

规范理论随机量子化的新方案

陈 仁

上海师范大学物理系, 上海 200234

1993 年 6 月20日收到

在规范理论随机量子化中,运用投影算子和函数 $\delta(\epsilon)$ 构成的核,在零初值条件下,当 ϵ 趋于 ∞ 时,可以使之收敛于平衡态,并得到协变规范下的传播子。这样,规范理论和非规范理论的随机量子化方案即统一于只运用核函数。文中分别对麦克斯韦场、Chern-Simon 场及线性引力理论进行了讨论。另外,还证明了上述形式的核不会对平衡分布产生影响。

PACC: 1110

一、引 言

在关于规范理论的 Parisi 和吴^[1]的随机量子化中,可以证明:能确立非平庸的规范不变期待值。然而要想获得协变规范下的传播子,却存在一些麻烦。这里既有规范变换项的问题,又有不收敛的问题,而两者又是相互联系的。起先, Zwanziger^[13]采用随机规范固定的方法,引进与“时间” ϵ 有关的规范变换,选择适当的规范函数,得到了协变规范下的传播子,也没有不收敛问题,但场已经过变换。后来, Namiki 等人^[2]采取了另外一种途径,选择具有高斯分布的初值条件。它只能使其有限部分等同于协变规范下的传播子,却无法消除 ϵ 趋于 ∞ 时的不收敛性。Ferrari^[7]关于 Chern-Simon 场的随机量子化和作者^[6]关于电磁场的讨论,虽然消除了不收敛性,但协变规范项的获得仍需借助于具有高斯分布的初值条件。另一方面,在非规范理论的随机量子化中,当 ϵ 趋于 ∞ 时,初值条件是不起作用的,因此常取其初值为零。这样,关于随机量子化,在规范理论和非规范理论中,采用了两种不同的方案。

在各种场的随机量子化中,在漂移系数为非正定的情况下,可以运用适当的核函数,使之在 ϵ 趋于 ∞ 时收敛于平衡态。直到目前为止,所采用的核函数都是与 ϵ 无关的。它保持了人为随机过程的马尔柯夫性质。另一方面,具有非马尔柯夫性质过程的核函数在随机正常化中已被运用^[3]。鉴于此,我们建议:初值为零的条件,不管是非规范理论还是规范理论,都同样采用。两者可以在核函数的选择上有所不同。这样,至少在理论形式上,把两者都统一到只运用核函数这一方案中来。而且,对规范理论,收敛性问题和获得协变规范下的传播子,可以同时给予解决。本文旨在讨论这一问题。

二、麦克斯韦场

随机量子化的基本方程,即朗之万方程为

$$\phi_i(x, t) = -\frac{\delta S_E[\phi_i \partial_\mu \phi_i]}{\delta \phi_i(x, t)} + \eta_i(x, t), \quad (1)$$

其中 S_E 是所讨论场的欧氏空间作用量。 $\eta_i(x, t)$ 是具有高斯分布的白噪声源，满足下列关系：

$$\langle \eta_i(x, t_1) \eta_j(y, t_2) \rangle = 2\delta_{ij} \delta^4(x - y) \delta(t_1 - t_2), \quad (2)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示对 η 的分布求平均。

自由麦克斯韦场的作用量为

$$S = \int d^4x \frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3)$$

为了计算简单起见，我们选用平直度规 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 。在动量空间，自由麦克斯韦场的朗之万方程为

$$\dot{A}_\mu(k, t) = -k^2 T_{\mu\nu} A_\nu(k, t) + \eta_\mu(k, t), \quad (4)$$

$T_{\mu\nu}$ 是横向投影算子。它的定义以及和纵向投影算子 L 的关系可表述如下：

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \\ L_{\mu\nu} &= \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \\ T_{\mu\rho} T_{\rho\nu} &= T_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\rho} L_{\rho\nu} = L_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\rho} L_{\rho\nu} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

在动量空间，噪声源的对关联变成

$$\langle \eta_\mu(k_1, t_1) \eta_\nu(k_2, t_2) \rangle = 2\delta_{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (6)$$

应用标准技术^[4]，可得(4)式的解为

$$A_\mu(k, t) = \int_0^t d\tau [T_{\mu\nu} \exp\{-k^2(t - \tau)\} + L_{\mu\nu}] \eta_\nu(k, \tau), \quad (7)$$

其中已选择初值条件 $A_\mu(k, 0) = 0$ 。它的两点关联为

$$\langle A_\mu(k_1, t) A_\nu(k_2, t) \rangle = (2\pi)^4 [T_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} \{1 - \exp(-2k^2 t)\} + 2L_{\mu\nu} t] \delta^4(k_1 + k_2). \quad (8)$$

显然，在 t 趋于 ∞ 时，它并不收敛。即使加上某种初值条件也无济于事。

引入核函数 K 后，若采用两个噪声源，则动量空间的朗之万方程变为

$$\dot{A}_\mu(k, t) = -K_{\mu\nu}(k) \frac{\delta S_E}{\delta A_\nu(k, t)} + K_{\mu\nu} \eta_\nu(k, t) + \xi_\mu(k, t), \quad (9)$$

现在，两个噪声源的关联为

$$\langle \eta_\mu(k_1, t_1) \xi_\nu(k_2, t_2) \rangle = \delta_{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \delta(t_1 - t_2), \quad (10)$$

其余均为零^[5]。

在文献[6]中，作者选用由 T 和任意算子构成的核，发散项被消去了，但在零初值条件下，仍只能得到两个特殊规范下的传播子。

现在我们提议采用下列形式的核：

$$K = T + \alpha L \delta\{2k^2(t - a)\}, \quad (11)$$

α 是一任意常数。 $\alpha > 0$, $a > 0$ 。这样，朗之万方程变成

$$\dot{A}_\mu(k, t) = -k^2 T_{\mu\nu} A_\nu(k, t) + [T + \alpha L \delta\{2k^2(t - a)\}]_{\mu\nu} \eta_\nu(k, t) + \xi_\mu(k, t). \quad (12)$$

很容易求得上面方程的解及其两点函数分别为

$$A_\mu(k, t) = \int_0^t d\tau \{T_{\mu\nu} \exp[-k^2(t - \tau)] + L_{\mu\nu}\} [T + \alpha L \delta\{2k^2(\tau - a)\}]_{\nu\rho} \eta_\rho(k, \tau) + \xi_\mu(k, \tau), \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle A_\mu(k_1, t) A_\nu(k_2, t) \rangle = \frac{(2\pi)^4}{k^2} [T_{\mu\nu} + \alpha L_{\mu\nu}] \delta^4(k_1 + k_2), \quad (14)$$

其中已用了投影算子的性质。它就是协变规范下的传播子。 α 是规范常数。这样，我们既消除了不收敛性，又得到了协变规范下的传播子。

我们知道，规范理论的不收敛性是因为场的纵向部分的朗之万方程缺少漂移项。而 Zwanziger^[13] 的随机规范固定法方案，是经过与 t 有关的规范变换，把纵向场的漂移系数从零变为正定。不收敛性自然就不存在，而传播子中的规范有关项也包含其中了。这一方案的着眼点是场量自身，而不是随机过程。而 Namiki^[12] 的具有高斯分布的初值条件的方案和被广泛采用的核函数方案，都是着眼于随机过程的。

在(11)式中给出的核，起着两个作用：其中第一项是把场的横向部分分离出来，有关它的讨论可参见文献[6]；第二项它虽不能改变纵向场的零漂移系数性质，但由于 $\delta(t - a)$ 因子的作用，它抑制了除 $t = a$ 时刻以外的所有噪声源的关联。这样它同样能使系统收敛于平衡态。事实上，它与具有高斯分布的初值条件是完全等价的。但它比初值条件方案更有普遍性。而初值我们仍然取成零。这样就把规范理论与非规范理论的随机量子化统一于一种方案：初值取零；采用不同形式的核。换言之，我们的新方案就是把依靠初值条件的 Namiki 方案归并到核函数方案中来。另外，从随机过程观点看来，尽管核函数中有 $\delta(t - a)$ 因子，但源的对关联中仍保留 $\delta(t_1 - t_2)$ 函数，所以其过程仍然是马尔柯夫性质的。

由于上面的讨论是建立在朗之万方程的漂移系数为投影算子基础上的。因此，所有具有这一性质的其他场，像 Yang-Mills 场、反对称张量场，上述结论也一样正确。

三、Chern-Simon 场

阿贝耳 Chern-Simon 理论的作用量为

$$S = \int d^4x \frac{-i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (15)$$

它关于其导数是线性的。所有无质量理论中，在作用量中只含有场导数的线性项时，其共同的毛病是它们的两点关联在 t 趋于 ∞ 时并不收敛。Chern-Simon 场是其中之一。

在动量空间，Chern-Simon 场的朗之万方程为

$$\dot{A}_\mu(k, t) = -\epsilon_{\mu\nu\sigma} k_\nu A_\sigma(k, t) + \eta_\mu(k, t). \quad (16)$$

Ferrari^[7] 采用下列样式的核：

$$K_{\mu\sigma} = i\epsilon_{\mu\nu\sigma} \partial_\nu. \quad (17)$$

其相应的朗之万方程及其解分别为

$$\dot{A}_\mu(k, t) = -k^2 T_{\mu\nu} A_\nu(k, t) - \varepsilon_{\mu\nu\sigma} k_\nu \eta_\sigma(k, t) + \xi_\mu(k, t) \quad (18)$$

和

$$A_\mu(k, t) = \int_0^t d\tau [T_{\mu\nu} \exp[-k^2(t - \tau)] + L_{\mu\nu}] \cdot [-\varepsilon_{\nu\lambda\rho} k_\lambda \eta_\rho(k, \tau) + \xi_\nu(k, \tau)]. \quad (19)$$

此解的两点关联是收敛的, 但其结果仅是 Feynman 规范下的传播子。而其他规范下的传播子仍需借助于初值分布。

现在我们提议采用下列形式的核:

$$K_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\rho\nu} k_\rho + \alpha L_{\mu\nu} \delta[2k^2(t - a)], \quad (20)$$

则 $V_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\rho\nu} \frac{k_\rho}{\sqrt{k^2}}$ 与 $T_{\mu\nu}$, $L_{\mu\nu}$ 之间有如下关系:

$$T = VV, \quad VT = T, \quad VL = 0. \quad (21)$$

加进(20)式样的核之后的朗之万方程和其解分别为

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu(k, t) = & -k^2 T_{\mu\nu} A_\nu(k, t) + [-V_{\mu\rho} \sqrt{k^2} \\ & + \alpha L_{\mu\rho} \delta\{2k^2(t - a)\}] \eta_\rho(k, t) + \xi_\mu(k, t) \end{aligned} \quad (22)$$

和

$$\begin{aligned} A_\mu(k, t) = & \int_0^t d\tau [T_{\mu\nu} \exp\{-k^2(t - \tau)\} + L_{\mu\nu}] \\ & \cdot \{[-V_{\nu\rho} \sqrt{k^2} + \alpha L_{\nu\rho} \delta\{2k^2(\tau - a)\}] \eta_\rho(k, \tau) \\ & + \xi_\nu(k, \tau)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

应用(21)式容易算得

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(k', t) A_\nu(k, t) \rangle = & (2\pi)^4 \delta^4(k' + k) \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{k^2} V_{\mu\nu} [1 - \exp(-2k^2 t)] + \frac{\alpha L_{\mu\nu}}{k^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

与麦克斯韦场一样, 在零初值下, 我们同样得到了 Chern-Simon 场在任意协变规范下的传播子。

四、线性 Einstein 引力理论

把 Einstein-Hilbert 引力理论中的度规, 围绕平直时空展开, 即可得到线性化的引力理论。其作用量为^[8]

$$S_{EH}^0 = \int d^4x \frac{1}{2} h V h. \quad (25)$$

它描述了一个涡度为 2 的场。这一作用量也具有规范不变性^[9]。按照文献[9], 应用完备投影算子集 $P^2, P^1, P^0, P^{0'}$, 在动量空间 V 算子可表示成

$$V = -k^2(P^2 - 2P^{0'}), \quad (26)$$

则线性引力理论的朗之万方程为

$$h(k, t) = Vh(k, t) + \eta(k, t). \quad (27)$$

这一朗之万方程的格林函数为

$$G(k, t) = \theta(t)[P^2 \exp(-k^2 t) + P^{0'} \exp(2k^2 t) + P^1 + P^0]. \quad (28)$$

显然, 它的两点关联是不收敛的。除了线性发散项以外, 还存在着指数发散项。因此文献[10], [11]曾断言, 对这种场, 随机量子化方法不能应用。如果采用下列样式的核:

$$K = \left(P^2 - \frac{1}{2} P^{0'} \right), \quad (29)$$

随机量子化方法对线性引力理论仍然是成功的。根据投影算子的性质, 容易算得朗之万方程的漂移系数将是正定的。因此指数发散项将不再存在。而线性发散项也同样被勾消了。其结果是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle h(k, t) h(k, t) \rangle = \frac{1}{k^2} \left(P^2 - \frac{1}{2} P^{0'} \right). \quad (30)$$

现在, 纯规范模项 P^1, P^0 已不再出现。而传播子中的 $\delta\delta$ 项与谐和规范下由泛函方法得到的自由引力传播子完全一样^[12]。

如果采用类似于(11)式那样的核, 其第二项由 P^1, P^0 和 $\delta(t)$ 组成, 将会得到其他规范下的传播子。总之, 随机量子化方法对线性引力理论的应用也同样是成功的。

五、对平衡分布的影响

本节讨论采用如(11)式那样的核, 是否对平衡分布产生影响。过去所采用的核都与 t 无关。引进了与 t 有关的核, 这就等于把 Parisi 和吴的随机量子化方法从马尔柯夫过程推广到非马尔柯夫过程^[13, 14]。由于所有中间时间都参予了过程, 在有相互作用的情况下, 将无法建立福克-普朗克方程。Damgaard^[14] 证明了只是在自由场的情况下, 才有简单形式的福克-普朗克方程。

$$\dot{P} = \int d^4x \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + \int d^4y M(x-y, t) \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \right] P, \quad (31)$$

其中

$$M(x-y, t) = \int_0^t d\tau \int d^4k \exp\{-ik(x-y)\} K(t-\tau) \exp[-k^2(t-\tau)]. \quad (32)$$

$K(t-\tau)$ 是非马尔柯夫过程的对关联。

$$\langle \eta(x, t_1) \eta(y, t_2) \rangle = 2\delta^4(x-y) K(t_1-t_2). \quad (33)$$

在我们情况下, 可以将除 $\delta^4(x_1-x_2)$ 以外的所有其他因子, 归入 $K(t_2-t_1)$ 中。在动量空间, 对麦克斯韦场, 则 $K(t-\tau)$ 有下列形式:

$$K_{\mu\nu}(t-\tau) = [T + \alpha L \delta\{2k^2(t-a)\}]_{\mu\nu} \delta(t-\tau). \quad (34)$$

将(32), (34)式代入(31)式, 对 $t \rightarrow \infty$ 时的平衡分布 P^{eq} , 则有

$$0 = \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left[\frac{\delta S_E}{\delta A_\mu} + T_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta A_\nu} \right] P^{eq}, \quad (35)$$

容易解得

$$P'' = \exp(-S_E). \quad (36)$$

对其他场的证明也完全一样。这就证明了(11)式那样的核不会影响原来的平衡分布,尽管它包含了时间 t 。道理也很简单,由于是 $\delta(t-a)$ 样的函数,除了 $t=a$ 点以外,它总是零。当 t 趋于 ∞ 时,不再有含 $\delta(t-a)$ 的项,故不会有影响。

必须指出一点,我们所采用的核与随机正常化中所采用的核是不同的。后者,其源的对关联是 $(t-t')$ 的一般函数,而我们的核仍然是 $\delta(t-t')$ 函数,所以随机过程仍然是马尔柯夫性质的。而马尔柯夫过程在 t 趋于 ∞ 时分布应是和初始状态无关的。

六、结 论

从根本上讲,随机量子化方法中的不收敛性来自于朗之万方程漂移系数的非正定性。而非正定性可以是虚的,像 Chern-Simon 场、Dirac 场;可以是零,像麦克斯韦场中的纵场;也可以是负的,像线性引力理论中的 P'' 部分。过去只是注意到一、三两种情况,可以采用适当的核使之变成正定的,从而使它收敛。而我们发现,即使对于零漂移系数这样的情况,也可以选择含 $\delta(t-a)$ 那样的核,一样能使场的对关联收敛。总之,只要选用适当的核,随机量子化中所有不收敛性都是可以解决的。

- [1] G. Parisi and Y. S. Wu, *Scientia Sinica*, **24**(1981), 483.
- [2] M. Namiki, I. Ohba, K. Okano and Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1983), 1580.
- [3] J. D. Breit, S. Gupta and A. Zaks, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 61.
- [4] P. H. Damgaard and H. Huffel, *Phys. Rep.*, **152**(1987), 227.
- [5] K. Ishikawa, *Nucl. Phys.*, **B241**(1983), 589.
- [6] CHEN Ren, to be appeared.
- [7] F. Ferrari and H. Huffel, *UwThPh*-1991-8.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York 1972).
- [9] P. Van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.*, **B60**(1973), 478.
- [10] H. Huffel and H. Rumpf, *Z. Phys.*, **C29**(1985), 319.
- [11] R. Fukai and O. Okano, *Prog. Theor. Phys.*, **73**(1985), 790.
- [12] G. W. Gibbons, S. W. Hawking and M. J. Perry, *Nucl. Phys.*, **B138** (1978), 141.
- [13] D. Zwanziger, *Nucl. Phys.*, **B192**(1981), 259.

A NEW PRESCRIPTION OF THE STOCHASTIC QUANTIZATION OF GAUGE THEORIES

CHEN REN

Department of Physics, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234

(Received 20 June 1993)

ABSTRACT

By using the kernels consisting of the projectors and function $\delta(\tau)$, both the convergence to equilibrium and to get the propagators in covariant gauge are solved together under the vanishing initial condition. Thus, the SQ prescriptions of gauge and non-gauge fields are united in using only these same kernels. The Maxwell, Chern-Simon and the linear gravitational theories are considered respectively. Again, it is shown that the use of this kernel does not yield the influence on the equilibrium distribution.

PACC: 1110