

一维简并双参数四次方映射的符号动力学

谢发根

北京师范大学物理系, 北京 100875;

中国科学院理论物理研究所, 北京 100080

(1993年4月13日收到)

研究了一维简并双参数四次方映射的符号动力学, 构造了揉平面的超稳轨道的骨架图及关节点. 根据拓扑熵定义, 给出了拓扑熵混沌存在的判据.

PACC: 0545

一、引言

符号动力学作为动力学理论的一个分支, 源远流长, 而应用于非线性物理领域始于本世纪70年代. Metropolis 等人将符号动力学应用于一维单峰区间映射, 取得了一些普适性的结果. 例如, 分岔结构的 $U(MSS)$ 序列即周期窗口数等. 之后, 人们把它作为一个强有力的工具应用于一维区间立方映射、圆映射、常微分方程和二维映射等等, 取得了丰硕成果^[1-13]. 此外, 郝柏林等人^[14]讨论了一种一维由单参量刻画的简并四次方映射的符号动力学. 本文主要讨论由双参量刻画的一维简并四次方映射,

$$x_{n+1} = -Ax_n^4 + (A - B - 1)x_n^2 + B, \quad (1)$$

如图1所示. A, B 为控制参量. 在图1中, 临界点 C_1, D 和 C_2 将映射区间分为四个子区间, 分别记为 L, M, N 和 R . 其中 L 和 N 为增区间, M 和 R 为减区间. 当 $B = -1$ 时, (1) 式退化为文献[1]讨论的情况.

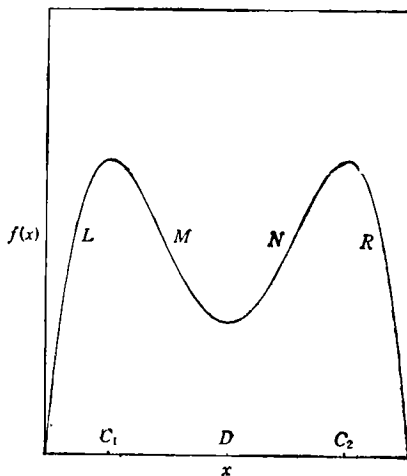


图1 一维简并双参数四次方映射

二、排序规则及允字条件

任意给定一个初始点 x_0 , 它的迭代轨道为

$$x_0, x_1, \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots. \quad (2)$$

根据下列条件,可写出(2)式的相应符号序列 $S_0 S_1 \cdots S_n \cdots$:

$$S_i = \begin{cases} L & x_i < C_1, \\ C_1 & x_i = C_1, \\ M & C_1 < x_i < D, \\ D & \text{如果 } x_i = D, \\ N & D < x_i < C_2, \\ C_2 & x_i = C_2, \\ R & x_i > C_2. \end{cases} \quad (3)$$

并且称此符号序列为 x_0 的迭代符号序列。为了对映射区间上的任意两点的迭代符号序列比较大小,根据映射的性质规定排序规则如下:

1. 自然序: $L < C_1 < M < D < N < C_2 < R$;

2. 如果两个符号序列 $I_1 = I\nu \cdots$ 和 $I_2 = I\mu \cdots$ 有相同字头 I 以及 $\nu > \mu$, 当 I 包含 M 和 R 的总数为偶数时, $I_1 > I_2$, 否则 $I_1 < I_2$ 。

在分析系统的分岔结构时,映射的临界点的特性尤为重要。例如,分岔结构中的暗线等。映射区间上的任意一点经有限次迭代,必嵌入临界点的一次迭代点与两次迭代点区间之间。称任意临界点 C 的一次迭代点 $f(C)$ 的符号序列为揉序列。如果揉序列包含临界点,称之为超稳揉序列。一般而言, $f(C)$ 随着控制参数的变化而变化。因此,可以把揉序列作为系统的控制参量,而且揉序列的个数决定了刻画系统所需参数的个数。映射(1)式虽有三个临界点,但仅有两个揉序列

$$\begin{aligned} K_+ &= f(C_1) = f(C_2) = \frac{(A-B-1)^2}{4} + B, \\ K_- &= f(D) = B. \end{aligned} \quad (4)$$

给定符号序列 I , 如果 I 是允许的,由看图识字可写出其允字条件

$$\begin{aligned} R, M, N, L &\leq K_+, \\ M, N &\geq K_-, K_+ \geq K_-, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 L 表示序列 I 中所有字母 L 的后继序列集。即

$$L = \{Y | XLY\}.$$

R, N 和 M 的意义类推。当揉序列为超稳揉序列时,允字条件需改为纯粹不等关系。

三、允许超稳揉序列数及其骨架图

超稳揉序列在构造映射的符号平面(揉平面)时,起着非常重要的作用。根据允字条件(5)式,可以计算出任意字长允许的超稳揉序列^[11]。首先,周期1字按由大到小顺序排列如下:

$$\begin{aligned} &C_2 \\ &D \\ &C_1 \end{aligned} \quad (6)$$

很显然,上述各字都是允许字,因此,有3个周期1超稳揉序列。然后,将非临界点字母按

顺序插入(6)式中,并且每个字母重复三次,再在其后按由大到小顺序增加临界字。例如,

$$\begin{aligned}
 &RC_1 \\
 &RD \\
 &RC_2 \\
 &C_2 \\
 &NC_2 \\
 &ND \\
 &NC_1 \\
 &D \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

按下列条件分别查以 C_1, D 和 C_2 结尾的字:

$$\begin{aligned}
 &M, N(XD) > XD, \\
 &R, N, M, L(YC_i) < YC_i,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

其中 X, Y 由非临界字构成, C_i 为 C_1 或 C_2 。这样, 得到 7 个周期 2 超稳揉序列: $RC_1, RD, RC_2, NC_1, MC_1, MD$ 和 LD 。在 (7) 式的每对字之间(包括非允许字), 重复上述过程, 再按 (8) 式查所有周期 3 字, 可得 19 个周期 3 允许超稳揉序列: $RLC_1, RLD, RLC_2, RMC_2, RMC_1, RNC_1, RNC_2, RRD, NRD, NNC_1, NMC_1, NLC_1, MLC_1, MND, MRD, LRD, LND, LMD$ 和 LLD 。

集以 C_i 结尾的序列并排序组成 K_+ 轴, 以 D 结尾的序列并排序组成 K_- 轴。 K_+ 和 K_- 组成映射的揉平面。每个允许超稳揉序列在揉平面上表示一条曲线。Glass 和 Riperez 等人^[12]把超稳轨道在参数平面上的轨迹称为骨架图。利用字提升技术^[1], 可以完全确定映射 (1) 式的所有允许超稳轨道在揉参数平面的轨迹。图 2 为映射 (1) 式的周期字长到 3 的所有允许超稳揉序列的骨架图。

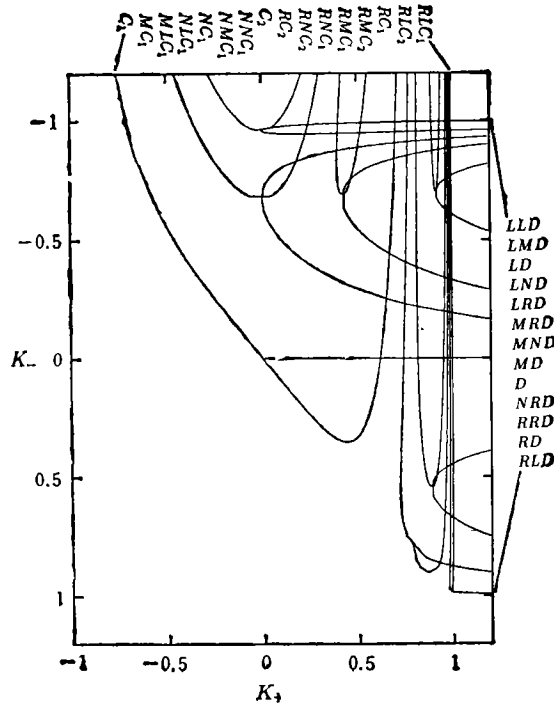


图 2 揉平面上周期 3 的骨架图

四、揉平面上的关节点及其骨架图

在上节讨论中, 每个允许超稳揉序列只需满足自己的允字条件。在揉平面上, 如果一个 K_+ 超稳揉序列和一个 K_- 超稳揉序列相交, 则它们必须同时满足本身和对方的允字条

件。当一对 K_+ 超稳揉序列和一对 K_- 超稳揉序列完全汇合成一点时,称之为关节点,也称为双超稳点。

若揉序列组合 $[K_+, K_-] = [YD, XC]$ 构成关节点,则必须满足

$$\begin{aligned} R, M, L, N(YD, XC) &< YD, \\ M, N(YD, XC) &> XC, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 X, Y 为非临界字集, C 为 C_1 或 C_2 。

若 $[K_+, K_-] = [YD, XC]$ 为关节点,容易证明:

1. $(YD)_+XC, (XC)_+YD$ 均为允许超稳揉序列。
2. $(YDXC, XCYD)$ 是允许的,且在揉平面上刻画双超稳点。

3. $((YD)_+XC, (XC)_-YD)$ 是允许的超稳揉序列对。这里, $(YD)_+$ 和 $(XC)_-$ 分别表示符号序列的最后临界字母用其相邻的两个字母取代的两个符号序列中较大序列和较小序列。图 3 为关节点 $[YD, XC]$ 以及相连的超稳揉序列的骨架图的示意图。实心圆点表示关节点,空心圆圈表示超稳揉序对。

4. $[(YD)_+(XC)_+YD, XC], [YD, (XC)_-(YD)_-XC]$ 和 $[(YD)_+(XC)_+YD, (XC)_-(YD)_-XC]$ 均为关节点。

图 4 为原始关节点 $[YD, XC]$ 及其衍生出来的一些关节点。图 4 中所有符号序列不表示允许揉序列,箭头只表示方向。头两个关节点表示倍周期分岔区。在由 $XC, (XC)_-(YD)_-XC, (YD)_+(XC)_+YD$ 和 YD 构成的方框内没有关节点。对于每个衍生出来的关节点,又可以当作源关节点,衍生出更多的关节点。不断重复下去,可产生任意字长的关节点。图 5 为 YD 和 XC 字长到 3 的关节点图。

在图 2 中,有一些仅由 R 和 L 组成的允许揉序列不能构成关节点。这些揉序列的差别仅在于最后的临界点字母。在揉平面上,三个等字长仅最后临界点字母不同的超稳揉

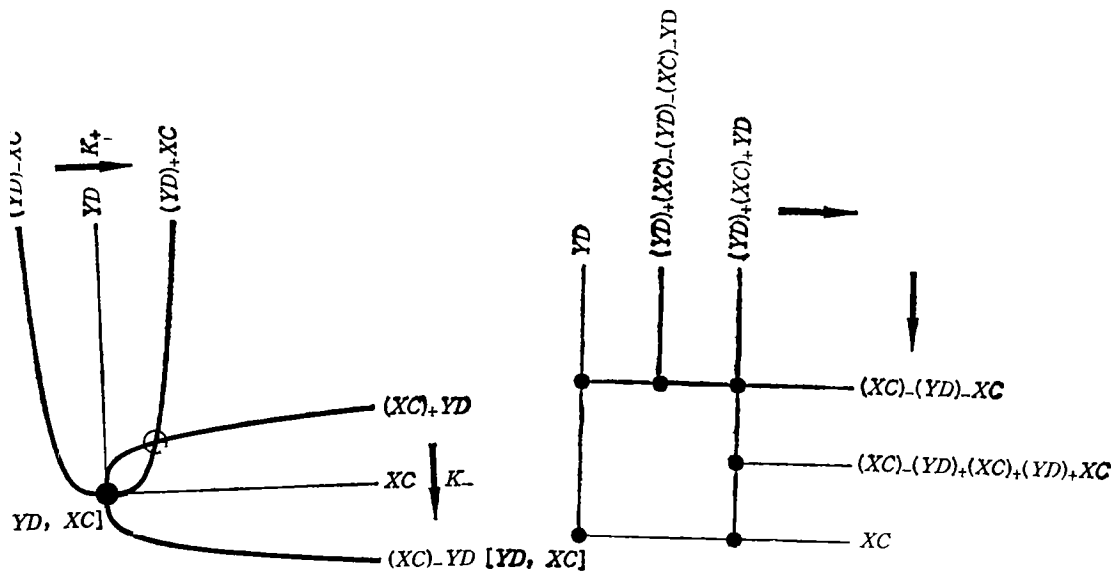


图 3 关节点 $[K_+, K_-] = [YD, XC]$ 及其骨架示意图

图 4 关节点 $[K_+, K_-] = [YD, XC]$ 及其衍生关节点

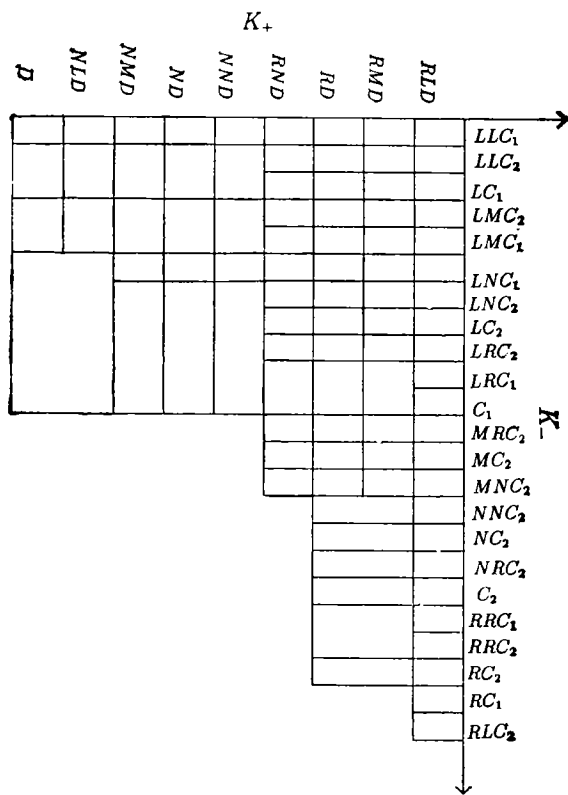


图5 YD 和 XC 字长到 3 的关节点图

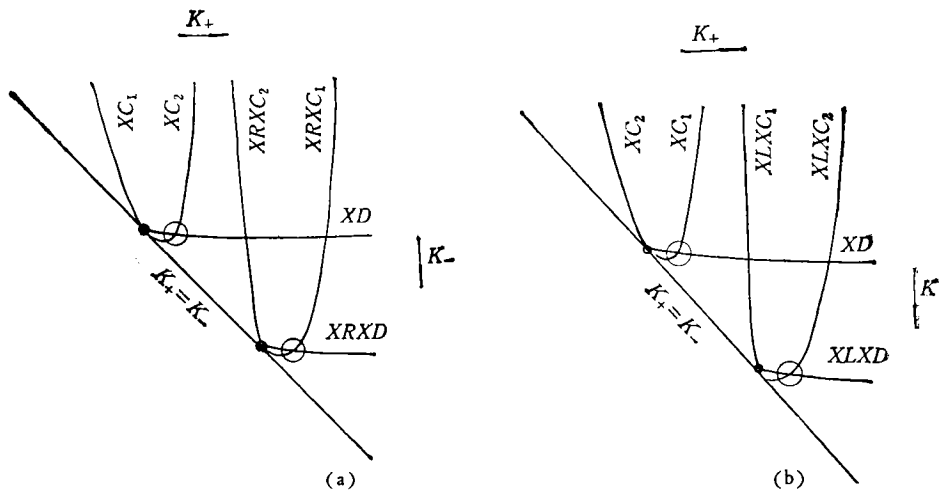


图6 仅由 R 和 L 构成非临界字且只临界字母不同的三个超稳揉序列及其沿 $K_+ = K_-$ 线倍周期分岔序列的骨架示意图。(a) 表示 X 为偶；(b) 表示 X 为奇

序列随着揉序列参数的变化,最后汇聚到 $K_+ = K_-$ 线上一点。由函数的连续性可知,此时 C_1, C_2 和 D 缩为同一点。即 M 和 N 两支消失。因此,在 $K_+ = K_-$ 线上,映射退化为仅有 L 和 R 两支的单峰映射。它的超稳揉序列数及映射的分岔结构,郑伟谋、郝柏林等人进行了大量的细致的讨论。图 6 表示等字长仅由 R 和 L 组成的且仅临界点不同的三个允许

超稳揉序列以及沿着 $K_+ = K_-$ 线增加方向出现倍周期分岔字的骨架图的示意图。实心圆点表示三个序列汇合点,空心圆圈表示允许超稳揉序列对。

五、 $A-B$ 平面的骨架图及拓扑熵混沌

根据(4)式,可将揉平面的骨架图变换成 $A-B$ 平面的骨架图,如图 7 所示。从拓扑形变而言,图 7 就是图 2。这进一步说明,完全可以把揉序列当作参数来刻画区间映射的动力学行为。

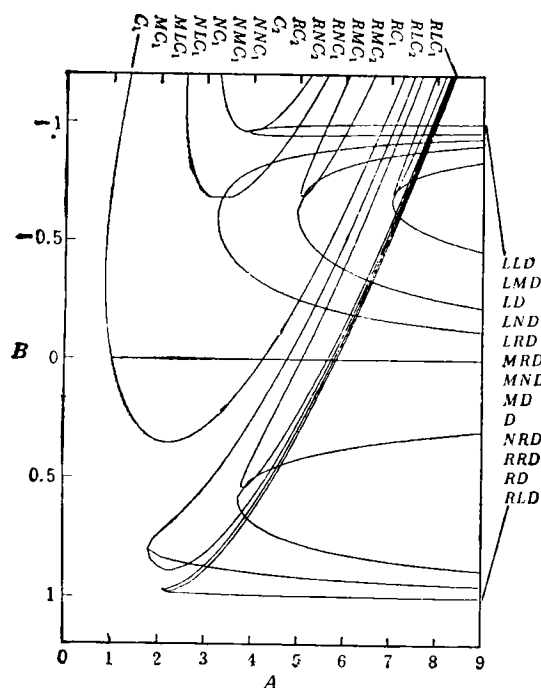


图7 $A-B$ 平面上周期到3的骨架图

在图 2 或图 7 中, 存在许多嵌入混沌区的周期 3 轨道。“周期 3 意味着混沌”说明混沌运动在映射(1)式的分岔结构中平凡出现。然而判断系统进入混沌运动最简单的是数学上的拓扑熵。混沌、拓扑熵定义如下:

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{n}, \quad (10)$$

其中 n 为字长, $N(n)$ 为字长为 n 的允许符号序列的总数,

在揉序列平面上, 根据(10)式不难证明: 从源关节点 $[YD, XC]$ 衍生出来的关节点 $[(YD)_{+}(XC)_{+}YD, (XC)_{-}(YD)_{-}XC]$ 意味着映射的拓扑熵混沌. 此时, 以 $(YD)_{+}(XC)_{-}$ 和 $(YD)_{-}(XC)_{+}$ 为元字节所组成的任何符号序列都是允许的. 记 $YDXC$ 的长度 $|YDXC| = \alpha$, 则有

$$N(n) \geq 2N(n - \alpha), \quad (11)$$

当 n 很大时,

$$N(n) \geq 2^{n/2}. \quad (12)$$

因此,有拓扑熵

$$h \geq \frac{1}{\alpha} \log 2 > 0. \quad (13)$$

- [1] Bai-lin Hao, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, 1989).
- [2] Wei-mou Zheng, *Int. J. Mod. Phys.*, **58**, (1991), 481.
- [3] Wei-mou Zheng and Li-sha Lu, *Commun. Theor. Phys.*, **15**, (1991), 161.
- [4] R. S. Mackay and C. Tresser, *Physica D*, **27**(1987), 412.
- [5] Wei-mou Zheng and Bai-lin Hao, *Prog. Phys.*, **10**(1989), 316.
- [6] Wei-mou Zheng, *Phys. Rev.*, **42A** (1990), 2076.
- [7] Bai-lin Hao, *Physica D*, **51**(1991), 375.

- [8] Wan-zhen Zeng and Lenon-Glass, *Physica D*, **40**(1989), 218.
- [9] Bai-lin Hao, *Physica A*, **140**(1986), 85.
- [10] Min-zhou Ding and Bai-lin Hao, *Commun. Theor. Phys.*, **9**(1987), 375.
- [11] Fa-geng Xie and Bai-lin Hao, in preparation.
- [12] Li Glass and Riperez, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1772.

SYMBOLIC DYNAMICS OF THE ONE-DIMENSIONAL BIQUADRATIC MAP WITH TWO PARAMETERS

XIE FA-GENG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875;
Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080

(Received 13 April 1993)

ABSTRACT

The one-dimensional biquadratic map is studied by means of symbolic dynamics in two parameter plane. The skeleton of superstable orbits and the joints in the kneading plane have been constructed. A criterion of the existence of topological chaos has been given according to the topological entropy.

PACC: 0545