

等离子体四波混频透射放大理论

孟月东 霍裕平 李建刚 罗家融

中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031

1993年2月23日收到

研究了寻常波在磁化等离子体中四波混频透射放大理论, 得到了简并和非简并时的精确解析解, 其结果适用于非磁化等离子体中的电磁波四波混频。

PACC: 5240D; 4265F

一、引言

从70年代开始, 四波混频在光致折射材料中所出现的各种物理现象的研究一直非常活跃。例如四波混频相位共轭理论, 四波混频形成透射光栅和反射光栅位形的理论等^[1-3]。这些理论已广泛用于研制相位共轭器, 带相位共轭器的激光器, 共振腔以及开关器件等研究领域。但由于光致折射材料的频响范围有限, 而且响应速度慢, 人们开始研究以等离子体为介质的四波混频理论^[4], 发现等离子体四波混频也有类似于光致折射材料中四波混频所具有的相位共轭现象、变频透射放大现象^[5-7], 且等离子体所响应的频率宽, 响应快。这将在研制微波频段的激光器、变频器、放大器以及卫星与地面站的能量馈送的研究等领域得到广泛的应用。本文将系统地研究磁化等离子体的四波混频透射放大理论, 给出适用于磁化和非磁化的等离子体四波混频透射放大理论的普遍公式。

二、研究系统及基本方程

在体积 V 中存在着均匀、完全电离、整体电中性的等离子体。均匀背景磁场 $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$, \hat{e}_z 是单位矢量。非磁化时, 取 $B_0 = 0$ 。三支频率相近的寻常波注入到等离子体中, 如图1所示。两支方向相反传播的泵浦波 a 和 b 连续不断地注入到等离子体中。信号波 s 以异于泵浦波的方向注入等离子体中, 它和泵浦波的夹角是任意的。三支波的波矢均在 xy 平面内, 而电场偏振方向均沿 \hat{e}_z 方向。透射波 t 是由外注入波混频受激等离子体所产生, 它和 s 波同向传播。信号波 s 、泵浦波 a 和 b 以及透射波 t 一起构成四波混频透射系统。我们仅考虑 s 波和泵浦波的频率相近或相等的情况, 即近简并或简并, 等离子体起非线性介质作用。

等离子体可以用 Vlasov 方程或流体方程描述

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + \mathbf{V} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla \right) \mathbf{V}_\alpha = - \frac{1}{m_\alpha n_\alpha} \nabla P_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0, \quad (3)$$

其中下标 $\alpha (= e, i)$ 表示粒子的种类。 q_α, m_α 分别是 α 种类粒子的电量和质量。 $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$ 是粒子的分布函数。 c 是光速， $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 是等离子体中的电磁场。 $n_\alpha(\mathbf{r}, t)$ 是粒子的密度， $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ 是速度场， $P_\alpha(\mathbf{r}, t)$ 是压强，取 $P_\alpha = n_\alpha T_\alpha$ ， T_α 是温度。以能量单位计，这里认为 T_α 是恒定的。密度和速度可以由下式计算：

$$n_\alpha = \int d^3v f_\alpha; \quad n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = \int d^3v \mathbf{V} f_\alpha \quad (4)$$

等离子体中的电磁场同时满足 Maxwell

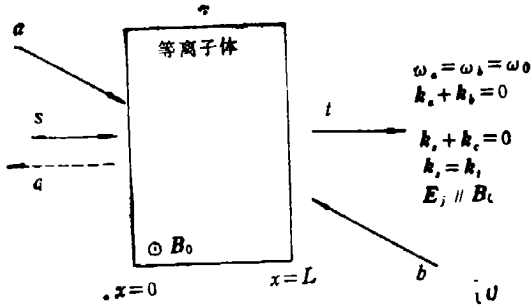


图1 四波混频系统 a, b 是泵浦波；
 c 是共轭反射波； t 是透射波

方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha; \quad \mathbf{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \quad (7)$$

上述方程组可以在有三支外加电磁波

$$\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=a,b,c} [E_j^{ext} \mathbf{e}_j \exp(-i\omega_j t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}] \quad (8)$$

的情况下求解。其中 c.c. 表示前一项的复共轭， E_j^{ext} 是复振幅，假设它们是小量，即

$$\xi_j = e |E_j^{ext}| / m_e c \omega_j \ll 1, \quad (9)$$

以保证电子在入射波的作用下振荡的幅度比入射波长小很多，这样可以忽略外注入波对等离子体的干扰。根据多波相互作用的基本原理，四波混频过程中，三支外注入波相互作用受激等离子体所产生的向外传播的透射波其幅度正比于 $E_a E_b E_c$ 。因此为 ξ 的三阶量。

在我们所选取的三支外注入波是 $\omega_j \gg \omega_{pe}$ 的寻常波时，等离子体几乎可以看成是透明的，其色散关系为

$$k_j^2 c^2 = \omega_j^2 - \omega_{pe}^2 \quad (10)$$

$\omega_{pe} = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ 是电子等离子体频率。当 $\omega_j \gg \omega_{pe}$ 时

$$k \approx \frac{\omega_j}{c} = k_{ext},$$

这时外注入波和等离子体对它们的线性响应即内部场基本相同,所以我们可以从此不再区分外加场和线性化内部场的差别,并将总的线性化内部场表示为

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=a, b, s} [E_i \hat{e}_i \exp(-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}],$$

其中 E_i 为已知量。频率满足 $\omega_i^2 = k_i^2 c^2 + \omega_{pi}^2$ 。

由于寻常波在磁化等离子体中的传播特性(即色散关系)与非磁化等离子体中电磁波的传播特性完全一致,所以本文所得结果完全适用于非磁化等离子体中的四波混频。

根据寻常波在等离子体中的传播特性,结合 Maxwell 方程组,直接给出线性响应的关系式为

$$\mathbf{E}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_i^{(1)} \exp(-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_i^{(1)} = E_i^{(1)} \hat{e}_i,$$

$$\mathbf{B}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{\omega_i} \mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_{a,j}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{a,j}^{(1)} \exp[-i\omega_j t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.} \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_{a,j}^{(1)} = i \frac{q_a \mathbf{E}_j^{(1)}}{m_a \omega_j},$$

$$n_i^{(1)} = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -en_i \mathbf{V}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t). \quad (15)$$

由于 $\omega_j \gg \omega_{pj}$, $m_i \gg m_e$, 我们忽略离子的贡献。通过以上给出的基本方程,可以求解透射波。

三、透射波的计算

1. 密度响应

在本文中,我们只关心由泵浦波 a 和 b 以及信号波 s 驱动等离子体激发满足关系式

$$\omega_t = \omega_a + \omega_b + \omega_s, \quad \mathbf{k}_t = \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s = \mathbf{k}_t$$

的电磁波 t 。从(7)和(14)式不难看出, a, b 和 s 波产生的最低阶非线性电流密度是三阶量。它是由二阶扰动密度 $n_i^{(2)}$ 和线性响应速度 $\mathbf{V}_i^{(1)}$ 的积决定,与 $(E_a E_b E_s)$ 同数量级。

$$\mathbf{V}_i^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^{(\beta)} \exp(-i\omega_\beta t + i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad \beta = a, b, \quad (16)$$

$$n_i^{(\beta, s)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} n_i^{(\beta, s)} \exp[-i(\omega_\beta + \omega_s)t + i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.}$$

其中 $\mathbf{V}_i^{(\beta)}$ 是对 \mathbf{E}_β 的线性响应, $n_i^{(\beta, s)}$ 表示 β 和 s 波混频产生的频率为 $(\omega_\beta + \omega_s)$, 波矢为 $(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_s)$ 的二阶密度响应。驱动 t 波的二阶电流密度为

$$\mathbf{J}_{dr}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{dr} \exp(-i\omega_t t + i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (17)$$

$$\mathbf{J}_{dr} = -\frac{e}{2} n_i^{(a, s)} \mathbf{V}_i^{(b)} + (a \rightleftharpoons b),$$

这里已考虑到(16)式, $(a \rightleftharpoons b)$ 表示前一项交换指标 a 和 b . (17)式中忽略了 $n_a^{(a,a)}$ 项, 因它只带来对等离子体平衡态密度 n_0 的修正, 不影响本文的计算结果.

现在来求二阶密度扰动量. 对方程(1), (5)和(6)进行傅里叶变换并按通常的方法进行线性化处理.

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) f_a^{(m)} + \frac{iq_a}{m_a} \left(\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{k}) + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}^{(m)} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^0 \\ + \frac{iq_a}{m_a} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^{(m)} = I^{(m)}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (18)$$

$I^{(m)}(\mathbf{k})$ 是非线性偶合项

$$\begin{aligned} I^{(m)}(\mathbf{k}) = - \frac{iq_a}{m_a} \sum_{n'=1}^{m-1} \left[\mathbf{E}^{(m-n')}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}^{(m-n')}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right] \\ \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^{(n')}(\mathbf{k}', \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{k}) = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(m)} = -i4\pi \rho^{(m)}, \quad (20)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{k}) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{k}) - i \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{(m)}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{(m)} = 0.$$

我们已经规定

$$\mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{B}_0 = \text{const.}$$

m 是自然数, 对应于各阶量. 未扰动时的分布满足球对称的 Maxwell 分布

$$f_a^0(\mathbf{V}) = n_a^0 \left(\frac{m}{2\pi T_a} \right) \exp \left[- \frac{m_0}{2T_a} V^2 \right]. \quad (21)$$

线性化分布函数扰动可表示为

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} f_a^{(\mathbf{m})}(\mathbf{V}) \exp(-i\omega_{\mathbf{m}} t + i\mathbf{k}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (22)$$

由(20)–(22)式可求一级扰动分布

$$f_a^{(1)}(\mathbf{V}) = \frac{q_a}{i(\omega_j - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{V}) m_a} \left(\mathbf{E}_j + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_j \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^0. \quad (23)$$

a, s 波混频所引起的二阶扰动满足方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_a^{(a,s)} + \mathbf{V} \cdot \nabla \tilde{f}_a^{(a,s)} + \frac{a}{m_a} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^0 = \tilde{I}^{(a,s)}, \quad (24)$$

其中

$$\tilde{f}_a^{(a,s)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \frac{1}{2} \tilde{f}_a^{(a,s)}(\mathbf{V}) \exp(-i\omega_{a,s} t + i\mathbf{k}_{a,s} \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(a,s)} = - \frac{q_a}{m_a} \left[\left(\mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}^{(a)}(\mathbf{r}, t) \right) \right. \\ \left. \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) + a \rightleftharpoons s \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\omega_{as} = \omega_a + \omega_s, \quad \mathbf{k}_{as} = \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_s,$$

\mathbf{E} 是 (a, s) 波混频引起的静电型扰动, 因而满足泊松方程

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi \sum_a \tilde{n}_a^{(a,s)} q_a, \quad (27)$$

\mathbf{B} 与 $\tilde{\mathbf{E}}$ 相比可以略去不计. 由(22)–(26)式可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}_a^{(a,s)} = & -\frac{iq_a(\mathbf{k}_{as} \cdot \tilde{\mathbf{E}})}{m_a k_{as}^2 (\omega_{as} - \mathbf{k}_{as} \cdot \mathbf{V})} \mathbf{k}_{as} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^0(\mathbf{V}) \\ & + \frac{1}{2} \frac{q_a^2}{m_a} \left\{ \left(\mathbf{E}_a + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_a \right) \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \left[\frac{\mathbf{E}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_s}{\omega_s - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_s^0 \right] + a \rightleftharpoons s \left. \right\} \overline{\omega_{as} - \mathbf{k}_{as} \cdot \mathbf{V}}. \quad (28) \end{aligned}$$

对(28)式在速度空间进行积分, 得到关于 $n_a^{(a,s)}$ 的方程为

$$n_a^{(a,s)} + \frac{1}{4\pi q_a} \chi_a(\mathbf{k}_{as}, \omega_{as})(i\mathbf{k}_{as} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) = G_a^{(a,s)}, \quad (29)$$

其中 χ_a 是等离子体静电型线性极化率

$$\chi_a(\mathbf{k}_{as}, \omega_{as}) = \frac{4\pi q_a^2}{m_a k_{as}^2} \int \frac{1}{\omega_{as} - \mathbf{k}_{as} \cdot \mathbf{V}} \mathbf{k}_{as} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_a^0(\mathbf{V}) d^3v, \quad (30)$$

$G_a^{(a,s)}$ 是非线性耦合项

$$\begin{aligned} G_a^{(a,s)} = & \frac{q_a^2}{2m_a^2} \int d^3v \frac{1}{\omega_{as} - \mathbf{k}_{as} \cdot \mathbf{V}} \left\{ \left[\mathbf{E}_a + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_a \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\mathbf{E}_s + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_s}{\omega_s - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{V}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f_s^0 \right] + a \rightleftharpoons s \right\}, \quad (31) \end{aligned}$$

将(27)式代入(29)式, 并略去离子的 $G_i^{(a,s)}$, 得到 $n_i^{(a,s)}$

$$n_i^{(a,s)}(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as}) = G_i^{(a,s)}(1 + \chi_i(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as}))/\varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as}), \quad (32)$$

其中等离子体线性介电函数为

$$\varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as}) = 1 + \chi_a + \chi_i.$$

(32)式就是所求的等离子体对 a, s 波混频所产生的频率是 $\omega_{as} = \omega_a + \omega_s$, $\mathbf{k}_{as} = \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_s$ 的二阶密度响应. 有关等离子体的线性极化率和介电函数的计算已有大量文献介绍. 为了使结果具有普适性, 我们不直接给出它们的显式表示. 在非相对论情况下 ($\beta = \frac{V}{c} \rightarrow 0$) 可由(31)式计算出

$$G_i^{(a,s)} = -\frac{3\omega_{pe}^2 E_a E_s}{8\pi \cdot \omega_a \omega_s}, \quad (33)$$

将(33)式代入(27)式得

$$n_i^{(a,s)} = -\frac{3\omega_{pe}^2 [1 + \chi_i(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})] E_a E_s}{8\pi \cdot \omega_a \omega_s \varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})}, \quad (34a)$$

用相同的方法可求出

$$n_c^{(b,r)} = -\frac{3\omega_{pe}^2[1 + \chi_i(\omega_{bs}, \mathbf{k}_{bs})]E_b E_s}{8\pi \cdot \omega_b \omega_s \varepsilon(\omega_{bs}, \mathbf{k}_{bs})}. \quad (34b)$$

将(13),(34)式代入(17)式得驱动透射波的电流密度幅度

$$\mathbf{J}_{dr} = -\left[\frac{i3c^2\omega_{pe}^2(1 + \chi_i(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as}))E_a E_b}{8\pi \cdot m_e \omega_a \omega_b \omega_s \varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})} + (a \rightleftharpoons b) \right] E_s \hat{\mathbf{e}}_{s0}. \quad (35)$$

2. 透射波的产生

由 Maxwell 方程组不难得到

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla \nabla - \nabla^2 \right) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (36)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_{dr}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{J}_i &= -en_e V_c^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\omega_{pe}}{4\pi\omega_i} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t), \\ c^2 k_i^2 &= \omega_i^2 - \omega_{pe}^2 \end{aligned} \quad (37)$$

后,不难求得

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_{dr}(\mathbf{r}, t). \quad (38)$$

在考虑到 $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$ 是一个平面波,同时认为沿传播方向上是满足空间缓变条件.

$$|\mathbf{k}_i \cdot \nabla E_i(\mathbf{x})| \gg \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_i(\mathbf{x}) \right| \quad (39)$$

时,透射波可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_i \exp[-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \exp[-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (40)$$

将(39),(40)式结合(38)式后得

$$\frac{dE_i(\mathbf{x})}{dx} = R_i E_i(\mathbf{x}), \quad (41)$$

其中非线性耦合系数

$$R_i = -\left[\frac{i3cr_s \omega_{pe}^2 [1 + \chi_i(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})] E_a E_b}{4\omega_a \omega_b \omega_s \varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})} + a \rightleftharpoons b \right]. \quad (42)$$

按相同的方法可求出关于信号波的方程

$$\frac{dE_s(\mathbf{x})}{dx} = R_s E_s(\mathbf{x}), \quad (43)$$

$$R_s = -\left[\frac{i3cr_s \omega_{pe}^2 [1 + \chi_i(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})] E_a^* E_b^*}{4\omega_a \omega_b \omega_s \varepsilon(\omega_{as}, \mathbf{k}_{as})} + a \rightleftharpoons b \right], \quad (44)$$

其中 E_a^*, E_b^* 是 E_a, E_b 的复共轭,所以有

$$\omega_{a'} = -\omega_a + \omega, = \omega_b + \omega_i; \quad \omega_{b'} = -\omega_b + \omega, = \omega_a + \omega_i;$$

$$\mathbf{k}_{a'} = -\mathbf{k}_a + \mathbf{k}, = \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_i; \quad \mathbf{k}_{b'} = -\mathbf{k}_b + \mathbf{k}, = \mathbf{k}_a + \mathbf{k}_i,$$

注意到 $\omega_a = \omega_b$ 后, 上式频率和波矢的关系可表示为

$$\omega_{a'} = \omega_a + \omega, = \omega_{b'}, \quad \omega_{b'} = \omega_b + \omega, = \omega_{a'},$$

$$\mathbf{k}_{a'} = \mathbf{k}_{b'}, \quad \mathbf{k}_{b'} = \mathbf{k}_{a'},$$

则不难发现(42)和(44)式有如下关系成立:

$$R_i \cdot E_a \cdot E_b = R_i E_a^* E_b^* (\omega_i / \omega_i)^{-1}. \quad (45)$$

若泵浦波的振幅为实数时, 即 $E_a = E_a^*$, $E_b = E_b^*$, 有

$$R_i = R_i (\omega_i / \omega_i)^{-1}. \quad (46)$$

在无衰减泵浦近似的条件下, 结合边界条件 $E_i(0)$, $E_i(0)$, 可以求出方程(41)和(43)满足边界条件的解

$$E_i(x) = E_i(0) \cosh(R_{ii} x) - \left(\frac{R_i}{R_i}\right)^{1/2} E_i(0) \sinh(R_{ii} x), \quad (47)$$

$$E_i(x) = E_i(0) \cosh(R_{ii} x) - \left(\frac{R_i}{R_i}\right)^{1/2} E_i(0) \sinh(R_{ii} x),$$

其中

$$R_{ii} = (R_i R_i)^{1/2} = R_i (\omega_i / \omega_i)^{+1/2}, \quad (48)$$

$$\left(\frac{R_i}{R_i}\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega_i}{\omega_i}\right)^{1/2}.$$

一般认为在 $x = 0$ 处, 透射波为零, 则透射波和信号波在等离子体中的耦合分布为

$$E_i(x) = -\left(\frac{\omega_i}{\omega_i}\right)^{1/2} E_i(0) \sinh\left(R_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_i}\right)^{1/2} x\right), \quad (49)$$

$$E_i(x) = E_i(0) \cosh\left(R_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_i}\right)^{1/2} x\right).$$

这时可以求出放大波的透射率

$$A_{ii} = \left| \frac{E_i(L)}{E_i(0)} \right|^2 = \frac{\omega_i}{\omega_i} \sinh^2\left(R_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_i}\right)^{1/2} L\right).$$

在简并或近简并情况下 ($\omega_a = \omega_b \approx \omega_i$), 方程(49)简化为

$$E_i(x) = -\sqrt{3} E_i(0) \sinh(\sqrt{3} R_i x), \quad (50)$$

$$E_i(x) = E_i(0) \cosh(\sqrt{3} R_i x),$$

$$A_{ii} = 3 \sinh^2(\sqrt{3} R_i L).$$

至此我们得到了在无衰减泵浦条件下的四波混频等离子体驱动的透射波和信号波的空间分布在简并和非简并条件下的精确解, 将完整表达式列出如下:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_i(x) \hat{e}_i \exp[-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.} \quad (51)$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_i(x) \hat{e}_i \exp[-i\omega_i t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}] + \text{c.c.}$$

$$\omega_i = \omega_a + \omega_b + \omega_i, \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{k}_i,$$

其中 $E_s(x)$, $E_r(x)$ 在非简并和简并情况下, 分别由(49)和(50)式给出。

现在讨论简并或近简并情况下的四波混频。当外注入波混频能共振激发等离子体静电正则波模时, 即 $\epsilon \approx 0$, 不难从(42)和(44)式发现非线性耦合系数 R_s, R_r 趋于无穷大。但实际上是不可能的, 因为此时等离子体的阻尼现象显得突出, 等离子体介电函数将出现虚数项 $\epsilon = i\Gamma$, 因此此时 R_s 和 R_r 是一实数。透射波此时应表示为

$$E_s(r, t) = \frac{1}{2} E_s(x) e_s \exp[-i\omega_s t + i(k_s \cdot r - \pi)] + c.c.$$

$$E_s(x) = \sqrt{3} E_s(0) \sinh(\sqrt{3} R_s x).$$

可见透射波的相位滞后 π 相位, 而振幅随空间变化遵循双曲正弦函数规律。由于 R_s 是一个很小的量(在实验室等离子体参数下, $R_s \sim 10^{-4} - 10^{-7}$)。尽管它随 x 的增加而很快增加, 但实验室等离子体体积和注入波的波束都是有限的, 即混频范围有限, 因而 $R_s x$ 的值仍很小, 但可测, 在文献[6]和[7]中给出了国际最新的实验和结果报道。

在不考虑阻尼的一般情况下, 等离子体介电函数 ϵ 是一个有限的实数, 此时 R_s 和 R_r 是纯虚数。透射波和信号波的分布形式为

$$E_s(r, t) = \frac{1}{2} E_s(x) e_s \exp\left[-i\omega_s t + i\left(k_s \cdot r - \frac{\pi}{2}\right)\right] + c.c.$$

$$E_s(x) = \sqrt{3} E_s(0) \sin(\sqrt{3} |R_s| x),$$

$$E_r(r, t) = \frac{1}{2} E_r(x) e_r \exp[-i\omega_r t + i k_r \cdot r] + c.c.$$

$$E_r(x) = E_r(0) \cos(\sqrt{3} |R_r| x),$$

其分布形式发生了变化, 但在实验室条件范围内不可能观察到 $E_s(x)$, $E_r(x)$ 的周期性变化, 原因是 $R_s x$ 是一个很小的量。

在 R_s, R_r 是一任意复数时, 其透射波和信号波的分布形式就复杂多了, 但可从(50)式得到。令 $R_s = ia + b$, 则

$$E_s(x) = -\sqrt{3} E_s(0) [\cos(\sqrt{3} ax) \sinh(\sqrt{3} bx) + i \sin(\sqrt{3} ax) \cosh(\sqrt{3} bx)]$$

$$E_r(x) = E_r(0) [\cos(\sqrt{3} ax) \cosh(\sqrt{3} bx) + i \sin(\sqrt{3} ax) \sinh(\sqrt{3} bx)].$$

它们将是一个复振幅的分布形式, 引起的相移也是十分复杂的。

这里给出四波混频的等离子体响应的三种不同形式下的透射波和信号波的分布, 这对从事实验研究非常有益, 可以根据实验室不同的等离子体参数(即不同的 ϵ, R) 利用本文所给出的结果进行估算, 这里并不给出具体数值估算。

四、总结与讨论

本文从 Vlasov 方程、流体方程和 Maxwell 方程出发, 详细地研究了以磁化等离子体为介质材料的四波混频所产生的新的物理现象——透射放大得到了无衰减泵浦近似下的普适解(47)和(49)式。下面对结果进行讨论。

1. (47)和(49)式中的非线性耦合系数 R_s 和 R_r 是复数形式, 式中等离子体的介电函数 ϵ 和极化率 χ_i 没有给出具体表达式, 所以本文结果适合任何满足 $\omega > \omega_{pe}$ 的频率的

四波混频的情况和任何等离子体参数的情况,只要代入对应的 ϵ, χ_i 和 n , 即可。

2. 当混频频率满足等离子体共振条件时, ϵ 趋于零, 非线性耦合系数趋于无穷大, 但由于此时碰撞阻尼将显得重要, 因此不可能达到无穷大, 但可充分大。这样达到透射放大的目的。而透射波的能量将由泵浦波耦合进去。

3. 本文讨论的是寻常波在磁化等离子体中的四波混频。由于它们的传播特性(即色散关系)和非磁化等离子体中电磁波的传播特性相同, 因此(47)和(49)式同样适合非磁化等离子体的情况。

4. 在计算(47)和(49)式时, 始终采用的是复函数的形式, 所以(47)和(49)式是复振幅解, 它既含强度解又含相位解。

5. 在简并情况下, 透射波实际上是将信号波三倍频, 而不改变其传播方向。

6. 在非简并情况下, 若 $\omega_s = \omega_b \ll \omega_s$, 则透射波非常接近于信号波。

根据以上讨论, 得到以下结论:

(1) (47)和(49)式适合于磁化和非磁化等离子体, 具有普适性。为进一步深入研究各种等离子体状态(如多峰分布、冷、热、磁化、非磁化等离子体)下的不同形式的波(如寻常波、非寻常波、快波、慢波等)的四波混频奠定了基础。

(2) 本文结果对研制新型的微波放大器、变频器, 特别对相位变化要求高的器件有所裨益。在卫星通讯、能量馈送等研究领域也有所帮助。

- [1] R. A. Fisher ed., *Optical Phase Conjugation*, (Academic, New York, 1983), pp. 23—78.
- [2] Ya. B. Zeldovich *et al.*, *Principles of Phase Conjugation*, (Springer, Heidelberg, 1985).
- [3] Y.R. Shen, *IEEE J. Quantum Electron.*, **22**, (1986), 1196.
- [4] D. G. Steel and J.F. Lam, *Opt. Lett.*, **4**, (1979) 363.
- [5] B. Fisher *et al.*, *Opt. Lett.*, **6**(1981), 519
- [6] T. Lehner, *Phys. Scr.*, **39** (1989), 595.
- [7] C. W. Domier *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992), 3499.

THEORY OF FWM TRANSMISSION AMPLIFICATION IN PLASMAS

MENG YUE-DONG HUO YU-PING LI JIAN-GANG LUO JIA-RONG

Institute of plasma physics, Academia Sinica, Hefei 230031

(Received 23 February 1993)

ABSTRACT

The theory of FWM transmission amplification of ordinary wave mixing in magnetized plasma is investigated. The exact solutions are derived for the degenerate and nondegenerate cases and are adapted for EM wave mixing in unmagnetized plasma.

PACC: 5240D; 4265F