Tokamak 中磁力线的随机特性

朱 雄 伟

中国科学院物理研究所，北京 100080

1993 年 3 月 30日收到

在直柱近似下，运用哈密顿非线性振荡系统理论研究了平衡态磁场在磁扰动下进入随机状态的过程. 结果表明：一阶扰动哈密顿量仅与径向扰动磁场有关；在单模扰动下，磁力线呈规则磁岛结构；在双模扰动下，给出了磁力线进入随机态的重叠判据；在特定多模扰动下，将Poincaré 截面上点演化关系化为一类标准映象.

PACC: 5235R; 0540

一、引 言

在磁约束聚变等离子体研究中，磁湍流的研究是一个十分重要的课题[1-4]. Tokamak 装置中能量和粒子的约束强烈依赖于约束磁场的结构，等离子体在环形约束装置中损失来源之一是磁力线的扩散，破坏环形对称的扰动导致磁岛的产生，充分大的扰动引起磁岛的重叠，进入磁湍流状态. 磁力线的随机机制以及静电湍流有希望用来解释 Tokamak 中反常输运现象.

本文在直柱近似下讨论 Tokamak 中磁力线的随机特性，从哈密顿扰动系统原理着手讨论磁场的随机特性，结果表明磁力线的随机特性可由一维非线性振荡系统的普遍不稳定性来描述.

二、磁力线扰动的哈密顿形式

当 Tokamak 小、大半径之比 $a/R \ll 1$ 时，可用直柱近似，取 $R=1$，选取柱坐标 (r, θ, z)，$r \ll 1$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant z \leqslant 2\pi$，磁力线方程为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\nabla r}{\boldsymbol{B}\cdot\nabla z} = \frac{B_r}{B_z},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta}{\boldsymbol{B}\cdot\nabla z} = \frac{B_\theta}{rB_z}. \tag{1}$$

定义一标量函数 $H(r, \theta, z)$，使其满足

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H}{\partial\theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial H}{\partial r}. \tag{2}$$

这样如果把 z 看作时间变量，那么 (r,θ) 可以看作关于哈密顿函数H的一对正则变量，(2)式存在的条件为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_r}{B_z}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{B_\theta}{rB_z}\right)=0. \tag{3}$$

考虑到 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，磁力线方程可写为正则哈密顿方程的条件为

$$\frac{B_rB_z}{r}+\boldsymbol{B}\cdot\nabla B_z=0. \tag{4}$$

在直柱近似下，Tokamak 中平衡态磁场可选为

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{r}{q(r)}\hat{e}_\theta+\hat{e}_z,$$

$q(r)$ 为安全因子．此时磁力线哈密顿量

$$H_0=\int^r\frac{1}{q(r)}\,\mathrm{d}r. \tag{5}$$

假定存在磁场扰动，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1$，$\varepsilon=|\boldsymbol{B}_1|/|\boldsymbol{B}_0|\ll1$，$\boldsymbol{B}_0=(B_{0r},\ B_{0\theta},\ B_{0z})$，$\boldsymbol{B}_1=(B_{1r},\ B_{1\theta},\ B_{1z})$，磁力线哈密顿量可分解为

$$H=H_0+H_1+O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

H_1 满足方程

$$\frac{\partial H_1}{\partial\theta}=-\frac{B_{1r}}{B_{0z}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{B_{0\theta}}{B_{0z}}\left(\frac{B_{1\theta}}{B_{0\theta}}-\frac{B_{1z}}{B_{0z}}\right)=\frac{1}{r}B_{1\theta}-\frac{1}{q}\ B_{0z}.$$

由(7)式第一个方程可得

$$H_1=-\int^\theta\frac{B_{1r}}{B_{0z}}\,\mathrm{d}\theta+f(r,z). \tag{8}$$

(4) 式的一阶扰动形式为 $B_{1r}B_{0z}/r+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla B_{1z}=0$，且 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0$，由此可求得 $f(r,z)=0$，从而一阶磁力线扰动哈密顿函数 $H_1=-\int^\theta B_{1r}\mathrm{d}\theta$，这样就建立了磁力线扰动的哈密顿形式，并得到一个重要结论，一阶扰动仅与磁场的径向分量有关，因此在不计及高阶效应下，只有存在垂直于磁面的径向扰动下，磁力线才可能进入随机状态．应该强调的是，我们只研究磁力线方程可以化为哈密顿形式的情形，而对于不满足条件(4)的情形需要用到非正则理论，这里不予讨论．

三、Tokamak 中磁力线的随机特性

由上节分析可知，平衡态磁场在扰动下，磁力线方程可以化为哈密顿扰动形式，由周期性条件，H_1 可展开为

$$H_1=\sum_m\sum_n H_{mn}\cos(m\theta-nz), \tag{9}$$

共振条件为 $\dot{\theta}-n_0/m_0=0$，在模 (m_0,n_0) 下共振点 r_0 满足 $q(r_0)=m_0/n_0$，安全因子为一有理数，引入 $\iota(r)=1/q(r)$，将 H_0 在 r_0 附近展开，忽略二阶小量，得

$$H_0 = \int^r \iota(r)\mathrm{d}r = \iota(r_0)(r-r_0) + \frac{1}{2}\iota'(r_0)(r-r_0)^2,$$

$$H = \frac{1}{2}\iota'(r_0)\left(r - r_0 - \frac{q'(r_0)}{q(r_0)}\right)^2 + \sum_m\sum_n H_{mn}\cos(m\theta - nz). \qquad (10)$$

(10) 式丢掉了不起作用的常数项，为一维非线性振荡系统，完全类似于非线性单摆模型[6]. 以下分单模扰动、双模扰动、多模扰动三种情形讨论磁力线的特征。

1. 单模扰动

H表达式为

$$H = \frac{1}{2}A(r-B)^2 + H_{m_0n_0}\cos m_0\left(\theta - \frac{n_0}{m_0}z\right), \qquad (11)$$

式中 $A = \iota'(r_0)$, $B = r_0 + q'/q$. 作正则变换

$$J' = r - B - n_0/m_0A, \qquad (12)$$

$$\theta' = \theta - \frac{n_0}{m_0}z.$$

新的哈密顿函数为

$$H' = \frac{1}{2}AJ'^2 + H_{m_0n_0}\cos m_0\theta', \qquad (13)$$

式中以 (J',θ') 为正则坐标，H' 为哈密顿函数的一个自由度系统，相空间 (J',θ') 曲线(磁力线)呈规则磁岛结构，最大的磁岛宽度(分枝曲线宽度)由 $H' = H_{m_0n_0}$ 决定，计算可得 $\Delta r = 4q(r_0)\,(H_{m_0n_0}/q'(r_0))^{1/2}$，该宽度随着扰动振幅增加而增大。

2. 双模扰动

H表达式为

$$H = \frac{1}{2}A(r-B)^2 + H_{m_0n_0}\cos m_0\left(\theta - \frac{n_0}{m_0}z\right) + H_{m_1n_1}\cos m_1\left(\theta - \frac{n_1}{m_1}z\right). \qquad (14)$$

由共振条件 $\dot\theta - n_0/m_0 = 0$, $\dot\theta - n_1/m_1 = 0$, 可确定未扰状态下 (m_0, n_0) 模以及 (m_1, n_1) 模的共振点 r_0, r_1 分别满足 $q(r_0) = m_0/n_0$, $q(r_1) = m_1/n_1$, 当 $H_{m_0n_0}$, $H_{m_1n_1}$ 都很小时，磁力线分别在共振点处形成磁岛结构，两岛之间的相互作用很弱，随着扰动振幅的增加，磁岛之间的相互作用也增加，当两个磁岛相互重叠时，Chirikov[6] 认为此时系统进入随机状态。当 r_0, r_1 相互邻近时，共振点之间距离近似为：$\Delta r = \dfrac{\Delta q}{q'(r_0)}$ $\left(\Delta q = \dfrac{m_1}{n_1} - \dfrac{m_0}{n_0}\right)$，从而磁力线进入随机态的判据可估计为

$$4q(r_0)(H_{m_0n_0}/q'(r_0))^{1/2} \geqslant \Delta q/q'(r_0).$$

化简后为

$$H_{m_0 n_0} \geqslant \frac{1}{16}\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 \frac{1}{q'}. \tag{15}$$

从这个结果可以看出，大剪切 Tokamak 系统更易进入磁力线随机状态。

3. 多模扰动

在扰动振幅与 r 无关情况下，扰动磁力线方程为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta},$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{q(r)}. \tag{16}$$

将 $\dfrac{\partial H_1}{\partial \theta}$ 按周期性展开

$$\frac{\partial H_1}{\partial \theta} = \sum_m \sum_n \delta_{mn} \cos(nz - m\theta).$$

假定

$$\delta_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\delta & m = \pm m_0,\ n \text{ 为整数} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

引入 $x = r - r_0$，$y = m_0\theta - n_0 z$，r_0 为 $(m_0,\ n_0)$ 模的共振点，此时(16)式化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -\delta \cos y \sum_n \delta(z - 2\pi n),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -\frac{q' n_0^2}{m_0} x. \tag{17}$$

由 z 向周期性条件，选取 Poincaré 截面 $z = 2\pi n$，并设 $x_n = x(2\pi n)$，$y_n = y(2\pi n)$，那么 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ 与 $(x_n,\ y_n)$ 之间的关系可化为

$$y_{n+1} = y_n + x_n,$$
$$x_{n+1} = x_n + \frac{q' n_0^2 \delta}{m_0} \cos(2\pi y_{n+1}). \tag{18}$$

上式为一类标准映象[7]，存在临界值 k_c，当 $\dfrac{n_0^2}{m_0} q'\delta > k_c$ 时，Poincaré 截面上点呈现混乱状态，系统进入随机状态。

四、结　　论

本文运用哈密顿非线性振荡系统理论研究了平衡态磁场在扰动下磁力线的随机特征。一阶扰动哈密顿函数仅与磁场的径向扰动分量有关，因此在一阶效应下，只有存在垂直于磁面方向扰动下磁力线才有可能进入随机状态；在单模扰动下，磁力线呈规则磁岛结构，磁岛宽度随扰动振幅增加而增大；在双模扰动下，存在着磁岛之间的相互作用，当发生磁岛重叠时，磁力线进入随机状态，重叠判据表明，剪切大的系统更易进入磁随机状态；在特定多模扰动下，Poincaré 截面上点演化关系可化为一类标准映象，当剪切量与扰动振幅之

积 $q'\delta$ 超过某一临界值时，出现混乱状态，进入随机态。

本文所建立的磁力线哈密顿形式，可用于动力学方法（FPK 方程或准线性理论）来研究直柱近似下磁力线的扩散问题，这一工作仍在进行之中。

[1] J. T. Mendonca, *Phys. Fluids*, B3(1991), 87.
[2] 沐建林、蔡诗东，地球物理学报，33(1990)，621.
[3] J. M. Rax, R. B. White, *Phys. Rev Lett.*, 68(1992), 1523.
[4] J. M. Myra, P. J. Catto, *Phys. Fluids*, B4(1992), 176.
[5] A. H. Boozer, PPPL-2094(1984).
[6] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.*, 52(1979), 265.
[7] R. Kinney, T. Tajima, H. Irie, IFSR # 535(1992).
[8] R. B. White, Theory of Tokamak Plasmas, North-Holland (1989), p. 40.

STOCHASTIC CHARACTRISTICS OF MAGNETIC FIELD LINE IN TOKAMAK

Zhu Xiong-wei

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080

(Received 30 March 1993)

Abstract

Under the cylindrical approximation, we apply nonlinear Hamiltonian oscilation theory to investigate the process of transition of perturbed equilibrium magnetic field to randomness. The results show that perturbed magnetic hamiltonian is only related to the radial perturbation of magnetic field, the magnetic field line takes the form of regular magnetic island under a single mode perturbation. The overlapping criterion for magnetic field to enter the random state is given for the case of existence of two mode action, and the relation of points on the Poincare section is reduced to a kind of standard mapping under special multimode perturbation.

PACC: 5235R; 0540