

时间有关的广义谐振子与外场的 相互作用*

$SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 线性非自治量子系统的严格解

左 维

(中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000)

王 顺 金

(兰州大学现代物理系, 兰州 730001)

(1994年6月8日收到)

利用代数动力学方法得到了 $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 线性非自治量子系统的精确解及其 Cartan 不变算子, 并发现了量子解与经典解之间的新的间接对应关系。结果还表明代数动力学方法对于这种具有非半单李代数结构的线性动力系统仍然适用。

PACC: 0220

在文献[1]中, 我们把代数动力学方法从半单李代数线性非自治系统推广到非半单李代数线性非自治系统——Heisenberg-Weyl ($\hbar w(4) = u(1) \oplus \hbar(3)$) 代数系统, 研究了该系统的时间有关的动力学对称性, 求得了该系统在谐振子表象和相干态表象中的严格解。本文把 $\hbar w(4)$ 系统进一步推广到更为复杂一些的非半单李代数系统—— $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 代数系统。

众所周知, 具有 $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 代数结构的线性非自治量子系统是一类非常重要的量子系统。对这类系统的研究不仅可以应用于外场中的广义谐振子问题^[2-5], 而且能够用来讨论激光等离子体碰撞中的非泊松效应^[6]。本文将在代数动力学^[7]的框架内, 给出 $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 线性非自治量子系统的精确解。本文结果进一步表明代数动力学方法有可能从半单李代数线性系统推广到比较复杂的非半单李代数线性系统。

$SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 线性非自治量子系统的哈密顿量可以表示为 $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$ 代数的生成元的线性组合, 即

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= X_+(t)\hat{k}_+ + iX_0(t)\hat{k}_0 + X_-(t)\hat{k}_- + X_1(t)\hat{k}_1 + X_2(t)\hat{k}_2 + X(t) \\ &= \frac{1}{2}X_+(t)\hat{p}^2 + \frac{1}{4}X_0(t)(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + \frac{1}{2}X_-(t)\hat{q}^2 \\ &\quad + X_1(t)\hat{p} + X_2(t)\hat{q} + X(t), \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金及高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题。

其中 $X_v(t)$ ($v = +, 0, -, 1, 2$) 及 $X(t)$ 均为时间有关的非奇异实系数。哈密顿量(1)式直接的物理意义是描述时间有关的广义谐振子(等号右端前三项)与外场的耦合(等号右端后三项)。 $\hat{k}_+, \hat{k}_0$ 及 $\hat{k}_-$ 构成 $SU(1, 1)$ 代数

$$\hat{k}_+ = \frac{1}{2} \hat{p}^2, \hat{k}_0 = -\frac{i}{4} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}), \hat{k}_- = \frac{1}{2} \hat{q}^2, \quad (2a)$$

$$[\hat{k}_+, \hat{k}_-] = 2\hat{k}_0, [\hat{k}_0, \hat{k}_\pm] = \pm \hat{k}_\pm; \quad (2b)$$

而 $\hat{k}_1 = \hat{p}, \hat{k}_2 = \hat{q}$ 与 1 构成 Heisenberg 代数(即 $h(3)$ 代数), 对易关系为

$$[\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i. \quad (3)$$

两组生成元之间满足下列对易关系:

$$[\hat{k}_+, \hat{k}_1] = 0, [\hat{k}_0, \hat{k}_1] = \frac{1}{2} \hat{k}_1, [\hat{k}_-, \hat{k}_1] = i\hat{k}_2, \quad (4)$$

$$[\hat{k}_+, \hat{k}_2] = -i\hat{k}_1, [\hat{k}_0, \hat{k}_2] = -\frac{1}{2} \hat{k}_2, [\hat{k}_-, \hat{k}_2] = 0.$$

系统随时间的演化由下面时间相关的薛定谔方程决定:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (5)$$

其中已取自然单位 ($\hbar = 1$)。为了求解薛定谔方程(5), 引进规范变换 $\hat{U}_g(t)$

$$\hat{U}_g(t) = \exp[i\nu(t)] \exp[i\nu_2(t)\hat{k}_2] \exp[-i\nu_1(t)\hat{k}_1] \exp[i\nu_-(t)\hat{k}_-] \exp[\nu_0(t)\hat{k}_0], \quad (6)$$

其中 $\nu_v(t)$ ($v = 0, -, 1, 2$) 及 $\nu(t)$ 均为时间有关的实参数。在代数动力学框架内, 变换参数 $\nu_v(t)$ 及 $\nu(t)$ 的初值可取为任意实数。为方便起见, 取 $\hat{U}_g(t=0) = 1$, 即

$$\nu_0(0) = \nu_-(0) = \nu_1(0) = \nu_2(0) = \nu(0) = 0. \quad (7)$$

经过上面的规范变换后, 薛定谔方程(5)变为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}(t)\rangle = \hat{H}(t) |\bar{\Psi}(t)\rangle, \quad (8)$$

其中规范哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 与规范波函数 $|\bar{\Psi}(t)\rangle$ 分别由下式定义:

$$\hat{H}(t) = \hat{U}_g^{-1} \hat{H}(t) \hat{U}_g - i \hat{U}_g^{-1} \frac{\partial \hat{U}_g}{\partial t}, \quad (9)$$

$$|\bar{\Psi}(t)\rangle = \hat{U}_g^{-1} |\Psi(t)\rangle. \quad (10)$$

由于生成元 $\hat{k}_+, \hat{k}_-, \hat{k}_1$ 与 $\hat{k}_2$ 是厄密的, 而 $\hat{k}_0$ 是反厄密的, 因而哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 也是厄密的; 而且对于实的变换参数 $\nu_v(t)$ ($v = 0, -, 1, 2$) 及 $\nu(t)$, 规范变换 $\hat{U}_g(t)$ 是么正的。经过一些计算, 可以求出规范哈密顿量 $\hat{H}$ 的表达式

$$\hat{H} = Z_+(t)\hat{k}_+ + iZ_0(t)\hat{k}_0 + Z_-(t)\hat{k}_- + Z_1(t)\hat{k}_1 + Z_2(t)\hat{k}_2 + Z(t), \quad (11)$$

其中各项的系数由下列各式给出:

$$Z_+(t) = \exp[-\nu_0(t)] X_+(t), \quad (12a)$$

$$Z_0(t) = -\dot{\nu}_0(t) + X_0(t) + 2X_+(t)\nu_-(t), \quad (12b)$$

$$Z_-(t) = \exp[\nu_0(t)] [\dot{\nu}_-(t) + X_-(t) + X_0(t)\nu_-(t) + X_+(t)\nu_-^2(t)], \quad (12c)$$

$$Z_1(t) = \exp\left[-\frac{\nu_0(t)}{2}\right] \left[-\dot{\nu}_1(t) + X_1(t) + X_+(t)\nu_2(t) + \frac{1}{2} X_0(t)\nu_1(t)\right], \quad (12d)$$

$$Z_2(t) = \exp\left[\frac{v_0(t)}{2}\right] \left\{ \left[\dot{\phi}_2(t) + X_2(t) + X_-(t)v_1(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_2(t) \right] \right. \\ \left. + \left[-\dot{\phi}_1(t) + X_1(t) + X_+(t)v_2(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_1(t) \right] v_-(t) \right\}, \quad (12e)$$

$$Z(t) = \dot{\phi}(t) + v_1(t)\dot{\phi}_2(t) + X(t) + X_2(t)v_1(t) + X_1(t)v_2(t) \\ + \frac{1}{2} X_-(t)v_1^2(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_1(t)v_2(t) + \frac{1}{2} X_+(t)v_2^2(t). \quad (12f)$$

在文献[7]中已经指出,代数动力学的优点之一是可以根据需要选择适当的规范,从而使问题的求解大大简化。在最佳规范下,非自治量子问题将转化为定态本征值问题以及对一组经典运动方程的求解。对本文所研究的系统,一种最佳的规范选择就是通过选取规范变换参数 $v_\nu(t)$ ($\nu = 0, -1, 1, 2$) 及 $\phi(t)$, 使得¹⁾

$$\frac{Z_-(t)}{Z_+(t)} = \text{const} = \kappa, Z_0(t) = 0, Z_1(t) = 0, Z_2(t) = 0, Z(t) = 0. \quad (13)$$

利用 (12a)–(12f) 式,可以得到

$$\frac{\exp[2v_0(t)]}{X_+(t)} [\dot{\phi}_-(t) + X_-(t) + X_0(t)v_-(t) + X_+(t)v_-^2(t)] = \kappa, \quad (14a)$$

$$-\dot{\phi}_0(t) + X_0(t) + 2X_+(t)v_-(t) = 0, \quad (14b)$$

$$-\dot{\phi}_1(t) + X_1(t) + X_+(t)v_2(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_1(t) = 0, \quad (14c)$$

$$\dot{\phi}_2(t) + X_2(t) + X_-(t)v_1(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_2(t) = 0, \quad (14d)$$

$$\dot{\phi}(t) + v_1(t)\dot{\phi}_2(t) + X(t) + X_2(t)v_1(t) + X_1(t)v_2(t) \\ + \frac{1}{2} X_-(t)v_1^2(t) + \frac{1}{2} X_0(t)v_1(t)v_2(t) + \frac{1}{2} X_+(t)v_2^2(t) = 0. \quad (14e)$$

(14a)–(14e) 式是在所选规范下,规范变换参数所满足的微分方程组。如果系数 $X_\nu(t)$ ($\nu = +, 0, -1, 2$) 及 $X(t)$ 的时间依赖关系给定,则可从该方程组解出满足初值(7)式的规范变换参数。在所取规范下,规范哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 变为

$$\hat{H}(t) = f(t)\hat{I}(0), \quad (15)$$

其中

$$\hat{I}(0) = \hat{k}_+ + \kappa\hat{k}_- = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \kappa \hat{q}^2, \quad (16a)$$

$$f(t) = X_+(t)\exp[-v_0(t)]. \quad (16b)$$

上面这种特殊的规范选择的优点在于规范变换下的 Cartan 算子 $\hat{I}$ 不显含时间而且具有简谐振子的标准形式。

动力学 Cartan 算子可由下式得出:

$$\hat{I}(t) = \hat{U}_g \hat{I}(0) \hat{U}_g^{-1} = \alpha_+ \hat{k}_+ + \alpha_0 \hat{k}_0 + \alpha_- \hat{k}_- + \alpha_1 \hat{k}_1 + \alpha_2 \hat{k}_2 + \delta, \quad (17)$$

1) 如果考虑规范变换 $\hat{U}_g = \exp[i\phi(t)]\exp[i\phi_1(t)\hat{k}_1]\exp[i\phi_2(t)\hat{k}_2]\exp[v_0(t)\hat{k}_0]\exp[i\phi_+(t)\hat{k}_+]$, 经过规范变换后,选 $Z_+ = Z_0 = Z_- = Z = 0, Z_1/Z_2 = i$, 则 $\hat{H} = Z_2(\hat{q} + i\hat{p}) = \sqrt{2}Z_2\hat{a}$, 利用与文献[1]中一样的方法,可求得相干态表象中的严格解。

其中系数 $\alpha_\nu(t)$ ($\nu = +, 0, -, 1, 2$) 及 $\delta(t)$ 由下式给出:

$$\alpha_+(t) = \exp[v_0(t)], \quad (18a)$$

$$\alpha_0(t) = -2i v_-(t) \exp[v_0(t)], \quad (18b)$$

$$\alpha_-(t) = v_-^2(t) \exp[v_0(t)] + \kappa \exp[-v_0(t)], \quad (18c)$$

$$\alpha_1(t) = \exp[v_0(t)] [-v_2(t) + v_-(t) v_1(t)], \quad (18d)$$

$$\alpha_2(t) = \exp[v_0(t)] v_-(t) v_2(t) - \{v_-^2(t) \exp[v_0(t)] + \kappa \exp[-v_0(t)]\} v_1(t), \quad (18e)$$

$$\delta(t) = v_2(t) \exp[v_0(t)] \left[\frac{1}{2} v_2(t) - v_-(t) v_1(t) \right] + \frac{1}{2} v_1^2(t) \{v_-^2(t) \exp[v_0(t)] + \kappa \exp[-v_0(t)]\}. \quad (18f)$$

容易验证, $\hat{f}(t)$ 为系统的不变量。利用方程 (12a) — (12f), 可以得到 α_+ , α_0 , α_- , α_1 及 α_2 的运动方程:

$$\dot{\alpha}_+(t) = X_0(t) \alpha_+(t) + i X_+(t) \alpha_0(t), \quad (19a)$$

$$\dot{\alpha}_0(t) = 2i X_-(t) \alpha_+(t) - 2i X_+(t) \alpha_-(t), \quad (19b)$$

$$\dot{\alpha}_-(t) = -X_0(t) \alpha_-(t) - i X_-(t) \alpha_0(t), \quad (19c)$$

$$\dot{\alpha}_1(t) = X_2(t) \alpha_+(t) + i \frac{1}{2} X_1(t) \alpha_0(t) + \frac{1}{2} X_0(t) \alpha_1(t) - X_+(t) \alpha_2(t), \quad (19d)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -i \frac{1}{2} X_2(t) \alpha_0(t) - X_1(t) \alpha_-(t) + X_-(t) \alpha_1(t) - \frac{1}{2} X_0(t) \alpha_2(t), \quad (19e)$$

(19a) — (19e) 式也可以从不变算子 $\hat{f}(t)$ 的运动方程 $\frac{\partial \hat{f}(t)}{\partial t} + i[\hat{H}(t), \hat{f}(t)] = 0$ 得到。与 v_ν 的非线性运动方程 (14a) — (14e) 相比, α_ν 的方程 (19a) — (19e) 实现了量子运动方程的线性化; 这是通过非线性变换 (18a) — (18f) 式实现的。现在, 讨论量子与经典之间的对应关系。系统的经典代数动力学可表述为

$$\frac{dk_\nu(q, p)}{dt} = \{k_\nu(q, p), H(q, p, t)\}, (\nu = -, 0, +, 1, 2), \quad (20)$$

其中经典哈密顿量和经典代数分别为

$$H(t) = X_+(t) k_+ + i X_0(t) k_0 + X_-(t) k_- + X_1(t) k_1 + X_2(t) k_2 + X(t), \quad (21)$$

$$k_+ = \frac{1}{2} p^2, k_0 = -\frac{i}{2} pq, k_- = \frac{1}{2} q^2, k_1 = p, k_2 = q, \quad (22a)$$

$$\{k_1, k_2\} = -1. \quad (22b)$$

在(22b)式中, $\{k_1, k_2\}$ 表示 k_1 与 k_2 之间的泊松括号。其它经典量之间的泊松括号可由(22a)和(22b)式得到。从上面的方程, 可以得到 $k_\nu(q, p)$ ($\nu = +, 0, -, 1, 2$) 的运动方程组, 即

$$\frac{dk_+}{dt} = -X_0(t) k_+ - 2i X_-(t) k_0 - X_2(t) k_1, \quad (23a)$$

$$\frac{dk_0}{dt} = -i X_+(t) k_+ + i X_-(t) k_- - i \frac{1}{2} X_1(t) k_1 + i \frac{1}{2} X_2(t) k_2, \quad (23b)$$

$$\frac{dk_-}{dt} = 2iX_+(t)k_0 + X_0(t)k_- + X_1(t)k_2 \quad (23c)$$

及

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{1}{2} X_0(t)k_1 - X_-(t)k_2 - X_2(t), \quad (24a)$$

$$\frac{dk_2}{dt} = X_+(t)k_1 + \frac{1}{2} X_0(t)k_2 + X_1(t). \quad (24b)$$

容易验证, 方程组 (23a)–(23c) 与 (24a), (24b) 并不相互独立, 从 (24a), (24b) 及 (22a) 式可以得到 (23a)–(23c) 式. 比较方程组 (24a), (24b) 与方程组 (14c), (14d), 可以得到下列重要的关系式:

$$v_1 = k_2 = q, \quad v_2 = k_1 = p, \quad (25)$$

其中 $k_v (v = 1, 2)$ 是方程组 (24a), (24b) 的实数解. 量子-经典对应关系 (25) 式表明, 规范变换参数 v_1 和 v_2 由系统的经典运动方程确定. 但是量子解的其它参数 v_0 和 v_- 却不能从经典解得到. 因此, $SU(1,1) \oplus h(3)$ 非半单线性系统失去了量子-经典之间的一一对应, 而 α_v 与 k_v 之间也失去了直接的对应. 这是由于不变算子 $\hat{I}$ 的结构常数矩阵不可能全部厄密化. 这自然是与 $SU(1,1) \oplus h(3)$ 的代数结构相关的. 下面将看到, 虽然上述直接的量子-经典对应丧失, 但仍存在间接的量子-经典对应. 通过变换

$$v_1(t) = \sqrt{X_+(t)}Q(t), \quad v_2(t) = \sqrt{X_-(t)}P(t), \quad (26)$$

方程组 (14c), (14d) 或 (24a), (24b) 还可以变为下列形式:

$$\ddot{Q}(t) + \eta_1(t)Q(t) = \mu_1(t), \quad (27a)$$

$$\ddot{P}(t) + \eta_2(t)P(t) = \mu_2(t), \quad (27b)$$

其中 η_i 与 μ_i 定义为

$$\eta_1(t) = \left[X_+X_- - \frac{1}{4} X_0^2 - \frac{X_+}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{X_0}{X_+} \right) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{X}_+}{X_+} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{X}_+}{X_+} \right)^2 \right], \quad (28a)$$

$$\eta_2(t) = \left[X_+X_- - \frac{1}{4} X_0^2 + \frac{X_-}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{X_0}{X_-} \right) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{X}_-}{X_-} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{X}_-}{X_-} \right)^2 \right] \quad (28b)$$

和

$$\mu_1(t) = \frac{1}{\sqrt{X_+}} \left[\frac{1}{2} X_0X_1 - X_+X_2 + X_+ \frac{d}{dt} \left(\frac{X_1}{X_+} \right) \right], \quad (29a)$$

$$\mu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{X_-}} \left[\frac{1}{2} X_0X_2 - X_-X_1 - X_- \frac{d}{dt} \left(\frac{X_2}{X_-} \right) \right]. \quad (29b)$$

如果系统的参数随时间经历周期性变化且具有相同周期, 即 $X_v(t+T) = X_v(t)$, 则方程 (27a) 和 (27b) 称为非齐次 Hill 方程. Hill 方程在加速器物理中有着非常广泛的应用^[10]. 若给定 $X_v(t)$ 的形式, 则 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 可由非齐次 Hill 方程 (27a), (27b) 的实解得到. 在给出薛定谔方程 (5) 的精确解之前, 首先讨论一下规范变换参数 $v_0(t)$ 及 $v_-(t)$ 的确定. 作变换

$$\alpha_+(t) = \frac{1}{2} \xi(t)\xi^*(t), \quad (30a)$$

$$\alpha_0(t) = -\frac{i}{2} [\xi(t)\xi^*(t) + \xi^*(t)\xi(t)], \quad (30b)$$

$$\alpha_-(t) = \frac{1}{2} \xi(t)\xi^*(t). \quad (30c)$$

利用 α_+ , α_0 及 α_- 的运动方程 (19a)–(19c), 可以得到 $\xi(t)$ 和 $\zeta(t)$ 所满足运动方程

$$\dot{\xi} = X_+\zeta + \frac{1}{2} X_0\xi, \quad (31a)$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{2} X_0\zeta - X_-\xi. \quad (31b)$$

可直接验证, 方程组 (19a)–(19c) 与 (31a), (31b) 是一致的. 而且 (31a), (31b) 式也与 (24a), (24b) 式的齐次方程一致. 这一点对于建立间接的量子-经典对应十分重要. 通过变换

$$\xi(t) = \sqrt{X_+(t)}\mathcal{E}(t), \quad \zeta(t) = \sqrt{X_-(t)}\Pi(t), \quad (32)$$

方程组 (31a), (31b) 还可以变成下面的形式:

$$\ddot{\mathcal{E}}(t) + \eta_1(t)\mathcal{E}(t) = 0, \quad (33a)$$

$$\ddot{\Pi}(t) + \eta_2(t)\Pi(t) = 0, \quad (33b)$$

其中 $\eta_1(t)$ 及 $\eta_2(t)$ 由 (28a), (28b) 式给出. 显然, (33a), (33b) 式正好是 (27a), (27b) 式的齐次方程. 可见, 规范变换参数 $\nu_0(t)$ 与 $\nu_-(t)$ 可由 (27a), (27b) 式的齐次方程的复数解确定, 即

$$\nu_0 = \ln \left[\frac{1}{2} |\xi(t)|^2 \right] = \ln \left[\frac{X_+}{2} |\mathcal{E}(t)|^2 \right], \quad (34a)$$

$$\nu_- = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^* + \left(\frac{\zeta}{\xi} \right) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{X_-}{X_+}} \left[\left(\frac{\Pi}{\mathcal{E}} \right)^* + \left(\frac{\Pi}{\mathcal{E}} \right) \right]. \quad (34b)$$

在文献[9]中已经指出, 方程 (33a), (33b) 的复数解是必要的, 其物理内含在于反映了无穷多个连续的经典轨道对应于一个量子运动. 总之, 以上的讨论建立起该系统的量子解与经典解之间的一种新的间接对应关系: 经典运动方程 (24a), (24b) 的齐次方程 (31a), (31b) 的无穷多个连续的经典轨道对应一组量子解中的 α_+ , α_0 , α_- ; 而经典运动方程 (24a), (24b) 的非齐次解对应于量子解中的 ν_1 和 ν_2 (通过 (18a)–(18f) 式给出 α_1 和 α_2). 文献[9]中 $SU(1,1)$ 系统的直接的量子-经典对应与本文的间接的量子-经典对应有一个共同点: 无穷多个连续的经典轨道仅对应于一个量子解. 对于 $SU(1,1) \oplus \hbar(3)$, 由于经典运动方程的非齐次性, 经典解 (k_1, k_2) 与量子解 (ν_1, ν_2) 有一一对应, 只有求助于经典非齐次运动方程的齐次解, 才能实现完全的经典-量子的多一对应.

下面将继续利用代数动力学方法以求出所研究系统的精确解. 首先, 考虑不变 Cartan 算子 $I(t) = \hat{U}_g \hat{I}(0) \hat{U}_g^{-1}$ 的本征值问题. 令 $|n\rangle$ 表示算子 $\hat{I}(0)$ 的本征态, 则有

$$\hat{I}(0)|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 |n\rangle, \quad (35)$$

其中 $\omega_0^2 = \kappa$. 算子 $I(t)$ 的本征值问题可表述为

$$I(t)\hat{U}_g|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \hat{U}_g|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 |\phi_n(t)\rangle, \quad (36)$$

其中 $|\phi_n(t)\rangle = \hat{U}_s|n\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的本征态, 相应的本征值为 $(n + \frac{1}{2})\omega_0$.

在规范条件(13)式下, 规范薛定谔方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}(t)\rangle = f(t)\hat{I}(0)|\bar{\Psi}(t)\rangle, \quad (37)$$

它具有以下形式的解:

$$|\bar{\Psi}_n(t)\rangle = \exp[i\Theta_n(t)]|n\rangle, \quad (38)$$

其中

$$\Theta_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (39)$$

$f(t)$ 由(16b)式定义. 在 q 表象中, 上述解 $|\bar{\Psi}_n(t)\rangle$ 取下列形式:

$$\bar{\Psi}_n(t) = N_n(\alpha) \exp[i\Theta_n(t)] \exp[-(\alpha q)^2/2] H_n(\alpha q), \quad (40)$$

其中 $N_n(\alpha) = [\alpha/\sqrt{\pi} 2^n n!]^{1/2}$ 为归一化常数, $\alpha^2 = \omega_0 = \sqrt{\kappa}$, $H_n(\alpha q)$ 是 n 阶厄密特多项式. 利用关系式

$$\exp[v_0 \hat{k}_0] F(q) = \exp(-v_0/4) F(e^{-v_0/2} q), \quad (41a)$$

$$\exp[-i v_1 \hat{p}] F(q) = F(q - v_1), \quad (41b)$$

可得到系统的正交非绝热基矢, 即方程(5)式的精确解

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= \hat{U}_s \bar{\Psi}_n(t) \\ &= \exp[i\Theta_n(t)] \phi_n(t) \\ &= N_n(\chi\alpha) \exp\{i[\Theta_n(t) + v(t)]\} \exp\left\{i\left[\frac{1}{2} v_-(q - v_1)^2 + v_2 q\right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2} [\chi\alpha(q - v_1)]^2\right\} H_n(\chi\alpha q - \chi\alpha v_1), \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $\chi = \exp[-v_0/2]$ 可由经典运动方程 (33a), (33b) 确定. (42) 式描述一个在随时间不断伸缩且原点不断移动的坐标系中的准谐振子的运动, 但具有一个集体速度势

$$\left\{\frac{1}{2} v_-(t)[q - v_1(t)]^2 + v_2(t)q\right\}$$

和一个时间有关的相关因子. $\Psi_n(t)$ 是 Hilbert 空间的活动正交基矢, 很象微分几何中的活动标架. 非绝热能级可由下式求出:

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \langle \Psi_n | \hat{H}(t) | \Psi_n \rangle \\ &= \langle \bar{\Psi}_n | \hat{U}_s^{-1} \hat{H} \hat{U}_s | \bar{\Psi}_n \rangle \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left\{ \omega_0 f(t) - \frac{\dot{v}_-(t) \exp[v_0(t)]}{2\alpha^2} \right\} - v_1(t) \dot{v}_2(t) - \dot{v}(t). \end{aligned} \quad (43)$$

薛定谔方程(5)的一般解可以用正交非绝热基矢来展开, 即

$$\Psi(t) = \sum_n C_n \Psi_n(t) = \sum_n C_n \exp[i\Theta_n(t)] \phi_n(t), \quad (44)$$

其中 C_n 与时间无关, 仅由初始条件决定, 而系统随时间演化的所有动力学信息均包含在相关因子 $\Theta_n(t)$ 和不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的本征函数 $\phi_n(t)$ 中. 不难证明, 不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的量子力学平均值是一个运动常量

$$\langle \Psi(t) | \hat{f}(t) | \Psi(t) \rangle = \sum_n |C_n|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_n. \quad (45)$$

现在计算所研究的系统的 Berry 相因子。假设参数 $X_n(t)$ 与 $X(t)$ 均是时间的周期函数, 且具有相同的周期 T , 那么规范变换参数 $v_n(t)$ 及 $v(t)$ 可具有周期解。对于周期解, 经过一个周期的演化, 系统将回到与初态仅相差一个总相因子的状态。这个总相因子为

$$\phi_t = \Theta_n(T) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \int_0^T f(t) dt, \quad (46)$$

一个周期的动力学相因子为

$$\phi_d = \int_0^T E_n(t) dt = \int_0^T \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\omega_0 f(t) - \frac{\dot{v}_-(t) \exp[v_0(t)]}{2\alpha^2} \right] - v_1 \dot{v}_2 \right\} dt, \quad (47)$$

于是非绝热的 Berry 相因子^[10]由下式给出:

$$\phi_B = \phi_t + \phi_d = - \int_0^T \left\{ v_1 \dot{v}_2 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\dot{v}_-(t) \exp[v_0(t)]}{2\alpha^2} \right\} dt. \quad (48)$$

最后简单讨论一下规范变换与时间演化算子的联系。由薛定谔方程的一般解(44)式, 容易写出系统的时间演化算子

$$\hat{U}_T(t) = \hat{U}_S(t) \exp \left[-i \int_0^t f(\tau) (\hat{k}_+ + \kappa \hat{k}_-) d\tau \right], \quad (49)$$

其中 $\hat{U}_S(t)$ 是特殊规范(13)式下且满足初值(7)式的规范变换算子。显然, 薛定谔方程的一般解可写为

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_T(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (50a)$$

其中

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle. \quad (50b)$$

对于一般情形, 从时间演化算子的运动方程 $i \frac{\partial \hat{U}_T}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}_T$ 可得

$$\hat{H}(t) = \hat{U}_T^{-1} \hat{H} \hat{U}_T - i \hat{U}_T^{-1} \frac{\partial \hat{U}_T}{\partial t} = 0. \quad (51)$$

因此, 时间演化算子是规范变换方法中 $\hat{H}(t) = 0$ 时的特例。而规范变换却具有更大的选择灵活性, 可把量子解的参数数目减至最少。

到此为止, 已经得到了 $SU(1,1) \oplus \mathfrak{h}(3)$ 线性非自治量子系统的精确解。从文中的讨论可以看出, 代数动力学的意义在于将静态的代数方法与动力学结合起来。一方面, 在静态的代数方法中引进了动力学和时间演化的概念; 另一方面, 在动力学问题中引入了代数方法。与时间演化算子方法相比较, 代数动力学方法有其独特的优越性:

1. 能够清楚地反映出动力学系统的代数结构。
2. 通过规范变换求解动力学问题, 允许选择不同的规范条件, 把量子解的参数数目减至最少, 从而使问题的求解得以最大程度的简化, 并求得不同表象中的严格解。
3. 容易寻找和计算非自治动力学系统的不变 Cartan 算子, 而不变 Cartan 算子反映了动力系统代数结构上的某些对称性质。
4. 把量子运动方程线性化, 建立起奇特的量子-经典对应关系, 使对量子系统的求解

最终转化为对经典运动方程的求解。

本文的研究表明,代数动力学的基本方法,如规范变换、不变算子与动力学对称性、时间有关的正交表象、运动方程的线性化等等,都可以推广到本文所讨论的非半单李代数系统。但量子解与经典解之间失去直接的对应,这是由于 $SU(1,1) \oplus \mathfrak{h}(3)$ 存在理想 $\mathfrak{h}(3)$, 而不变算子的运动方程涉及的结构常数矩阵不可能全部厄密化。有趣的是,该系统虽然没有直接的量子-经典对应,但有间接的对应: 经典非齐次方程的齐次解(无穷多个)和非齐次解一起与量子解相对应。对于这种间接的量子-经典对应的物理数学含义,有待于进一步深入研究。

- [1] 左 维、王顺金,量子辐射场与经典流的相互作用—— $\mathfrak{hw}(4)$ 线性非自治量子系统的代数动力学求解,本刊本期。
- [2] A. Tartaglia, *Lett. Nuovo Cimento*, **19**(1977), 205.
- [3] D. C. Khandekar and S. V. Lawande, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 1870.
- [4] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Phys. Rev.*, **A20**(1979), 550.
- [5] Bin-kang Cheng, *Phys. Lett.*, **A113**(1985), 293.
- [6] Y. Ben-Aryeh and A. Mann, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 1020.
- [7] S. J. Wang, F. L. Li and A. Weiguny, *Phys. Lett.*, **A180**(1993), 189.
- [8] E. D. Courant and H. S. Snyder, *Ann. Phys.*, **3**(1958), 1.
- [9] 左 维、王顺金,物理学报, **44**(1995), 1177.
- [10] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1593.

INTERACTION OF A GENERALIZED TIME-DEPENDENT HARMONIC OSCILLATOR WITH AN EXTERNAL FIELD

EXACT SOLUTION OF THE LINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEM
WITH $SU(1,1) \oplus \mathfrak{h}(3)$ DYNAMICAL ALGEBRA

ZUO WEI

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou 730000)

WANG SHUN-JIN

(Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730001)

(Received 8 June 1994)

ABSTRACT

The exact solution and the invariant Cartan operator of the linear nonautonomous system with $SU(1,1) \oplus \mathfrak{h}(3)$ dynamical algebra are obtained by using the method of algebraic dynamics. A novel and indirect correspondence relation between the classical solution and the quantum solution has been found. It has also been shown that the algebraic dynamics is applicable to the linear dynamic system with a general Lie algebra.

PACC: 0220