

# 水槽中驻孤波的参数激励分析\*

陈陆君 梁昌洪 吴鸿适

西安电子科技大学, 西安 710071

1992年8月31日收到; 1992年11月24日收到修改稿

从流体力学方程组出发, 引入新的尺度假设, 基于多重尺度分析, 导出了计及激励、损耗在内的水槽孤波支配方程和驻孤波解。通过耗散分析, 给出了下截止驱动振幅  $\Delta_c$  随驱动频率  $\Omega$  的约束关系和在  $\Delta_c - \Omega$  图象中等振幅线。本文低功率因数尺度假设更符合实际情况, 且更有利于解释实验。

PACC: 4790; 4735; 0340K

## 一、引言

1984年 Wu, Keolian 和 Rundinck<sup>[1]</sup> 首次在水槽中发现了非传播孤波 (简称驻孤波)。同年 Larraza 和 Putterman<sup>[2]</sup> 以及 Miles<sup>[3]</sup> 分别用不同方法导出了孤波所服从的方程与单孤波解, 与实验符合较好, 但 Miles 缺乏严谨的论证。Larraza 等人未考虑损耗及激励的影响, 因而不够完善。在我国, 对此也开展了广泛的研究<sup>[4-7]</sup>。文献[6]导出了矩形槽和圆环槽中计及激励和损耗的孤波方程, 弥补了前人的不足。本文根据实验分析, 引入新的尺度假设, 即把激励和损耗项及  $\omega^2 - \omega_0^2$  项分别作为  $O(1)$ ,  $O(\varepsilon^{1/2})$  和  $O(1)$  数量级处理, 也得到了较好的结果, 其中包含了低功率因数尺度假设。此外, 通过耗散分析, 给出了等振幅线和  $\Delta_c - \Omega$  曲线, 初步解释了实验曲线。

## 二、参数激励多重尺度分析及孤波解

考虑盛于矩形长槽中处于重力场  $g$  的无旋不可压缩流体, 对其进行竖直方向的参数激励, 设槽宽为  $b$ , 流体深度为  $d$ , 取坐标系使流体静止时所充空间为  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-d \leq z \leq 0$ ,  $L$  为槽长, 为简单计, 暂不计表面张力。按照文献[8]的处理, 把所有耗散因素的综合抑制效应用  $2\mu'\xi$  ( $\mu'$  代表线性阻尼) 项来近似, 同时考虑幅度为  $\Delta$ , 频率为  $\Omega$  的竖直周期外力, 这时流体运动方程可归纳为

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -d \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (1)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{当 } z = -d;$$

$$\phi_y = 0, \quad \text{当 } y = 0, b. \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金资助的课题。

在自由面  $z = \xi(x, y, t)$  上

$$\phi_x - \xi_t = \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y, \quad (3)$$

$$g\xi + \frac{1}{2} \Delta Q^2 [e^{i(\varphi_0 + Q^2)} + \text{c.c.}] \xi + \phi_t + 2\mu' \xi_t = -\frac{1}{2} (D\phi)^2 \quad (4)$$

引入下列新尺度假设:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 O(1), \Delta Q^2 = gO(1), 2\mu\omega = gO(\varepsilon^{1/2}); \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \sin(\varphi_0 - 2\psi) - 2\mu\omega = \omega_0^2 O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \cos(\varphi_0 - 2\psi) = \omega_0^2 O(\varepsilon^1); \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = O(\varepsilon^{1/2}) \frac{\partial}{\partial y} = O(\varepsilon^{1/2}) \frac{\partial}{\partial z},$$

$$t_1 = \varepsilon t, t_0 = t, \quad (7)$$

其中  $\varepsilon = \xi_{m,x}^2 / \lambda_0^2$  ( $\lambda_0$  为特征波长),  $\omega_0^2 \approx gkT, T = \tanh(kd), k = \pi/b, 2\mu = 2\mu'kT,$

$\omega$  为参数激励下流体的振荡频率, 可近似为  $\omega \approx \frac{1}{2} Q, \varphi_0$  即(4)式中的激励初相,  $\psi$

由后面(34)式定义。(6)式代表了低功率因数假设。在此,已把过去文献中的  $\omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 O(\varepsilon^2)$  (如文献[6])用(6)式中的第二式取代,当  $\Delta = 0$  时,(6)式过渡到与过去相当的尺度(作变换  $\varepsilon^{1/2} \rightarrow \varepsilon$  后,本文与过去文献可对应起来)。这里,有必要对新尺度作进一步的说明。过去,  $(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega_0^2, \Delta Q^2/g$  和  $2\mu\omega/g$  都是作为  $O(\varepsilon^2)$  处理的,但若按 Wu 等人的实验,取  $b = 2.54\text{cm}, d = 2.0\text{cm}, g = 980\text{cm/s}^2$ , 可计算  $\omega_0^2 = 1195\text{s}^{-2}$ , 因此,当  $2f = 10.2\text{Hz}$  时  $\omega_0^2 - \omega^2$  可达  $168\text{s}^{-2}$ , 即  $0.14\omega_0^2, \Delta Q^2$  可达  $164\text{cm/s}^2$  (取  $2\Delta = 0.08\text{cm}$ ), 即  $0.17g$ , 而  $2\mu\omega \approx 37\text{cm/s}^2$ , 即  $0.04g$  (取  $\mu = 0.6$ , 因实验在  $0.5-0.7$  之间)。因此,现在的问题是把  $0.14, 0.17$  和  $0.04$  归属于  $O(\varepsilon^2)$  还是  $O(1)$ , 或者把前二者归于  $O(1)$  而后者( $0.04$ )归于  $O(\varepsilon^{1/2})$ 。本文正是采用了最后一种划分。因为,如果说过去尺度中把  $(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega_0^2$  和  $\Delta Q^2/g$  作为  $O(\varepsilon^2)$  处理不算是过小地看待它们,那么把它们作为  $O(1)$  处理不会是过大地看待它们。事实上,只有能够包容低功率因数假设的新尺度假设所支持的(49)式才能初步解释  $2\Delta_c - Q$  曲线。引入新的尺度假设有两点意义:一方面为今后研究这类问题提供又一种尺度选择的余地,同时,使理论等振幅曲线与实验能很好地符合,尤其在  $(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega_0^2$  和  $\Delta Q^2/g$  较大的区域,如  $2f = 10.2-10.4\text{Hz}$  段内,而过去尺度只适应于这两种量较小的区域。我们认为,  $\varepsilon (< 1)$  的实际大小并无至关重要的意义,重要的是,所有物理量的尺度假设之间必须是自适应的,即相互协调,互容无矛盾,只有各种尺度假设之间的自适应性才赋予了  $\varepsilon$  的真正意义和量度(大小)。

(7) 式等价于

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots, \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots \quad (7')$$

满足边界条件(2)式和多重尺度假设(7')式的 Laplace 方程的解为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned}
 \phi = & \cos ky \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)} [\phi_1(x,t)e^{i\omega t} + \text{c.c.}] \\
 & + \{\phi_2^{(0)}(x,t) + [\phi_0^{(2)}(x,t)e^{i2\omega t} + \text{c.c.}] \\
 & + \cos 2k \frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh(2kd)} [\phi_2(x,t)e^{i2\omega t} + \text{c.c.}]\} \\
 & + \left\{ -\frac{1}{2k} \frac{\cos ky}{\cosh kd} [z \sinh k(z+d) - d e^{-k(x+d)}] \right. \\
 & \left. \times \left[ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} e^{i\omega t} + \text{c.c.} \right] \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (8)
 \end{aligned}$$

并设

$$\begin{aligned}
 \xi(x,y,t) = & \cos ky \cdot [\xi_1(x,t)e^{i\omega t} + \text{c.c.}] \\
 & + \xi_0(x,t) + [\xi_2(x,t)e^{i2\omega t} + \text{c.c.}] \cos 2k \\
 & + \xi_2^{(0)}(x,t) \cos 2ky + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中已将  $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}, \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}$  分别用  $\frac{\partial}{\partial t}$  和  $\frac{\partial}{\partial x}$  表示, 注意区别。还须把(3),(4)式中的  $\varphi$  及其导数在  $z=0$  用自由面  $\xi(x,y,t)$  展开, 如

$$\begin{aligned}
 \phi(x,y,z,t)|_{z=\xi} = & \phi(x,y,0,t) + \phi_x(x,y,0,t) \cdot \xi \\
 & + \frac{1}{2} \phi_{xx}(x,y,0,t) \xi^2 + \dots, \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial v} \Big|_{z=\xi} = & \phi_v(x,y,0,t) + \phi_{vx}(x,y,0,t) \cdot \xi \\
 & + \frac{1}{2} \phi_{vxx}(x,y,0,t) \xi^2 + \dots, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中  $v = x, y, z, t$ 。将(8),(9),(10),(11)式代入(3), (4)式, 得各级近似。一级近似为(在(6)式意义下,  $\mu'$  项应略去)

$$\begin{aligned}
 g\xi_1 + \frac{1}{2} \Delta Q^2 \xi_1^* e^{i\varphi_0} + i\omega \cdot 2\mu' \xi_1 + i\omega \phi_1 = 0, \\
 -i\omega \xi_1 + kT \phi_1 = 0, \quad (12)
 \end{aligned}$$

有解条件为

$$\omega^2 = \omega_1^2, \quad (13)$$

$$\xi_1 = -i \frac{kT}{\omega_1} \phi_1, \quad (14)$$

其中  $\omega_1$  为

$$\omega_1^2 = gkT + \sqrt{(2kT\omega_1^2\Delta)^2 - (2\mu\omega_1)^2} \quad (15)$$

的根,  $2\mu = 2\mu'kT$ 。二级近似为

$$\xi_0 = \frac{1}{g} \left[ -\frac{1}{2} k^2(1+T^2)|\phi_1|^2 - i \frac{1}{2} \omega_1 kT (\phi_1 \xi_1^* - \phi_1^* \xi_1) \right], \quad (16)$$

$$\phi_0^{(2)} = \frac{1}{i2\omega_1} \left[ -\frac{1}{2} i\omega_1 k T \xi_1 \phi_1 - \frac{1}{4} k^2 \phi_1^2 (1 + T^2) - \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} Q_1^2 \Delta \xi_0 \right], \quad (17)$$

$$\phi_1^{(0)} = -\frac{1}{2kT_2} (\phi_1 \xi_1^* + \phi_1^* \xi_1) \equiv 0, \quad (18)$$

$$\xi_2^{(0)} = \frac{1}{H} \left[ g \xi_2^{(0)} - \frac{1}{2} \Delta Q_1^2 (e^{i\varphi_0} \xi_2^* + e^{i\varphi_0} \xi_2) \right], \quad (19)$$

$$\xi_2 = \bar{\xi}_2 \left[ 1 - Q_1^2 \Delta \frac{Q_1}{H} \cos \varphi_0 \right] + g \frac{Q_1}{H} \xi_2^{(0)}, \quad (20)$$

$$\phi_2 = \bar{\phi}_2 + \varepsilon \frac{Q_2}{H} \xi_2^{(0)} - Q_1^2 \Delta \frac{Q_2}{H} \bar{\xi}_2 \cos \varphi_0, \quad (21)$$

其中

$$\bar{\phi}_2 = \lambda \left[ -\omega_1 k T \phi_1 \xi_1 + \frac{1}{2} i\omega_1 k^2 (T^2 - 1) \phi_1^2 + k^2 g \phi_1 \xi_1 \right], \quad (22)$$

$$\bar{\xi}_2 = \lambda \left[ -i2\omega_1 k^2 \phi_1 \xi_1 + i\omega_1 k^2 T T_2 \phi_1 \xi_1 + \frac{1}{2} k^2 T_2 (T^2 - 1) \phi_1^2 \right], \quad (23)$$

$$\xi_2^{(0)} = \frac{1}{g} \left[ -\frac{1}{2} k^2 (T^2 - 1) |\phi_1|^2 - \frac{1}{2} i\omega_1 k T (\xi_1^* \phi_1 - \xi_1 \phi_1^*) \right], \quad (24)$$

$$T_2 = \tanh(2kd), Q_1 = 2\omega_1,$$

$$H = g + \frac{1}{2} (Q_1^2 \Delta)^2 \lambda k T_2, \quad (25)$$

$$\lambda = 1/[4\omega_1^2 - 2gkT_2], \quad (26)$$

$$Q_1 = \lambda k T_2 Q_1^2 \Delta e^{i\varphi_0}, \quad (27)$$

$$Q_2 = i\lambda \omega Q_1^2 \Delta e^{i\varphi_0}. \quad (28)$$

在得到(18)式时用到(14)式,由于  $\lambda \sim \frac{1}{2\omega_1^2} \sim \frac{1}{2gkT_2}$ ,因此(25)式第二项约为第一项的

2% (取  $2\Delta = 0.08\text{cm}$ ), 以下取  $H \approx g$ , 经繁冗的计算化简,可得三级近似

$$\begin{aligned} i\omega \left( 1 + \frac{gkT}{\omega_1^2} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + (\omega_0^2 - \omega^2) \phi_1 + i2\mu\omega\phi_1 - \frac{1}{2} kT\Delta Q_1^2 \phi_1^* e^{i\varphi_0} \\ - c^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = A_0 |\phi_1|^2 \phi_1 + A_1 \cos \varphi_0 \phi^3 + A_2 |\phi_1|^2 \phi_1^* e^{i\varphi_0} \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 = k^4 \lambda \left[ \omega_1^2 \left( -\frac{9}{4} T^3 T_2 + \frac{3}{4} T T_2 + \frac{5}{2} T^2 - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. + gk \left( \frac{7}{4} T^2 T_2 - \frac{1}{4} T_2 - 2T + \frac{3}{2} T^3 - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - g^2 k^2 T^2 \frac{1}{\omega_1^2} \right] + \left[ \frac{\omega_1^2 k^3}{g} \left( \frac{3}{4} T^2 - \frac{1}{4} T \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ k^4 \left( -\frac{1}{8} T^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{8} g k^3 T^2 \frac{1}{\omega_1^2} \Big], \quad (30)$$

$$A_1 = \Delta \lambda Q_1^2 \left\{ k^3 \left( T + \frac{1}{4} T_2 - \frac{3}{4} T^2 T_2 \right) + \frac{k^4 \omega_1^2}{g} \left( T^2 + \frac{1}{4} T T_2 - \frac{3}{4} T^3 T_2 \right) \right\}, \quad (31)$$

$$A_2 = \Delta \lambda Q_1^2 \left\{ k^3 \left( \frac{1}{4} T^2 T_2 + \frac{1}{4} T_2 + \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} T^3 \right) - \frac{\omega_1^2 k^4}{g} \left( \frac{3}{4} T^3 T_2 + \frac{3}{4} T_2 T - \frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (32)$$

$$c^2 = \frac{1}{2k} \left[ gT + \frac{de - kd}{\cosh kd} (\omega_1^2 + gk) \right]. \quad (33)$$

当  $\Delta = 0, \mu = 0$  时  $A_0 = \frac{1}{8} k^4 (6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}), A_1 = 0, A_2 = 0, \omega_1^2 = gkT,$

$c^2 = \frac{g}{2k} [T + kd(1 - T^2)],$  这正是 Larraza<sup>[1]</sup> 的结果。考虑非传播解,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0,$  (29)

式的孤波解为

$$\phi_1 = \phi_0 \operatorname{sech}(Dx) e^{i\psi}, \quad (34)$$

其中

$$D^2 = \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + \sqrt{\left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right)^2 - (2\mu\omega)^2} \right] / c^2, \quad (35)$$

$$\phi_0^2 = \frac{2 \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + \sqrt{\left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right)^2 - (2\mu\omega)^2} \right]}{A_0 + A_1 \cos 2\varphi \cos \varphi_0 + A_2 \cos(\varphi_0 - 2\psi)}, \quad (36)$$

$$\cos(\varphi_0 - 2\psi) = s_1 \equiv - \sqrt{\left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right)^2 - (2\mu\omega)^2} / \left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right),$$

$$\sin(\varphi_0 - 2\psi) = s_2 \equiv 2\mu\omega / \left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right). \quad (37)$$

(36)式中的  $\cos 2\psi \cos \varphi_0$  可由  $A_1 \sin 2\psi \cos \varphi_0 = -A_2 \sin(\varphi_0 - 2\psi)$  解出, 即为方程

$$q^2 - s_1 q + A_2 \frac{A_2 - A_1}{A_1^2} s_2^2 = 0. \quad (38)$$

关于  $q$  的根, (35)和(36)式的实值条件为

$$\omega^2 < \omega_0^2 + \sqrt{\left( \frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \right)^2 - (2\mu\omega)^2}, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} kT \Delta Q^2 \geq 2\mu\omega. \quad (40)$$

(38)式有实根的条件为

$$\frac{1}{2} k T \Delta Q^2 \geq 2 \mu \omega \left[ 1 + \frac{4 A_2 (A_2 - A_1)}{A_1^2} \right]^{1/2}. \quad (41)$$

对于实验系统:  $b = 2.54\text{cm}$ ,  $d = 2.0\text{cm}$ , 于是  $T = 0.9859$ ,  $T_2 = 0.9999$ , 因此  $A_1 \approx A_2 \approx \Delta \lambda Q^2 k^5$ , 就是说(40)和(41)式给出几乎一致的结论。(34)–(38)式给出了计及激励和各种耗散的驻孤波解。当取  $2\Delta = 0.08\text{cm}$  时, (36)式中的  $A_1, A_2$  项的总和可达  $0.24A_0$ , 可见, 新尺度的改进之处为: (36)式中分母出现了  $A_1, A_2$  项;  $A_0$  的表达式中相对于过去理论中的  $A$  也多出了修正项。

### 三、耗散分析

耗散造成能量逐渐损失, 因此必须维持一定的激励使之得以补充。在一个周期内, 激励做功为

$$\begin{aligned} W &= \int_V \int_0^T f v_x dt dV \\ &= - \int_V \int_0^T \rho \Delta Q^2 \cos(Qt + \varphi_0) (\nabla \phi)_x dt dV \\ &= 4 \rho \Delta Q^2 \frac{k^2 T^2}{\omega} I_x I_x I_y, \end{aligned} \quad (42)$$

其中

$$I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1^2(x) dx = 2\phi_0^2/D, \quad (43)$$

$$I_y = \frac{1}{2} b, \quad I_t = \frac{\pi}{2\omega} \sin(\varphi_0 - 2\psi). \quad (44)$$

(8)式中只有  $\phi_1(x, t)$  项对(42)式有贡献, 而  $\phi_2, \phi_0^{(2)}$  和  $\phi_2^{(0)}$  项因时间或空间积分为零, 对  $W$  无贡献。另一方面, 当激励取消后, 孤波将衰减, 我们用取消激励后的第一个周期内的平均损耗来代替未取消时稳定状态下的周期损耗。Miles<sup>[8]</sup> 给出了能量衰减为  $E(t) = E_0 e^{-2\mu t}$ , 由于能量由  $(\nabla \phi)^2$  给出, 可知振幅  $\xi_{\max} \propto \phi_{1\max} \propto e^{-\mu t}$ , 于是  $\mu$  可由 Wu 等人的振幅衰减实验拟合确定<sup>[9]</sup> ( $f = 5.1\text{Hz}$ ):

$$\alpha = \frac{1}{f} [-0.285 \xi_{\max}^2 + 0.869 \xi_{\max} + 0.118], \quad (45)$$

其中  $\mu = f\alpha$ , 或  $2\mu = \alpha\omega/\pi$ ,  $\alpha = \alpha_w + \alpha_s + \alpha_L$  中的三项分别来源于刚性壁附近( $\alpha_w$ ), 自由表面及其附近内部( $\alpha_s$ )的粘性耗散和自由表面与刚性壁之间的接触线  $L$  处月弯面的毛细粘滞( $\alpha_L$ ), 虽然在文献[8]中, Miles 给出了它们的计算式, 但由于其中许多量都无法测定或没有实验测量报道, 因此, 我们在分析中, 只能借助基于实验的模拟曲线(45)式。一个周期内能量损耗可以近似为  $\Delta E = E_0 [e^{-2\mu(-\frac{1}{2}T_p)} - e^{-2\mu(\frac{1}{2}T_p)}]$ ,

即

$$\Delta E = 2E_0 \sinh[2\pi\mu/\omega], \quad (46)$$

其中  $T_p = 2\pi/\omega$ 。稳态总能量  $E_0 = E_K + E_{PG} + E_{PS}$  为动能、重力势能和表面张力势能总和, 但由于  $E_K = E_{PG}$ <sup>[10]</sup>, 且可证明  $E_{PS} \ll E_K$ <sup>[11]</sup>, 因此

$$E_0 \approx \frac{1}{T} \rho \int_0^T \int_V (\nabla \phi)^2 dV dt$$

$$\approx 2\rho k^2 I_x' b \sinh(2kd) / 4k (\cosh kd)^2$$

$$+ 2\rho D^2 I_x' b \left[ \frac{1}{2} \sinh(2kd) + kd \right] / 4k (\cosh kd)^2, \quad (47)$$

其中  $I_x' = \frac{2}{3} \phi_0^2 / D$ , 上式等号右端第二项可忽略, 由于(8)式中  $\phi_2, \phi_0^{(2)}, \phi_2^{(0)}$  三项的贡献很小, 在(47)式中没有计入。激励初相  $\varphi_0$  与孤波初相  $\psi$  差值  $\varphi_0 - 2\psi$  受多方因素影响, 理论上目前无法确定, 但(6)式限定了  $\sin(\varphi_0 - 2\psi)$  的上限  $\beta \sim O(\epsilon^{1/2})$  远达不到 1。当激励做功补充能量与损耗能量相平衡时,  $\Delta E = W$ , 即

$$2\Delta = \frac{\sinh(2kd) \sinh(2\pi\mu/\omega)}{2\pi k^2 T^2 [\cosh(kd)]^2 \sin(\varphi_0 - 2\psi)}. \quad (48)$$

将  $\sin(\varphi_0 - 2\psi) \leq \beta$  代入上式

$$2\Delta \geq \frac{\sinh(2kd) \sinh(2\pi\mu/\omega)}{2\pi k^2 T^2 (\cosh kd)^2 \beta} \equiv 2\Delta_c. \quad (49)$$

$\beta$  可通过实验测定, 其理论确定将是今后进一步研究的内容。由于  $\beta < 1$ , 可以证明, 在(49)式所规定的区域中, (40)和(41)式自然得到满足, 反之则不然。

图 1 给出了本文结果与实验的比较, 其中等幅值理论曲线在大幅值时(如 2.0, 1.5cm) 与实验曲线符合较好, 而在小幅值时差异较大, 但仍具有基本相同的变化趋势, 这里等幅值的理论曲线是利用(34), (36)式将(14), (16), (19)和(20)式代入(9)式, 并取在  $y = 0$  处的时间变化最大值而得, 因为文献[1]给出的幅值正是这个意义下的值<sup>[5]</sup>, 由文献[1]中的实验拟合曲线, 即

$$\xi_{\max} = \operatorname{sech}(x/1.12) \cdot [2.8e^{-1.1y} - 0.70] \text{cm}$$

可知, 某时刻在  $y = 0$  处  $\xi_{\max} = 2.1\text{cm}$  而  $y = b = 2.54\text{cm}$  处,

$$\xi_{\max} = 0.53\text{cm},$$

但这时幅值被认定为 2.1cm。下截止激励振幅  $2\Delta_c$  随激励频率  $2f$  (或  $\omega/\pi$ ) 的变化曲线与实验曲线有完全一致的趋势, 且把实验曲线包含在  $\beta = 1$  和  $\beta = 0.5$  的曲线之间, 根据实验曲线, 可估计  $\beta$  约为 0.53。由于尚存在许多因素, 目

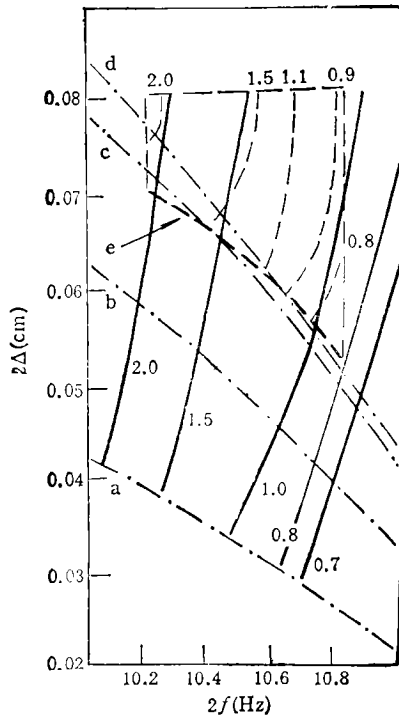


图 1 孤波等幅值线和  $2\Delta_c - 2f$  曲线 (简称  $\Delta_c - \Omega$  曲线) 虚线为实验曲线; 点划线为  $\Delta_c - \Omega$  曲线; 实线为孤波等幅值理论曲线; 线旁数值代表幅值 (cm), 且 a 为  $\beta = 1$ ; b 为  $\beta = 2/3$ ; c 为  $\beta = 0.53$ ; d 为  $\beta = 0.5$ ; e 为实验

前尚无法考虑,理论上不能把 $\beta$ 确定到较小的范围。此外,上面分析所依赖的(45)式也只是在 $f = 5.1\text{Hz}$ 情况下的实验模拟曲线,对其它频率未必适应,因此本文理论同前人理论类似,只能部分地解释实验。但结果表明,本文尺度假设是自适应的,因此它将为今后分析提供又一尺度选择的余地。可以期望,以文献[7]理论为基础,引入上述新的尺度假设,将更有利于解释实验,这正是我们进一步的工作之一。

#### 四、结 束 语

本文采用一种新的尺度假设,即(5)–(7)式,其中包括低功率因数假设,也导出了计及激励、损耗在内的支配方程,并给出了非传播孤波解,也得到较好的结果,尤其在低频段(如 $2f = 10.2\text{--}10.4\text{Hz}$ )和大幅值驱动( $2\Delta = 0.08\text{cm}$ 附近)区与实验曲线符合颇好。因此,本文的新尺度假设一方面给出了较好的结果,同时又为今后分析提供了又一条尺度选择的余地。此外,通过耗散分析,给出了下截止驱动振幅 $\Delta$ 随驱动频率 $\Omega$ 的依赖关系,初步解释了实验曲线。事实上,本文正是考虑到按过去假设所给出的 $2\Delta$ 理论值过低,才提出了能包容低功率因数假设(6)式的新的尺度假设。

- [1] Wu Jun-ru, R. Keolian, I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1421.
- [2] A. Larraza, S. Putterman, *J. Fluid. Mech.*, **148**(1984), 443.
- [3] J. W. Miles, *J. Fluid. Mech.*, **148**(1984), 451.
- [4] 陈陆君、梁昌洪、吴鸿适,物理学报, **41**(1992), 1745.
- [5] B. R. Wang and R. G. Wei, *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1988), 213; 王本仁、魏荣爵, 物理学报, **35**(1986), 1547.
- [6] J. R. Yan and G. J. Huang, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988), 305; J. R. Yan and Xin'e Yang, *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 537; 黄国翔、颜家壬、戴显焘,物理学报, **39**(1990), 1234.
- [7] 倪皖孙、魏荣爵,中国科学, **11**(1991), 1207.
- [8] J. W. Miles, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A297** (1961), 459; A. H. Nayfeh, *Phys. Fluids*, **30**(1987), 2976.
- [9] J. Wu, Ph. Dr. Dissertation, UCLA, 1985.
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluids Mech.*, Pergamon, (1959).
- [11] 陈陆君、梁昌洪、吴鸿适,西安电子科技大学学报, **18**(1991), 16.



# PARAMETRICALLY EXCITED SOLITARY WAVES IN A TROUGH RESONATOR

CHEN LU-JUN LIANG CHANG-HONG WU HONG-SHI  
*Xidian University, Xi'an 710071*

(Received 31 August 1992; revised manuscript received 24 November 1992)

## ABSTRACT

Based on equations of fluids mechanics, introducing new scale hypotheses, and by means of perturbative multiple-scale method, the governing equation and solution of non-propagating soliton with counting of excitation and damping are given. By damping analysis, the curves of the lower cut-off excited amplitude  $\Delta_c$  versus the excited frequency  $\Omega$  and the soliton equalamplitude curves in  $\Delta - \Omega$  picture in a good agreement with experiment to a certain extent are obtained.

**PACC:** 4790;4735;0340K