | \otimes\alpha \cdot \{\alpha\otimes, \boldsymbol{a}_1(y,\lambda_2)\}_D \cdot \alpha^{-1}\otimes\alpha^{-1},
\end{aligned} \tag{35b}
$$

式中规定

$$
\begin{aligned}
r_1^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) &\equiv r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2)\delta(x_1 - y_1), \\
s_1^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) &\equiv s^\alpha(\lambda_1,\lambda_2)\delta(x_1 - y_1).
\end{aligned}
$$

选择

$$
\alpha(x,\lambda) = \exp(-\phi/2H)\exp(-\lambda v E_+), \tag{36}
$$

经过冗长但初等的验算得知:

$$
\begin{aligned}
r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) = {}& \frac{1}{8\kappa}[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]H\otimes H \\
& + \frac{1}{2\kappa}[\lambda_1\lambda_2(1 - \lambda_1^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]E_+\otimes E_- \\
& + \frac{1}{2\kappa}[\lambda_1\lambda_2(1 - \lambda_2^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]E_-\otimes E_+, \\
s^\alpha(\lambda_1,\lambda_2) = {}& 0.
\end{aligned} \tag{37}
$$

故当 α 按(36)式定义时，基本 Poisson-Lie 括号(34)式将采取超定域形式

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{a}_1^\alpha(x,\lambda_1)\otimes, \boldsymbol{a}_1^\alpha(y,\lambda_2)\}_D \\
&\quad = [r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2), \boldsymbol{a}_1^\alpha(x,\lambda_1)\otimes | + | \otimes \boldsymbol{a}_1^\alpha(y,\lambda_2)]\delta(x_1 - y_1),
\end{aligned}
$$

其中 $r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2)$ 由(37)式给出.

(37)式给出的 r 矩阵具有如下特点:

1. $r^\alpha(\lambda_1,\lambda_2)$ 是经典杨-Baxter 方程

$$[r_{12}(\lambda_1,\lambda_2),r_{13}(\lambda_1,\lambda_3)]+[r_{12}(\lambda_1,\lambda_2),r_{23}(\lambda_2,\lambda_3)]$$
$$+[r_{13}(\lambda_1,\lambda_3),r_{23}(\lambda_2,\lambda_3)]=0 \tag{38}$$

的解。

2. $r^a(\lambda_1,\lambda_2)$ 满足反对称条件

$$\mathbf{P}r(\lambda_1,\lambda_2)\mathbf{P}=-r(\lambda_2,\lambda_1),$$
$$(\mathbf{P}_{ij,kl}\equiv\delta_{ik}\delta_{il}). \tag{39}$$

3. $r^a(\lambda_1,\lambda_2)$ 依赖于两个谱参数，它经过 Loop 代数的自同构变换

$$r^a(\lambda_1,\lambda_2)\to\lambda_1^{-\frac{1}{2}adH}\otimes\lambda_2^{-\frac{1}{2}adH}\cdot r^a(\lambda_1,\lambda_2)$$
$$=\frac{1}{8\kappa}[(\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1^2\lambda_2^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)]H\otimes H$$
$$+\frac{1}{2\kappa}[\lambda_2^2(1-\lambda_1^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)]E_+\otimes E_-$$
$$+\frac{1}{2\kappa}[\lambda_1^2(1-\lambda_2^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)]E_-\otimes E_+, \tag{40}$$

再把谱参数重新定义为

$$\lambda_1^{-2}-1\to\lambda_1,\ \ \lambda_2^{-2}-1\to\lambda_2,$$

则

$$r^a(\lambda_1,\lambda_2)=-\frac{1}{4\kappa}[(\lambda_1+\lambda_2)/(\lambda_1-\lambda_2)]\left(\frac{1}{2}H\otimes H+E_+\otimes E_-+E_-\otimes E_+\right)$$
$$-\frac{1}{4\kappa}(E_+\otimes E_--E_-\otimes E_+).$$

此 $r^a(\lambda_1,\lambda_2)$ 实质地依赖于一个谱参数 λ_1/λ_2，是一个三角型 r 矩阵.

有关体系的 dressing 对称性以及可定域化的讨论，我们将在文献[12]中论述.

作者杨焕雄、杨文力、王延申衷心地感谢王佩、石康杰教授及赵柳博士在本工作中给予的热情指导和帮助.

[1] V. G. Drinfel'd and V. Sokolov, *J. Sov. Math.* **30**(1984), 1975.

[2] A. Alekseev and S. Shatashvili, *Nucl. Phys.* **B323**(1989), 719. P. Forga'cs, A. Wipf, J. Balog, L. Fehe'r and L. O'Raifeartaigh, *Phys. Lett.* **B227**(1989), 214. L. Bonora, M. Matrellini and Y. Z. Zhang, *Phys. Lett.*, **B253**(1991), 373.

[3] A. B. Zamolodchikov, *JETP Lett*, **46**(1987), 160; *Int. J. Mod. Phys.* **A3**(1988), 743; **A4**(1989), 4235.

[4] K. Gawedzki and A. Kupianen, *Nucl. Phys.*, **B320**(1989), 625; P. Bowcock, *Nucl. Phys.*, **B316**(1989), 80; J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Ann. Phys.*, **203**(1990), 76.

[5] D. Bernard, Commun. *Math. Phys.*, **137**(1991), 191.

[6] L. Faddeev, Integrable Models in (1+1)-Dimensional Quantum Field Theory, Les. Houches, Session XXX IX, Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics (1982), p. 561.

[7] J. Maillet, *Nucl. Phys.*, **B269**(1986), 54.

[8] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd, *Sov. Rev.*, **C4**(1984), 93.

[9] J. Avan, J. M. Maillard and M. Talon, *Phys. Lett.*, **B243**(1990), 116.

[10] D. A. M. Dirac, Lectures on Quantum mechanics (Belfer Graduate School of Science, New York, 1964).

[11] N. YU. Reshetikhin and M. Z. Semenov-Tian-Shansky, *Lett. Math. Phys.*, **19**(1990), 122; M. Jimbo, *Comm. Math. Phys.*, **102**(1986), 537.
[12] 王延申、杨文力、杨焕雄、侯伯宇，本刊本期.

A CLASSICAL COMPLETELY INTEGRABLE EXTENDED SINH-GORDON SYSTEM ARISING FROM NON CONFORMALLY CONSTRAINED $SL(2,R)$ WZNW MODEL (I)

WANG YAN-SHEN YANG WEN-LI YANG HUAN-XIONG HOU BO-YU
Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069
(Received 12 April 1993)

ABSTRACT

By imposing conformally broken constraints on $SL(2,R)$ WZNW model, we obtain a new classical completely integrable system which contains the famous sinh-Gordon system as a special case. The integrability of this extended sinh-Gordon system is exhibited by the existence of the Lax pair with spectral parameters. And its fundamental Poisson-Lie brackets can be ultralocalized, corresponding classical r-matrix depends on two spetral parameters and satisfies the classical Yang-Baxter equation. After a suitable automorphic transformation of the loop algebra on which the above Lax pair takes value, such an ultralocalized r-matrix can be classified to the so-called trigonometric type of r-matrices depending essentially on one spectral parameter.

PACC: 0220; 0350; 1110; 0240