

一个经典完全可积的非共形约束的 $SL(2, R)$ Wess-Zumino-Novikov- Witten 模型 (II)

王延申 杨文力 杨焕雄 侯伯宇

西北大学现代物理研究所, 西安 710069

(1993 年 4 月 12 日收到)

本文在文献[4]的基础上, 讨论了广义 sinh-Gordon 体系的 Dressing 对称性及其可定域化的条件.

PACC: 0220; 0350; 1110; 0240

一、引言

本文将在文献[4]的基础上, 根据 r 矩阵极点的留数, 找到了 Loop 代数的两个迷向子代数. 与这两个子代数相应, 构造无穷小的 Dressing 变换^[1], 证明了它不但是体系运动方程的对称变换, 而且不变 Lax 对的用独立场量表达的复杂形式. 这样, 我们又一次说明了广义 sinh-Gordon 方程组的完全可积性. 同时, 还将一般性的讨论可积模型的可超定域化的必要条件, 给出一个判断是否可超定域化的判别式.

二、广义 sinh-Gordon 体系的 Dressing 对称性

本节研究广义 sinh-Gordon 方程的 Riemann-Hilbert 问题. 首先注意到文献[4]的方程(19)可以等价地表示为

$$\begin{aligned} \partial_+ a_- - \partial_- a_+ - [a_+, a_-] &= 0, \\ a_+ &= \left(\frac{1}{2} \partial_+ \phi - v \mathcal{P}_v \right) H + \mu^+ e^\phi \lambda^{-1} E_- \\ &\quad + \mu^- e^{-\phi} (\lambda^{-1} E_+ - \lambda E_+) + e^\phi \mathcal{P}_v \lambda E_+, \\ a_- &= -\frac{1}{2} \partial_- \phi H + v \mathcal{P}_v \lambda^2 H - v^- e^\phi \lambda E_+ \\ &\quad - v^2 \mathcal{P}_v e^{-\phi} (\lambda E_+ - \lambda^3 E_+) - e^\phi \mathcal{P}_v \lambda E_- \end{aligned} \quad (1)$$

或者

$$a_+ = a_+(H^0)H + a_+(E_+^1)\lambda E_+ + a_+(E_+^{-1})\lambda^{-1}E_+ + a_+(E_-^{-1})\lambda^{-1}E_-, \quad (2a)$$

$$\mathbf{a}_- = \mathbf{a}_-(H^0)H + \mathbf{a}_-(H^2)\lambda^2 H + \mathbf{a}_-(E_+^1)\lambda E_+ + \mathbf{a}_-(E_+^3)\lambda^3 E_+ + \mathbf{a}_-(E_-^1)\lambda E_-, \quad (2b)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_+(H^0) &\equiv \frac{1}{2} \partial_+ \phi - w \mathcal{P}_w, \quad \mathbf{a}_+(E_+^1) \equiv -\mu^- e^{-\phi} + e^{\phi} \mathcal{P}_w, \\ \mathbf{a}_+(E_+^{-1}) &\equiv \mu^- e^{-\phi}, \quad \mathbf{a}_+(E_-^{-1}) \equiv \mu^+ e^{\phi}, \quad \mathbf{a}_-(H^0) \equiv -\frac{1}{2} \partial_- \phi, \\ \mathbf{a}_-(H^2) &\equiv v \mathcal{P}_v, \quad \mathbf{a}_-(E_+^3) \equiv v^2 \mathcal{P}_v e^{-\phi}, \\ \mathbf{a}_-(E_+^1) &\equiv -v^2 \mathcal{P}_v e^{-\phi} - v^- e^{\phi}, \quad \mathbf{a}_-(E_-^1) \equiv -e^{\phi} \mathcal{P}_v. \end{aligned} \quad (2c)$$

(1)或(2)式实际上就是 $\alpha = e^{-\phi/2H} e^{-\lambda v E_+}$ 时文献[4]中的(33)式。事实上,若定义 $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-)$, 并利用文献[4]中的(15)式, 则可由(1)式求得如下超定域形式的基本 Poisson-Lie 括号:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_1(x, \lambda_1) \otimes, \mathbf{a}_1(y, \lambda_2)\}_{\text{D}} &= \delta(x_1 - y_1)[r(\lambda_1, \lambda_2), \mathbf{a}_1(x, \lambda_1) \otimes | + | \otimes \mathbf{a}_1(x, \lambda_2)], \\ r(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{8\kappa} [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_2^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] H \otimes H \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} [\lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_1^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] E_+ \otimes E_- \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} [\lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_2^2)/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] E_- \otimes E_+. \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式正是文献[4]中的(37)式给出的 r 矩阵。

观察(1)式,发现描写广义 sinh-Gordon 方程组的 Lax 对不是取值在通常意义下的 $\widetilde{sl}(2, R)$ 上,而是取值在一个“扭曲”的 $\widetilde{sl}(2, R)$ 上,其代表元素为

$$X(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_{2n} \lambda^{2n} H + y_{2n+1} \lambda^{2n+1} E_+ + z_{2n+1} \lambda^{2n+1} E_-). \quad (4)$$

将此扭曲 $\widetilde{sl}(2, R)$ 记为 $\widetilde{sl}(2, R)_{\text{T}}$. 按照(3)式的 r 矩阵, $\widetilde{sl}(2, R)_{\text{T}}$ 中存在着两个子代数,其代表元素分别定义为

$$X_{\pm} = - \oint_{c_{\pm}} \frac{d\lambda_2}{2\pi i} [1/(\lambda_2(1 - \lambda_2^2))] \text{Tr}_2[r(\lambda_1, \lambda_2) \cdot | \otimes X(\lambda_2)], \quad (5)$$

积分围道 c_+ 中仅包含极点 $\lambda_2 = 0, \pm 1$, 而 c_- 中仅包含极点 $\lambda_2 = \infty$ (无穷远点)。

(1) 式中的零曲率方程可以作为线性方程组

$$\partial_{\pm} T(x, \lambda) = \mathbf{a}_{\pm} T(x, \lambda) \quad (6)$$

的可积条件, $T(x, \lambda)$ 称为线性散射幅。利用此量可以构造出 $\widetilde{sl}(2, R)_{\text{T}}$ 代数

$$\begin{aligned} \Theta_X &\equiv T(x, \lambda) X(\lambda) T^{-1}(x, \lambda) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{2n} \lambda^{2n} H + b_{2n+1} \lambda^{2n+1} E_+ + c_{2n+1} \lambda^{2n+1} E_-). \end{aligned} \quad (7)$$

其子代数元素的明显形式为

$$\Theta_+ = \sum_{l=0}^{\infty} (a_{2l} \lambda^{2l} H + b_{2l+1} \lambda^{2l+1} E_+ + c_{2l+1} \lambda^{2l+1} E_-) - \frac{1}{2} \phi H - \chi \lambda E_+, \quad (8a)$$

$$\Theta_- = - \sum_{l=-\infty}^{-1} (a_{2l}\lambda^{2l}H + b_{2l+1}\lambda^{2l+1}E_+ + c_{2l+1}\lambda^{2l+1}E_-) - \frac{1}{2}\phi H - \chi\lambda E_+, \quad (8b)$$

$$\phi = 2a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}, \quad \chi = \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l+1}. \quad (8c)$$

很明显,

$$\Theta_X = \Theta_+ - \Theta_-. \quad (9)$$

广义 sinh-Gordon 方程的 Riemann-Hilbert 问题就是求证 $\widetilde{M}(2, R)_T$ 的上述两个子代数是迷向子代数, 亦即求证: 若用 $\Theta_{\pm}$ 对零曲率势 $a_{\pm}$ 进行规范变换 (dressing 变换), 不但能保证零曲率方程形式不变, 而且能保证零曲率势 $a_{\pm}$ 的形式不变 (dressing 对称性)。

无穷小形式的 dressing 变换表示式为^[1]

$$\delta a_{\pm} = \partial_{\pm}\alpha - [a_{\pm}, \alpha], \quad \delta a_{\pm} = \partial_{\pm}\alpha - [a_{\pm}, \alpha], \quad (10)$$

式中 α 选择为 Θ_+ 或 Θ_- 。例如选择 $\alpha = \Theta_+$, 则(10)式的具体形式由下式给出:

$$\begin{aligned} \delta a_+(H^0) &= -\frac{1}{2}\partial_+\phi + a_+(E_+^1)c_{-1} - a_+(E_-^1)\chi, \\ \delta a_+(E_+^1) &= -\partial_+\chi + 2a_+(H^0)\chi - a_+(E_+^1)\phi, \\ \delta a_+(E_+^{-1}) &= 2a_+(E_+^{-1})a_0 - a_+(E_+^{-1})\phi, \\ \delta a_+(E_-^1) &= -2a_+(E_-^1)a_0 + a_+(E_-^1)\phi, \\ \delta a_-(H^0) &= -\frac{1}{2}\partial_-\phi + a_-(E_+^1)c_{-1} + a_-(E_+^1)c_{-1} - a_-(E_-^1)b_{-1}, \\ \delta a_-(H^2) &= -a_-(E_-^1)\chi + a_-(E_+^1)c_{-1}, \\ \delta a_-(E_-^1) &= a_-(E_-^1)\phi - 2a_-(H^2)c_{-1}, \\ \delta a_-(E_+^1) &= -\partial_-\chi + 2a_-(H^0)\chi + 2a_-(H^2)b_{-1} - a_-(E_+^1)\phi \\ &\quad - 2a_-(E_+^1)a_{-2}, \\ \delta a_-(E_+^1) &= 2a_-(H^2)\chi - a_-(E_+^1)\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

这里已经不加说明地应用了(2c)式的约定。

根据(6),(7)式可知存在如下的恒等式(设(7)式中的 X 与时空坐标无关):

$$\partial_{\pm}\Theta_X = [a_{\pm}, \Theta_X], \quad (12)$$

其分量形式为

$$\begin{aligned} \partial_+a_{2n} &= a_+(E_+^1)c_{2n-1} + a_+(E_+^{-1})c_{2n+1} - a_+(E_-^1)b_{2n+1}, \\ \partial_+b_{2n+1} &= 2a_+(H^0)b_{2n+1} - 2a_+(E_+^1)a_{2n} - 2a_+(E_+^{-1})a_{2n+2}, \\ \partial_+c_{2n+1} &= -2a_+(H^0)c_{2n+1} + 2a_+(E_-^1)a_{2n+2}, \\ \partial_-a_{2n} &= a_-(E_+^1)c_{2n-1} + a_-(E_+^1)c_{2n-3} - a_-(E_-^1)b_{2n-1}, \\ \partial_-b_{2n+1} &= 2a_-(H^0)b_{2n+1} + 2a_-(H^2)b_{2n-1} - 2a_-(E_+^1)a_{2n} - 2a_-(E_+^1)a_{2n-2}, \\ \partial_-c_{2n+1} &= -2a_-(H^0)c_{2n+1} - 2a_-(H^2)c_{2n-1} + 2a_-(E_-^1)a_{2n}. \end{aligned} \quad (13)$$

借助于此恒等式, 广义 sinh-Gordon 方程组[文献[4]中的(19)式]的无穷小 dressing 变换式(11)可以用基本场量表出。结果为

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}, \\
\delta\nu &= -2a_0\nu - \nu^2 e^{-\phi} c_{-1} + e^{\phi} \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l+1}, \\
\delta w &= e^{\phi} \sum_{l=0}^{\infty} c_{2l+1}.
\end{aligned} \tag{14}$$

不难验证, (14)式是广义 sinh-Gordon 方程的对称变换, 它保持 Lax 对(1)式的形式不变。

三、系统超定域化的一般讨论

从某种意义上讲, 广义 sinh-Gordon 理论可以看成 Maillet 提出的非超定域可积模型中的一个可超定域化的例子^[2-4]。本节试图一般性地讨论可积模型超定域化的判别式。

完全可积模型的特征之一是存在含谱的 Lax 对 $\alpha_0(\lambda, \chi)$, $\alpha_1(\lambda, \chi)$ 。一般情况下, Lax 对的空间分量 $\alpha_1(\lambda, \chi)$ 可以完全用相空间变量表出。我们进一步假定

$$\alpha_1(\lambda, \chi) = \alpha_1(\lambda; \theta^a, \theta'^a, \pi_a),$$

并假定 $\alpha_1(\lambda, \chi)$ 可以分解为两部分

$$\alpha_1(\lambda, \chi) = \alpha_1^{(0)}(\lambda, \chi) + \alpha_1^{(1)}(\lambda, \chi),$$

其中 $\alpha_1^{(0)}(\lambda, \chi)$ 中不含正则坐标 $\theta^a (a = 1, 2, \dots, q)$ 的空间导数 θ'^a, θ''^a 仅出现在 $\alpha_1^{(1)}(\lambda, \chi)$ 中,

$$\alpha_1^{(1)}(\lambda, \chi) = \sum_{a,i} X_a^i(\lambda, \theta) \theta'^a T_i, \tag{15}$$

$T_i (i = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{G})$ 是 Lax 对取值的 Loop 代数 $\tilde{\mathcal{G}}$ 相应的有限维 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的生成元,

$$\begin{aligned}
[T_i, T_j] &= \sum_k f_{ijk} T_k, \\
\text{Tr}(T_i T_j) &= 2\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

众所周知, 在保证零曲率方程

$$\partial_0 \alpha_1 - \partial_1 \alpha_0 - [\alpha_0, \alpha_1] = 0$$

形式不变的条件下, Lax 对允许有文献[4]中的(33)式所示的规范变换

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i^a = \alpha \alpha_i \alpha^{-1} + \partial_i \alpha \alpha^{-1} = \alpha \alpha_i^{(0)} \alpha^{-1} + \alpha \alpha_i^{(1)} \alpha^{-1} + \partial_i \alpha \alpha^{-1}.$$

由此看出理论可超定域化的必要条件为

$$\alpha \alpha_1^{(1)} \alpha^{-1} + \partial_1 \alpha \alpha^{-1} = 0$$

或者

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha^{-1} \partial_1 \alpha = 0.$$

引入一组辅助变量 $\mathcal{Q}_s^i(\lambda, \theta)$,

$$\alpha^{-1} \partial_s \alpha = \sum_i \mathcal{Q}_s^i(\lambda, \theta) T_i, \tag{16}$$

又可将这一必要条件表示为

$$X_a^i(\lambda, \theta) + Q_a^i(\lambda, \theta) = 0. \quad (17)$$

我们希望完全用 $a_i(\lambda, \chi)$ 中的信息将可超定域化的条件表出。根据辅助变量 $Q_a^i(\lambda, \theta)$ 的定义(16)式, 有

$$\partial_b(\alpha^{-1}\partial_a\alpha) - \partial_a(\alpha^{-1}\partial_b\alpha) = [\alpha^{-1}\partial_a\alpha, \alpha^{-1}\partial_b\alpha]$$

或者

$$\partial_b Q_a^i - \partial_a Q_b^i = \sum_{j,k} f_{ijk} Q_a^j Q_b^k.$$

借助此辅助公式, 必要条件(17)式最终完全可用 X_a^i 表出

$$\partial_b X_a^i(\lambda, \theta) - \partial_a X_b^i(\lambda, \theta) + \sum_{j,k} f_{ijk} X_a^j(\lambda, \theta) X_b^k(\lambda, \theta) = 0. \quad (18)$$

这就是所求的理论是否可超定域化的判别式。

(18)式具有明确的几何意义。若引入如下的群流形上的联络 1 形式,

$$A = \sum_{i,a} T_i X_a^i(\lambda, \theta) d\theta^a, \quad (19)$$

则(18)式可以简洁地表示为如下的零曲率方程:

$$dA + A \wedge A = 0. \quad (20)$$

因此欲了解体系是否具有超定域性, 只须计算下面的“曲率”:

$$F \equiv dA + A \wedge A. \quad (21)$$

作者杨焕雄、杨文力、王延申衷心地感谢王佩、石康杰教授及赵柳博士在本工作中给予热情指导和帮助。

- [1] O. Babelon and D. Bernard, *Phys. Lett.*, **B260**(1991), 81. B. Y. Hou, *J. Math. Phys.*, **25**(1984), 2325.
- [2] J. Maillet, *Nucl. Phys.*, **B269**(1986), 54.
- [3] B. Y. Hou, W. L. Yang. Dressing transformations of Conformal Affine Toda, NWU—IMP—920624, to appear in *Int. Journ. Mod. Phys. A*.
- [4] 王延申、杨文力、杨焕雄、侯伯宇, **43**(1994), 175.

**A CLASSICAL COMPLETELY INTEGRABLE EXTENDED
SINH-GORDON SYSTEM ARISING FROM NON
CONFORMALLY CONSTRAINED $SL(2, R)$
WZNW MODEL (II)**

WANG YAN-SHEN YANG WEN-LI YANG HUAN-XIONG HOU BO-YU

Institute of Modern Physics, Northwest University Xi'an 710069

(Received 12 April 1993)

ABSTRACT

On the basis of the study in Ref [4], we construct the dressing transformations of the fundamental variables and show the dressing symmetry of the constrained system (extended sinh—Gordon equations). Finally, we discuss the ultralocalizable criterion of an arbitrary 2D integrable model.

PACC: 0220; 0350; 1110; 0240