

定域场中粒子运动由周期 通向混沌的道路

欧阳碧耀 贺贤士 陈式刚

北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088

1993年3月1日收到

详细讨论保守系统和耗散系统中, 粒子在相干定域孤子场中的运动随场幅变化从有序到混沌的全过程。给出了粒子在相空间中运动的轨道特征和标度率。结果显示: 在保守系中, 粒子运动由准周期道路通向混沌; 而在耗散系中, 粒子运动由倍周期分岔过渡到混沌。

PACC: 0250; 5220

一、引言

带电粒子在相干定域场(例如孤子场)中的随机扩散问题是近年来物理学中重要课题之一,也是非线性科学领域中很感兴趣的问题。

从准线性理论开始,人们用各种手段详细讨论了波与粒子非线性作用过程中粒子轨道的共振重叠、相平面轨道随机化、随机加速和扩散以及反常输运等问题^[1]。随着控制参数不断增加,有质动力势再也不能被忽略,正负相平面贯穿、扩散和输运性质及系统的映象特征都发生很大的变化^[2-4]。

然而,随机轨道的动力学过程,例如通向混沌的道路,还没有具体的结果。本文从牛顿方程出发,用时空周期孤子场作定域场深入探讨这些问题。

二、定域相干场

我们选用的定域场是激光等离子体相互作用过程中受激喇曼散射(SRS)产生的Langmuir波和受激布里渊散射(SBS)产生的离子声波相互作用,发展而成的具有空间周期结构的孤子场。单个孤子波的表达式为

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sech} \left(E_0 \frac{1}{\lambda_D} \frac{1}{(8\pi n k_B T)^{\frac{1}{2}}} \beta x \right) \cos(\omega_p t - k_I x), \quad (1)$$

其中 $\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, k_I 为电子等离子体波数, $\omega_p = \left(\frac{4\pi^2 e n_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$ 为等离子体频率,

$$\lambda_D = \left(\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

为德拜波长。

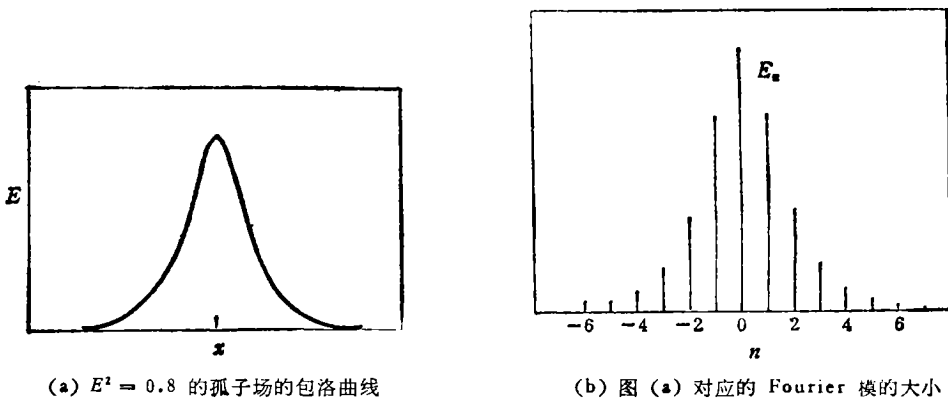


图 1

通常物理学系统中,例如激光等离子体相互作用系统,存在多个时空周期孤子解。不失一般性,我们通过 Fourier 变换把上述单个孤子形式延拓为全空间的时空周期性结构,即

$$E(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} E_n \cos(k_n x - t), \quad (2)$$

这里已作无量纲化变换:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x}{\lambda_D}, \\ t &\rightarrow \omega_p t, \\ E &\rightarrow \frac{E_0}{(8\pi n k_B T)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 E_n 为 Fourier 系数, $E_n = E_n(E)$, $k_n = k_l + nk_A$, $k_A = \frac{2\pi}{sl}$, sl 为空间周期延拓长度,它与场幅 E 的大小有关。如果选择场幅下降到 10^{-5} 时的波包宽作为空间周期长度,则

$$sl = \frac{2\sqrt{3} \ln(2.0 \times 10^5)}{E}. \quad (4)$$

图 1 为定域场的包络曲线和各 Fourier 模的幅值的示意图。

三、数值结果

1. 保守系统中电子运动的轨道特征

保守系统中,在定域相干电场作用下,电子的动力学方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{m} E(x, t). \quad (5)$$

利用(3)式将(5)式无量纲化。定域场的形式取(2)式,在保证精度的情况下,取有限个 n 值, $n = -10, 10$ 。得

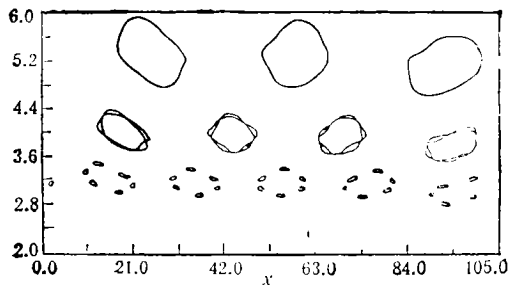


图2 $E^2 = 0.18$ 时 $n = 3, 4, 5$ 的相图

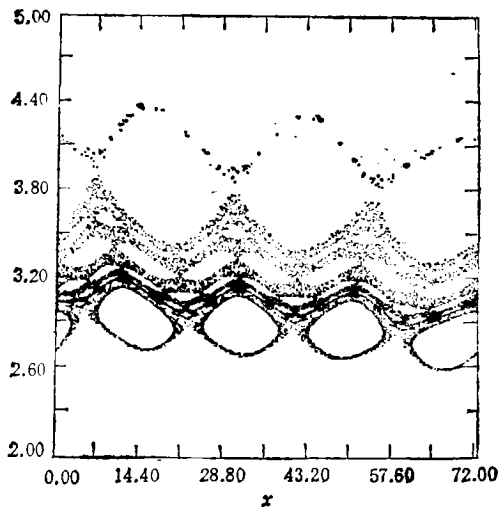


图3 $E^2 = 0.185$ 时的相图

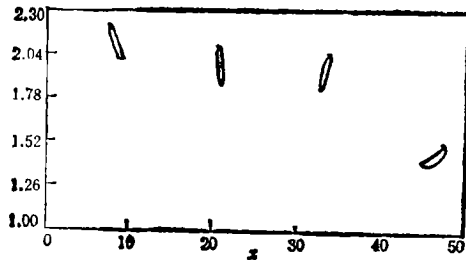


图4 场幅增加到 $E^2 = 0.9$ 时重新出现的周期轨道

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{-10}^{10} E_n \cos(k_n x - t). \quad (6)$$

由于各个模的幅值 E_n 大小不等,它不能象标准映象那样用 mapping 来刻画. 若只取一个模 E_0 , 系统是可积的,粒子的运动永远保持有序. 但对 $n > 1$, 系统变得不可积. 由于模与模之间的相互作用, 轨道出现同宿相交, KAM 环破缺, 外层轨道出现随机结构. 图2给出 $E^2 = 0.18$ 时 $n = 3, 4, 5$ 各轨道的情况. 其中 v 表示电子运动速度, x 为电子位置. 对波数大的模, 由于相对扰动较大, 其随机程度较其他的更甚. 当场幅 E 增加到使两个相邻模的 KAM 环发生共振重叠时, 整个相空间被连成一片随机“海”, 中间镶嵌着周期轨道的小岛(图3).

如果我们固定空间周期长度 sl , 继续增大场幅, 小岛的面积将逐渐缩小, 直至完全湮没; 若让 sl 按(4)式变化, 则当场幅增大到一定程度时, 被湮没的周期轨道小岛又重新出现(如图4).

粒子在保守系统中的运动特征可以通过功率谱来描述. 图5给出 $E^2 = 0.1$ 的相图和功率谱. 纵轴为功率大小, f 为频率, dt 为采样时间间隔. 如果取出图5(a)中的任何一个圈上的点作时间序列, 则其功率谱为图5(c). 增大参数值, 得到 $E^2 = 0.182$ 和 $E^2 = 0.184$ 两种情况下的图形, 如图6和图7. 对 $E^2 = 0.8$ 的情况, 给出 $v = 0$ 附近由

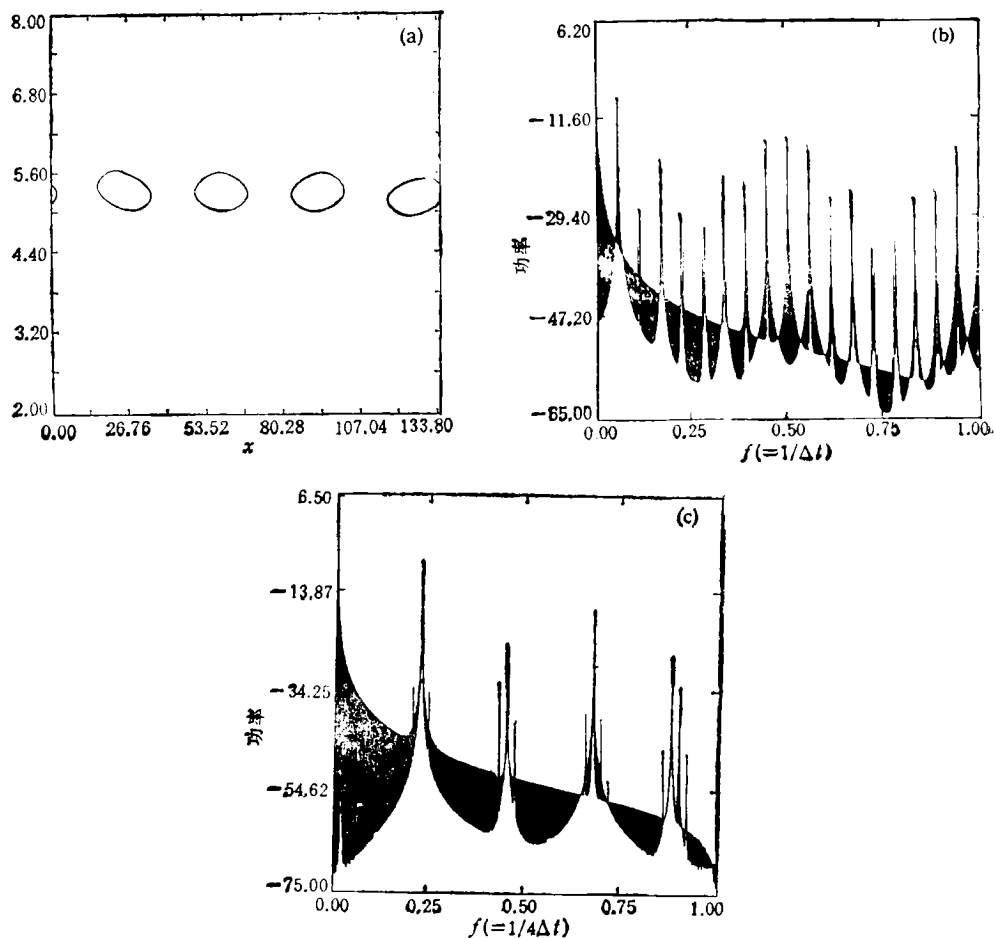


图5 $E^2 = 0.1$ 时的相图 (a); 图 (a) 对应的功率谱 (b); 图 (a) 中一个圈对应的功率谱 (c)

于有质动力作用而形成的相轨道及其功率谱(如图 8)。由这些功率谱,我们可以得出:保守系统中,粒子运动是通过准周期道路从有序到混沌的。

2. 耗散系统中电子运动从有序到混沌

如果系统中计入一个弱阻力行为 $-\gamma v$ 。动力学方程用无量纲形式(3)式可表示为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{-10}^{10} E_n \cos(k_n x - t) - \gamma v, \quad (7)$$

其中 $\gamma \ll E$ 。这是一个多吸引域系统,不同的 n 值对应不同的收敛域。下面主要针对 $n = 4$ 的吸引子考察电子的运动行为。在其它模的作用下, $n = 4$ 的四个收敛域不能完全等同,但它们的性质是一样的。

我们分两种情况来考虑:

1. 场的空间周期大小 s/l 随场幅 E 按(4)式变化

改变场幅值 E , 观察每个 E 值在 $t \rightarrow \infty$ 时对应的速度值,得到一个参数平面内的图

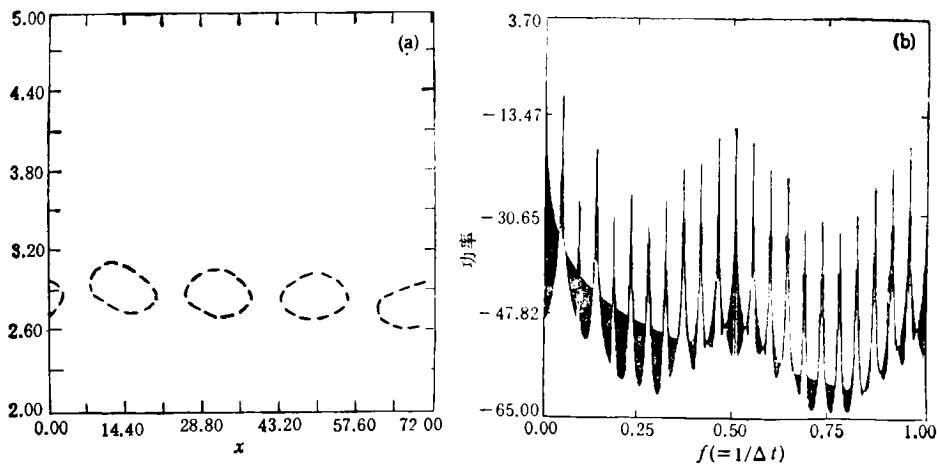


图6 $E^2 = 0.182$ 时对应的相图 (a) 和功率谱 (b)

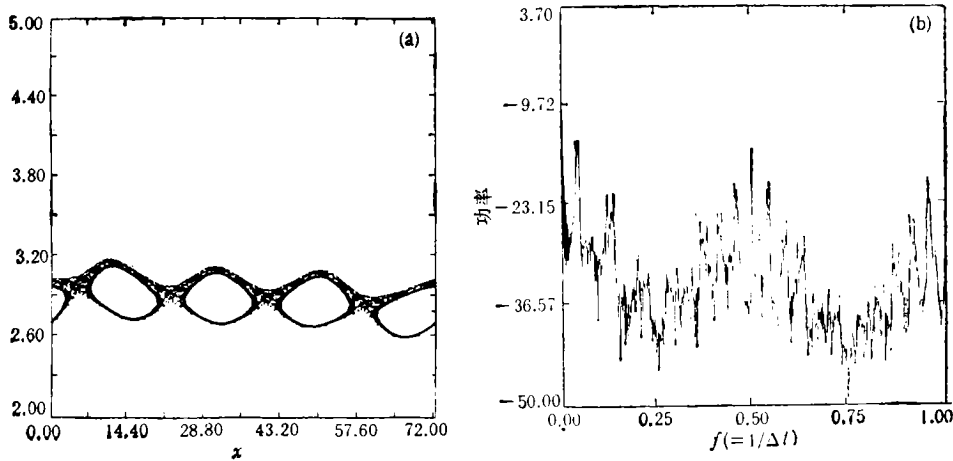


图7 $E^2 = 0.184$ 时对应的相图 (a) 和功率谱 (b)

象(图 9)。由图 9 可知,随着 E 值的增加,电子运动速度先稳定在一个值上,然后周期性地位居两个值上,最后又稳定到一个值上。这与保守系统的情况是一致的。系统的非线性程度随场幅的增加先由弱变强,然后再变弱,而没有混沌出现。

2. 改变 E 值,固定空间周期长度 sl

在保证 $n = 10$ 以上的模被忽略后而不影响精度的情况下,固定空间周期 sl 的长度,但改变 E 值,这时我们得到另一个参数空间轨迹图(如图10)。随着场幅的增加,电子运动的末速度倍周期地分岔。图 10 中可清楚地看到十六周期运动的情形。由于系统的多流域性,初值的选取与最后的吸引中心直接相关,因此每次迭代的初值必须位于相应的吸引域内,否则将衰减到 $v = 0$ 附近。为了满足这一条件,参数步长的选取必须合适,越到后面,要求步长越短。在十六周期之后出现了临界慢化行为。由于计算机时间限制,我们不能往下计算,但可以明确地推断出,电子运动通过倍周期分岔过渡到混沌。

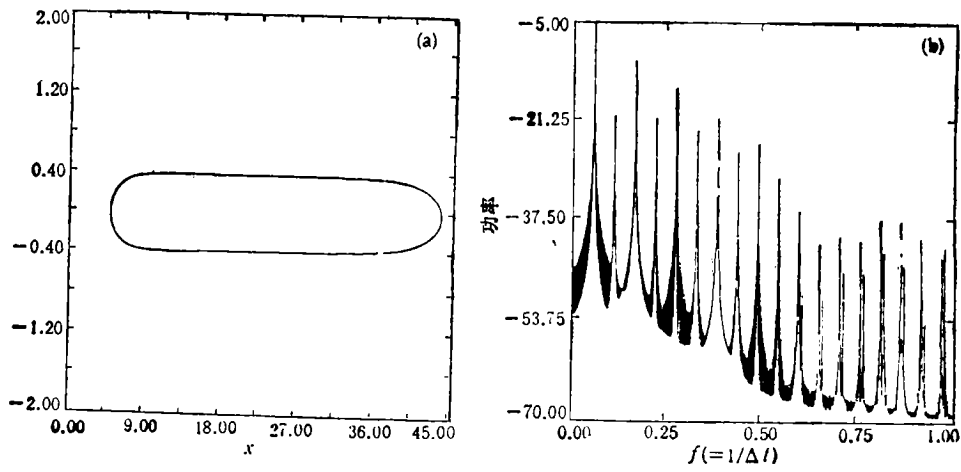


图8 $E^2 = 0.8$ 时对应的相图 (a) 和功率谱 (b)

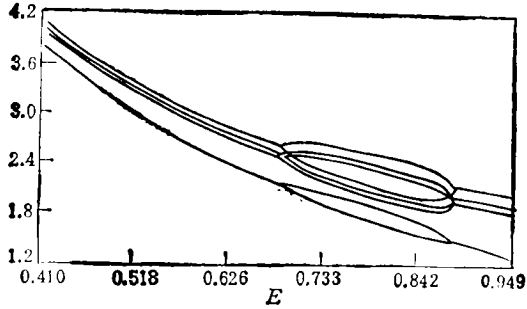


图9 变化 sl 的参数空间图形

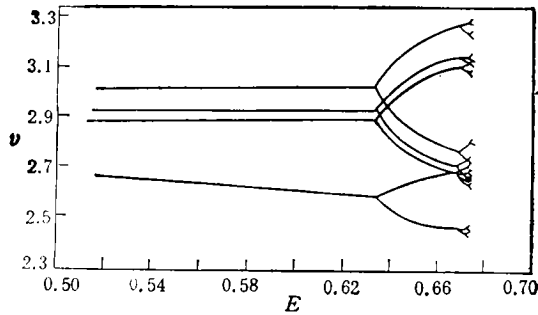


图10 固定 $sl = 72.0$ 的参数空间图形

对不同的 sl , 其定性性质不变, 但某些特征值发生改变. 例如其临界参数值 E_∞ . 当 $sl = 72.0$ 时, $E_\infty = 0.675$; 当 $sl = 49.2$ 时, $E_\infty = 0.877$. 然而, 它们有相同的收敛率 $\delta \approx 8.52$, 这个值与保守系统的收敛率很接近, 说明对耗散很小的近可积系统, 在控制参数不大的情况下, 系统仍然保持一定的保守系统的性质.

四、结 论

本文对粒子在定域相干时空周期孤子场中的运动作了详细的研究, 重点讨论了粒子

运动由有序到混沌的过程。

保守系统中,通过轨道的同宿相交,粒子运动由准周期道路从有序过渡到混沌,再通过共振重叠而形成随机海。

对耗散系统,本文主要考虑弱耗散情况,如果让空间周期长度随 E 值变化,那么,随着场幅的增大,粒子运动不出现混沌;但若固定空间周期长度的大小,在保证精度的情况下,增大 E 值,粒子运动通过倍周期分岔过渡到混沌。不同的空间周期长度,有不同的临界参数,但它们的收敛率是相同的,本文算得 $\delta = 8.52$ 。这说明在阻尼很小的情况下,系统对低参数仍然保留着保守系统的性质。

感谢谭昱的帮助。

- [1] V. Fuchs, V. Krapchev, A. Ram and A. Bers, *Physica*, **14D**(1985), 141.
- [2] W. Rozmus and J. C. Samson, *Phys. Fluids*, **31** (1988), 2904.
- [3] W. Rozmus, R. P. Sharma, J. C. Samson and W. Tighe, *Phys. Fluids*, **30**(1987), 2181.
- [4] S. P. Zhu and X. T. He, *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 1988.

MOTION ROUTE OF PARTICLES FROM PERIOD TO CHAOS IN LOCAL FIELD

OUYANG BI-YAO HE XIAN-TU CHEN SHI-GANG

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088

(Received 1 March 1993)

ABSTRACT

We have studied the whole process from period to chaos in which the charged particle move in the periodic local solitary field, given out the character of orbit in phase space and the scale. We demonstrate that: in conservative system, the particle move from period to chaos by quasi-periodic way; but in dissipative system, it is achieved by doubling periodic bifurcated way.

PACC: 0250: 5220