

反向导引场自由电子激光器中 平衡态电子的类熵量*

张世昌¹⁾ 刘庆想²⁾ 徐 勇

西南交通大学应用物理系, 成都 610031

(1993年4月13日收到)

用非线性数值分析方法, 计算反向导引场自由电子激光器中平衡态电子的类熵量。结果表明: 其值比正向导引场时更小, 对应的平衡态电子束质量, 一般都优于正向导引场情况下的电子束质量; 而在反谐振点, 类熵量剧增, 电子束质量严重变坏。从计算得到的结论, 与美国麻省理工学院的实验结果定性上一致。

PACC: 4255T; 4260

一、引 言

最近, 美国麻省理工学院研究小组首次报道^[1]: 在波导型自由电子激光器中, 把原来的正向导引磁场反向, 并适当增大摇摆器磁场幅值, 结果器件的互作用效率戏剧性地从2%提高到了27%。这一实验揭示了一种提高自由电子激光器互作用效率的方法; 同时, 还向自由电子激光器的现有理论提出了挑战, 因为在此之前的理论既不曾预言也不能解释这一现象。因此, 反向导引场自由电子激光器不但具有工程意义, 而且具有学术价值, 很值得研究。

Chu 等人^[2]考虑到旁轴电子(off-axis electron)的回旋谐振效应, 近似地计算了反向导引场自由电子激光器中平衡态电子在反谐振点的运动特性, 以解释实验中束流在反谐振点下降的原因。Freund 等人^[3]用非线性粒子模拟手段, 调整初始参数并考虑 G-T 模, 所得计算结果与实验符合得较好, 但其理论与正向导引场情况下的实验相差较大, 有待进一步论证这一理论的可靠性。我们认为, 反向导引场提高互作用效率的原因, 可能主要来自两个方面: 一是电子的运动学和动力学行为出现新的特征, 使得平衡态电子束质量得到改善; 二是电子束与波的互作用过程中, 出现了新的机制。我们曾推测: 在反向导引场自由电子激光器中, 电子束的自身场起着至关重要的实质性作用³⁾。如所周知, 电子束自身场可分为直流成分和交变成分。为此, 我们曾借助庞伽莱截面图, 把反向导引场与正向

* 国家自然科学基金资助的课题。

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)理论物理分中心, 北京 100080。

2) 工作单位: 中国工程物理研究院电子工程研究所, 成都市 517 信箱 50 分箱。

3) 1992年4月11日张世昌与 G. Bekefi 的私人通信。

导引场做了对比研究,发现平衡态电子在后一情况出现混沌的参数条件下,在前一情况却没有混沌现象^[4]。随后,针对麻省理工学院的实验参数进行计算的结果表明:反向导引场情况下,电子的相轨道与正向导引场情况下有实质性差别,电子束自身直流场可以减小纵向动量离散^[5]。

我们知道,如果自由电子激光器中的电子束质量越好,那么,互作用效率就越高,电磁波输出功率就越强。本文试图通过对平衡态电子“类熵量”(entropylike quantity)^[6-8]的计算,来评估电子束的质量,从而对器件的输出功率及互作用效率做出定性结论,并与实验结果比较。

二、数理模型

在自由电子激光器中,平衡态电子的状态行为,由位形变量 x, y, z 和动量变量 p_x, p_y, p_z 构成的六维相空间中的泛定方程组及初条件,给出定量描述;而参数(为纵向导引磁场的强度,摇摆器磁场的强度及周期)所支起的参数空间中的每一个点,对应一个特定的方程组。这就不难理解:由于反向导引磁场给出的泛定方程组,与正向导引磁场给出的泛定方程组,是不相同的,因此,初条件相同的电子在这两种情况下的状态行为也就不相同。另一方面,在同一参数条件下,不同初条件的电子,其状态行为也是不相同的(用数学语言讲,不同的定解条件对应不同的定解)。电子束由大宗量数目的电子组成,通过对每个电子的跟踪分析来评估电子束质量的方法,不仅计算量太大,而且实际上也不太行得通(至少很难给出每个电子的初条件)。在一定参数条件下,研究相空间中具有相近初条件的两个电子的相轨道的发散程度,是评估电子束质量的有效方法之一。例如,不失一般性,假设初始时刻电子束有一动量离散值 Δp ,单电子的动量 $p \in [p_0 - \Delta p, p_0 + \Delta p]$,此处 p_0 是电子束的标称动量。这一离散将使得各个电子在相空间中的初始位置不同,从而其相轨道不同。我们把具有标称动量的电子称为参考电子(reference electron),它在相空间中的轨道称为参考轨道(reference trajectory)。现在考察任意一个初时刻与参考电子非常邻近的电子,把它的相轨道与参考轨道做定量比较。显然,如果该电子的相轨道随着时间的演化,越来越偏离参考轨道,那么,它与参考电子的同一性就越来越差,整个电子束的初始离散量也就越来越扩大,电子束质量变坏;反之则相反。

1. 类熵量

分析相轨道发散程度的有力手段之一,是计算其“类熵量”(entropylike quantity)^[6-8]。考虑到在计算机数值分析中,轨道呈指数发散会引起迭代过程出现大数溢出(overflow),Benettin 等人^[8]定义了下述表征轨道发散程度的类熵量 $k_N(\tau, x, d_0)$,并给出了具体的迭代方法,

$$k_N(\tau, x, d_0) = \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \ln \frac{|d_i|}{|d_0|}, \quad (1)$$

式中 τ 是归一化时间的迭代步长, N 是迭代次数, x 代表相点在相空间中的位置, d_i 表示迭代到第 i 步时,被考察电子与参考电子所处相点之间的欧几里得范数, d_0 表示 d_i 的初

始值。Benettin 等人^[8]指出：当 $N \rightarrow +\infty$ (这意味着时间趋于 $+\infty$!)， k_N 存在与 τ 及 d_0 无关的极限值，此值与李雅普诺夫特征数一致，因此，这种方法已经被广泛用来计算最大李雅普诺夫特征数。

用类熵量分析自由电子激光器中的平衡态电子相轨道时，特别值得注意的问题是：摇摆器长度是有限值，因此，时间被定义在有限区间 $t_0 \leq t \leq T$ ，这样一来，计算中的迭代数目 N 不趋于无穷大，为有限数。这同通常李雅普诺夫意义下的时间域 $t_0 \leq t < +\infty$ 有根本上的不同，由此而导致的特性差别，不仅反映在稳定性概念定义方面，而且，也反映在类熵量方面。例如，按线性函数关系发散的轨道，当 $N \rightarrow +\infty$ 时，由(1)式计算的类熵量为零；而当 N 为有限数时，(1)式给出的类熵量总不为零。同时，也应该注意到：在 N 为有限数时，由(1)式给出的 k_N 值，其大小仍然反映了相轨道的发散程度： k_N 越大，相轨道发散越严重，电子束质量就越差；反之则相反。本文试图通过对类熵量的分析，来评比在不同参数条件下电子束的质量。由于时间域是有限区间，在计算中应选取尽可能小的初始欧几里得范数 d_0 ，尽可能短的迭代步长 τ ，以使迭代数目尽可能大。

2. 相对论运动方程组

电子的相对论性运动方程为

$$\frac{d(\gamma m_0 \mathbf{v})}{dt} = -|e|(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

式中 m_0 和 $|e|$ 是电子的静质量和电量， $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 和 \mathbf{v} 是电子的相对论能量因子和力学速度， \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是电子感受到的电场和磁场。为了减小迭代过程中的累积误差，引进新变量^[9]

$$\mathbf{V} = \gamma \mathbf{v}. \quad (3)$$

注意到 $\gamma m_0 \mathbf{v}$ 是电子的动量，因此， (x, y, z, V_x, V_y, V_z) 构成六维相空间。为方便数值计算，把时间 t 与 z 对易，于是可导出相对论性电子在相空间中的运动方程组

$$\frac{d\hat{V}_x}{d\hat{z}} = -\frac{\sqrt{1+\hat{V}^2}}{\hat{V}_z} \left[\hat{E}_z + \frac{1}{\sqrt{1+\hat{V}^2}} (\hat{V}_y \hat{B}_z - \hat{V}_z \hat{B}_y) \right], \quad (4)$$

$$\frac{d\hat{V}_y}{d\hat{z}} = -\frac{\sqrt{1+\hat{V}^2}}{\hat{V}_z} \left[\hat{E}_y + \frac{1}{\sqrt{1+\hat{V}^2}} (\hat{V}_x \hat{B}_z - \hat{V}_z \hat{B}_x) \right], \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{V}_z}{d\hat{z}} = -\frac{\sqrt{1+\hat{V}^2}}{\hat{V}_z} \left[\hat{E}_z + \frac{1}{\sqrt{1+\hat{V}^2}} (\hat{V}_x \hat{B}_y - \hat{V}_y \hat{B}_x) \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{z}}{d\hat{z}} = \frac{\hat{V}_z}{\hat{V}_z}, \quad (7)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{z}} = \frac{\hat{V}_y}{\hat{V}_z}, \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{z}} = \frac{\sqrt{1+\hat{V}^2}}{\hat{V}_z}, \quad (9)$$

式中各量已按下式归一化：

$$\begin{aligned}
(\xi, \eta, \zeta) &= (k_w x, k_w y, k_w z); \\
\hat{t} &= ck_w t; \quad \hat{\gamma} = \gamma v/c; \\
\hat{E} &= |e|E/m_0 k_w c^2; \quad \hat{B} = |e|B/m_0 k_w c^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

此处 c 为真空中光速, k_w 为摇摆器磁场波数。在计算中,充分考虑了摇摆器磁场的三维效应,以及电子束产生的自身直流场,取

$$\hat{E}_x = \hat{E}_R \cos \varphi - \hat{E}_\varphi \sin \varphi, \tag{11}$$

$$\hat{E}_y = \hat{E}_R \sin \varphi + \hat{E}_\varphi \cos \varphi, \tag{12}$$

$$\hat{E}_z = 0, \tag{13}$$

$$\hat{B}_x = \hat{B}_R \cos \varphi - \hat{B}_\varphi \sin \varphi, \tag{14}$$

$$\hat{B}_y = \hat{B}_R \sin \varphi + \hat{B}_\varphi \cos \varphi, \tag{15}$$

$$\hat{E}_R = -\frac{1}{2} \omega_b^2 \hat{R}, \tag{16}$$

$$\hat{E}_\varphi = 0, \tag{17}$$

$$\hat{B}_R = 2\hat{B}_w \frac{dI_1(\hat{R})}{d\hat{R}} \cos(\varphi - \xi), \tag{18}$$

$$\hat{B}_\varphi = -2\hat{B}_w \frac{I_1(\hat{R})}{\hat{R}} \sin(\varphi - \xi) - \frac{1}{2} \omega_b^2 v_{z0}/c, \tag{19}$$

$$\hat{B}_z = 2\hat{B}_w \frac{I_1(\hat{R})}{\hat{R}} \sin(\varphi - \xi) + \hat{B}_0, \tag{20}$$

$$\varphi = \arctan \eta/\xi, \tag{21}$$

式中 I_1 是一阶变态贝塞耳函数, ω_b 是电子束的归一化等离子体频率, \hat{B}_w 是摇摆器磁场的归一化幅值, \hat{B}_0 是导引磁场的归一化值。在下面的计算中,还将考虑摇摆器入口区绝热压缩磁场分布的影响。

三、类熵量计算

本节用麻省理工学院给出的实验数据^[4],计算四种典型情况的类熵量。在计算中,考虑了具有 6 周期的摇摆器入口区压缩磁场分布。取电子束半径为 0.25cm, 摇摆器周期为 3.18cm。在初始时刻,参考电子的初值为 $x_0 = 0.127\text{cm}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$, $\gamma_0 = 2.4677$, $v_{z0}/c = (1 - 1/\gamma_0^2)^{1/2} = 0.9165$ 。与参考电子相邻的测试电子的初条件为 $\gamma_0 = 2.4677 + 1 \times 10^{-6}$, 其余各量均与参考电子相同。这样, (1)式中的 $|d_0|$ 仅为 2.7×10^{-6} , 已足够小。迭代过程中用双精度, 归一化步长取 2×10^{-4} 以保证四阶龙格-库塔法的精度足够好。最终迭代总数为 2×10^6 , 已足以使计算的类熵量有意义。

情况 1: 电子处于正向导引磁场、轨道 I

取导引场 $B_0 = +4060\text{G}$, $B_w = 630\text{G}$, 束流强度为 $I_b = 90\text{A}$ 。由(1)式计算的 k_N 值随迭代数目 N 的变化, 示于图 1。从图 1 中可以看到, 随着 N 足够大, k_N 趋于稳定值 0.1163。

情况 2: 电子处于正向导引磁场、轨道 II

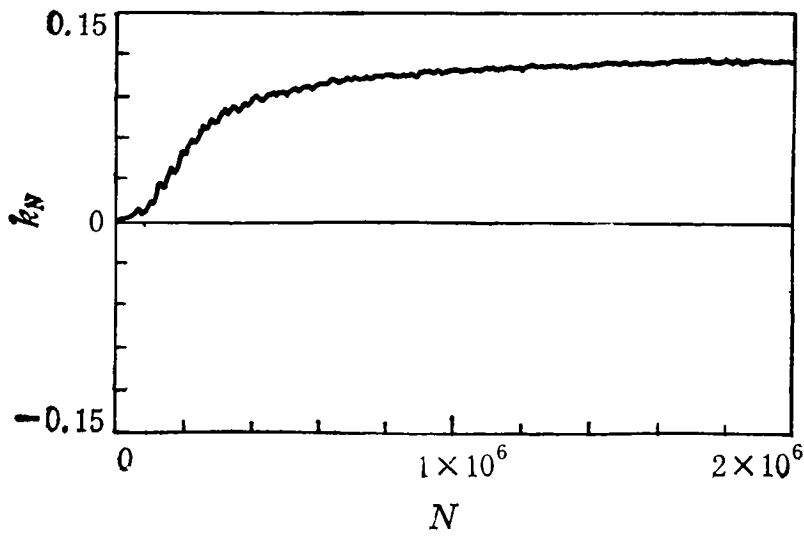


图1 电子在正向导引磁场、轨道 I 情况下的 k_N-N 曲线
 $B_0 = +4060\text{G}$; $B_w = 630\text{G}$; $I_b = 90\text{A}$.

取 $B_0 = +10900\text{G}$, $B_w = 630\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$, k_N-N 曲线示于图2. 图2中显示当 N 足够大后, k_N 趋于稳定值 0.1249.

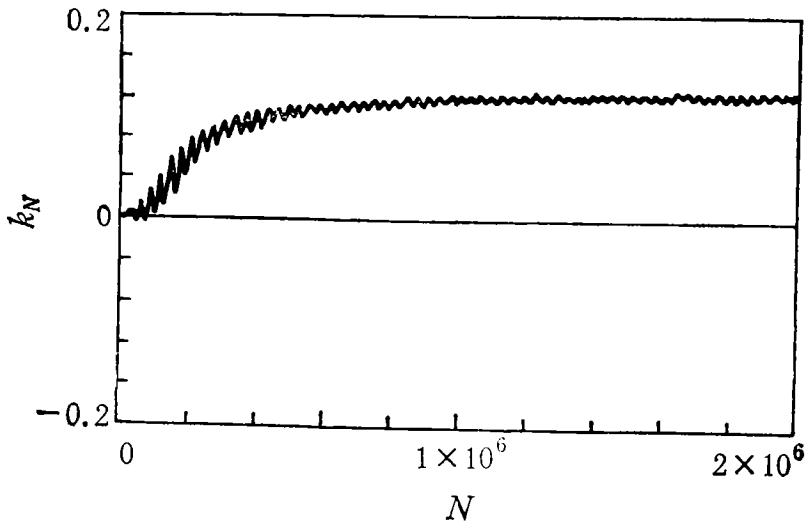


图2 电子处于正向导引磁场、轨道 II 情况下的 k_N-N 曲线
 $B_0 = +10900\text{G}$, $B_w = 630\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$

情况 3: 电子处于反向导引场、反谐振点

当 $k_w v_{z0} = -|\Omega_c|$ 时, 称为反谐振点, 此处 Ω_c 是导引磁场产生的回旋频率. 取 $B_0 = -7600\text{G}$, $B_w = 1470\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$, 对应的 k_N-N 曲线示于图3. 图3中表明 k_N 值起伏很大, 且明显升高, 当 $N = 2 \times 10^6$ 时, 为 0.7297.

情况 4: 电子处于反向导引场、远离反谐振点

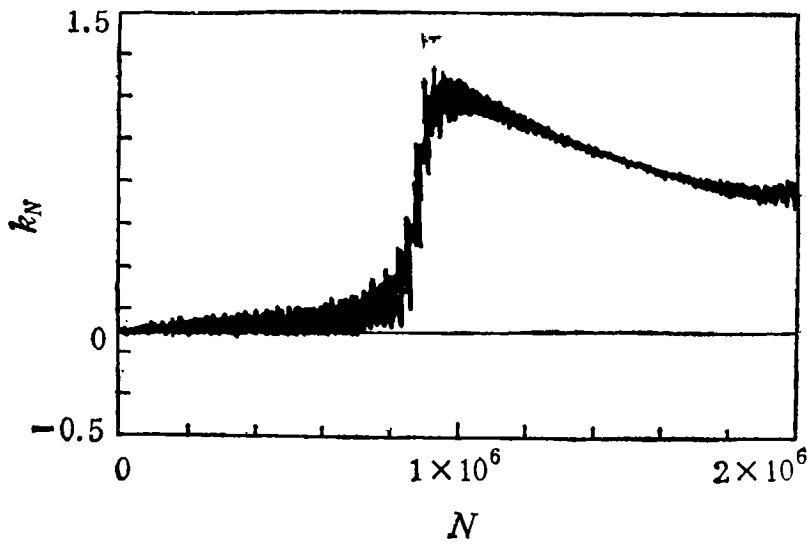


图3 电子处于反向导引磁场、反谐振点情况下的 k_N-N 曲线
 $B_0 = -7600\text{G}$, $B_w = 1470\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$

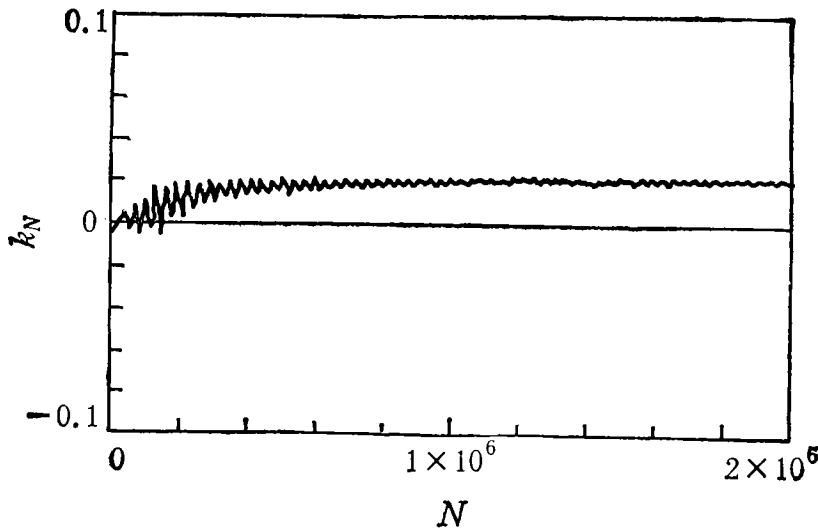


图4 电子处于反向导引磁场、远离反谐振点情况下的 k_N-N 曲线
 $B_0 = -10900\text{G}$, $B_w = 1470\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$

取 $B_0 = -10900\text{G}$, $B_w = 1470\text{G}$, $I_b = 300\text{A}$, 其 k_N-N 曲线示于图4。从图4中可以看出, N 足够大后, k_N 值趋于稳定值, 约为 0.0218, 明显低于前3种情况。

四、与实验比较及讨论

类熵量的大小反映了电子轨道的发散程度, 从而能定性地用来评估电子束的质量。以上节计算为例, 分析 $\gamma_0 = 2.4677 + 1 \times 10^{-6}$ 的测试电子轨道, 相对于 γ_0 等于电子束标

称相对论能量因子 2.4677 的参考电子轨道的发散程度,也就是分析了初始能量离散对电子轨道(从而对电子束质量)的影响。因此,通过上节对类熵量的计算,可以从电子束质量这一角度定性地判断输出特性的优劣。表 1 给出前述 4 种情况的类熵量及相应情况下的实验值(实验值取自文献[1],图 4 及其表 1)。从表 1 中可以看到,较小的类熵量对应较好的输出特性,与实验中观测到的现象完全一致。

表 1 类熵量与输出特性的比较

物理量	正向导引场、 轨道 I: $B_0 = +4.06\text{kG}$ $B_w = 0.63\text{kG}$ $I_b = 90\text{A}$	正向导引场、 轨道 II: $B_0 = +10.9\text{kG}$ $B_w = 0.63\text{kG}$ $I_b = 300\text{A}$	反向导引场、 反谐振点: $B_0 = -7.6\text{kG}$ $B_w = 1.47\text{kG}$ $I_b = 300\text{A}$	反向导引场、远离 反谐振点: $B_0 = -10.9\text{kG}$ $B_w = 1.47\text{kG}$ $I_b = 300\text{A}$
输出功率/MW	5.8	4.2	<1.0	61
互作用效率/%	9	2	<2	27
类熵量	0.1163	0.1249	0.7297	0.0218

从本文对类熵量的计算表明:反向导引场提高自由电子激光器输出功率及互作用效率的重要原因之一,是电子束质量得到明显的改善。即使在反谐振点($k_w v_{z0} \approx -\Omega_c$),电子束质量相对于远离谐振点情况变坏,仍然有相当强的输出功率;而在正向导引场的谐振点($k_w v_{z0} \approx +\Omega_c$),电子根本不能正常输运,也没有正常输出^[10]。两相比较,反向导引场比正向导引场更具优越性。

- [1] M. E. Conde and G. Bekefi, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 3082.
- [2] K. R. Chu and A. T. Lin, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 3235.
- [3] H. P. Freund and A. K. Ganguly, *IEEE Trans on Plasma Phys.*, **20**(1992), 245.
- [4] Shi-Chang Zhang (张世昌) and Yong Xu (徐勇), *SPIE Proc.*, **1929**(1992), 64.
- [5] Shi-Chang Zhang(张世昌), Yong Xu(徐勇) and Qing-Xing Liu (刘庆想), *Phys. Rev. F*,待发表.
- [6] B. V. Chirikov, F. M. Izrael'ev and V. A. Tayurski, *Comput. Phys. Commun.*, **5**(1973), 11.
- [7] M. Casartelli, E. Diana, L. Galgani and A. Scotti, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 1921.
- [8] G. Benettin, L. Galgani and J. Stralcy, *Phys. Rev.*, **A14**(1976), 2328.
- [9] 张世昌、王文耀、徐勇,物理学报,**42**(1993),762.
- [10] 张世昌,物理学报,**37**(1988),1684.

ENTROPY-LIKE QUANTITY OF THE EQUILIBRIUM ELECTRONS IN A FREE-ELECTRON LASER WITH REVERSED GUIDE FIELD

ZHANG SHI-CHANG¹⁾ LIU QING-XIANG²⁾ XU YONG

Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031

(Received 13 April 1993)

ABSTRACT

Nonlinear simulation of the entropy-like quantity is given to the equilibrium electrons in a free-electron laser with reversed guide field. Results indicate that the quality of the electron beam may be better than the one in the case of positive guide field. However, the quality of the beam is spoiled at the antiresonance. The conclusions from the entropy-like quantity principally coincide with the experiment made by the MIT researchers.

PACC: 4255T; 4260

1) *Center of Theoretical Physics, CCAST (World Laboratory), Beijing 100080.*
2) *Permanent address: P. O. Box 517-50, Chengdu*