第 44 卷 第 9 期 物 理 学 报 Vol. 44, No. 9
1995 年 9 月 ACTA PHYSICA SINICA Sep., 1995

# 量子辐射场与经典流的相互作用*

## $h\omega(4)$ 线性非自治量子系统的代数动力学求解

左 维
(中国科学院近代物理研究所，兰州 730000)

王 顺 金
(兰州大学现代物理系，兰州 730001)

(1994 年 6 月 8 日收到)

利用代数动力学方法，分别在两种不同的规范条件下，得到了描述量子辐射场与经典流相互作用的 $hw(4)$ 线性非自治量子系统在谐振子表象和相干态表象中的精确解及其 Cartan 不变算子，建立和澄清了量子解与经典解之间存在的直接对应的规则。结果表明代数动力学方法对于具有非半单李代数结构的线性动力系统仍然适用。

**PACC:** 0220

我们运用代数动力学方法[1]成功地研究了线性非自治半单李代数动力系统的求解问题。对于 $SU(1,1)$[2]，$SU(2)$[3] 和 $SP(4)$[4] 线性动力系统，求得了量子运动方程的解析解，揭示了深刻的量子-经典对应。代数动力学方法的优点在于：1)能有效地表述和研究非自治系统的非平凡的时间有关的动力学对称性并在求解中充分利用这种对称性；2)运用规范变换可以方便地求得系统在各种可能表象中的解析解；3)把量子解所需的参数数目减到最小(等于代数的阶与 Cartan 算子数之差)，并把量子解的运动方程线性化；4)能清晰地揭示出量子-经典对应。本文的目的是尝试把代数动力学方法从半单李代数动力系统推广到非半单李代数动力系统。而 Heisenberg-Weyl ($hw(4)$) 线性非自治系统是最简单的一般李代数系统之一。

对具有 $hw(4)$ 代数结构的线性非自治量子系统的研究在物理学中一直是一个深受重视的课题[5]。一方面，这类系统具有简单的代数结构；另一方面，它可以用来描述时间有关的经典流与量子化辐射场的相互作用[6]或多光子过程[7]。本文采用代数动力学方法[1]，分别在两种不同的规范选择下，给出了 $hw(4)$ 线性非自治量子系统的精确解的解析表达式，并建立和澄清了量子解与经典解之间的对应关系。

具有 $hw(4)$ 代数结构的线性非自治量子系统的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \Omega^{*}(t)\hat{a}^{\dagger} + \Omega(t)\hat{a} = \omega(t)\hat{N} + \Omega^{*}(t)\hat{a}^{\dagger} + \Omega(t)\hat{a}, \tag{1}$$

* 国家自然科学基金及高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题。

其中 $\omega(t)$ 与 $\Omega(t)$ 分别为时间有关的非奇异实系数和复系数. 粒子数算符 $\hat{N}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$,粒子的产生、湮没算符 $\hat{a}^{\dagger}$ 和 $\hat{a}$ 以及 1 构成 $hw(4)$ 代数,其生成元之间满足下列对易关系:

$$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1,\ [\hat{N},\hat{a}^{\dagger}]=\hat{a}^{\dagger},\ [\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}. \tag{2}$$

而 $hw(4)$ 可分解为 $U(1)=\{\hat{N}\}$ 和 $h(3)=\{\hat{a}^{\dagger},\hat{a},1\}$的半直和,即

$$hw(4)=U(1)\oplus h(3). \tag{3}$$

由于 $h(3)$ 是 $hw(4)$ 的理想,并且可解, 故 $h(3)$ 也是 $hw(4)$ 的根基 $R(=h(3))$. 于是, $hw(4)$ 的分解可表示为

$$hw(4)=U(1)\oplus R, \tag{4}$$

因而, $hw(4)$ 是一般李代数. (1)式的一个特例可以写为

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\omega(\hat{p}^2+\hat{q}^2)+eE(t)\hat{q} \tag{5}$$

描述变频振子与外电场的相互作用.

系统随时间的演化由下列时间相关的薛定谔方程决定:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle=\hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{6}$$

其中已取自然单位 ($\hbar=1$). 方程 (6) 可以用时间演化算子方法和 Magnus 展开求解[8-10]. 但这种解法的缺点是: 1)没有求出系统的动力学不变算子; 2)除谐振子表象中的解外,没有得到相干态表象中的解;3)时间演化算子所含参数的个数往往大于系统的解所必须的最小参数的数目; 4)时间演化算子的参数的运动方程是非线性的, 不能揭示量子-经典对应.

为了用代数动力学方法求解薛定谔方程(6),引进规范变换 $\hat{U}_g(t)$

$$\hat{U}_g(t)=\exp[v_1(t)\hat{a}]\exp[v_2(t)\hat{a}^{\dagger}]\exp[v_3(t)\hat{N}]\exp[v_4(t)], \tag{7}$$

其中 $v_i(t)(i=1,2,3,4)$ 均为时间有关的复参数. 经过规范变换,薛定谔方程(6)变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle=\hat{H}(t)|\Phi(t)\rangle, \tag{8}$$

其中规范哈密顿 $\hat{H}(t)$ 与规范波函数 $|\Phi(t)\rangle$ 分别由下式定义:

$$\hat{H}(t)=\hat{U}_g^{-1}\hat{H}(t)\hat{U}_g-\mathrm{i}\hat{U}_g^{-1}\frac{\partial\hat{U}_g}{\partial t}, \tag{9}$$

$$|\Phi(t)\rangle=\hat{U}_g^{-1}|\Psi(t)\rangle. \tag{10}$$

将(1)式代入(9)式,经过一些计算,可得到规范哈密顿量 $\hat{H}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\hat{H}(t)=&(\omega-\mathrm{i}\dot{v}_3)\hat{N}+(\Omega^*+\omega v_2-\mathrm{i}\dot{v}_2)e^{-v_3}\hat{a}^{\dagger}\\&+(\Omega-\omega v_1-\mathrm{i}\dot{v}_1)e^{v_3}\hat{a}+(\Omega v_2-\Omega^*v_1-v_1v_2\omega-\mathrm{i}\dot{v}_1v_2-\mathrm{i}\dot{v}_4).\end{aligned} \tag{11}$$

在文献[1]中已经指出,代数动力学的特点之一就在于它允许我们根据需要选择适当的规范对问题进行求解,以简化计算. 我们将在两种不同的规范选择下, 对薛定谔方程(6)进行精确求解. 这两种不同的规范导致两种不同表象(谐振子表象与相干态表象)中的精确解. 首先,考虑第一种规范条件,即通过选择规范变换参数 $v_i(t)(i=1,2,3,4)$,使得

$$v_3(t)=0, \tag{12a}$$

$$\dot{v}_2(t)+\mathrm{i}\omega(t)v_2(t)+\mathrm{i}\Omega^*(t)=0, \tag{12b}$$

$$\dot{v}_1(t)-\mathrm{i}\omega(t)v_1(t)+\mathrm{i}\Omega(t)=0, \tag{12c}$$

$$\dot{v}_4(t)+\dot{v}_1(t)v_2(t)+\mathrm{i}\Omega(t)v_2(t)-\mathrm{i}\Omega^*(t)v_1(t)-\mathrm{i}\omega(t)v_1(t)v_2(t)=0. \tag{12d}$$

在代数动力学框架内，规范变换参数 $v_i(t)$ 可取任意初值．为方便起见，取初值 $\hat{U}_g(t=0)=1$，即

$$v_1(t=0)=0,\ v_2(t=0)=0,\ v_4(t=0)=0, \tag{13}$$

则由方程（12a）—（12d）可解出 $v_i(t)$，即

$$v_1(t)=-\mathrm{i}\exp\left[\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\int_0^t\Omega(\tau_1)\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^{\tau_1}\omega(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1, \tag{14a}$$

$$v_2(t)=-\mathrm{i}\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\int_0^t\Omega^*(\tau_1)\exp\left[\mathrm{i}\int_0^{\tau_1}\omega(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1, \tag{14b}$$

$$v_4(t)=\mathrm{i}\int_0^t\Omega^*(\tau)v_1(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{14c}$$

显然

$$v_1(t)=-v_2^*(t)\equiv v(t). \tag{15}$$

（14a）—（14c）式是在所选规范下，规范变换参数的积分表达式．如果系数 $\omega(t)$及 $\Omega(t)$的时间依赖关系给定，则不难由（14a）—（14c）式求出规范变换参数．令

$$\gamma(t)=\Omega(t)\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \tag{16a}$$

$$\chi(t)=-\mathrm{i}\int_0^t\gamma^*(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{16b}$$

则（14a）—（14c）式可以表示成更为紧凑的形式

$$v_1(t)=v(t)=-\frac{\gamma^*(t)\chi^*(t)}{\Omega^*(t)}, \tag{17a}$$

$$v_2(t)=-v^*(t)=\frac{\gamma(t)\chi(t)}{\Omega(t)}, \tag{17b}$$

$$v_4(t)=-\mathrm{i}\int_0^t\gamma^*(\tau)\chi^*(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{17c}$$

利用(15)式及下列代数关系式：

$$\exp[-v_2(t)\hat{a}^\dagger]\exp[v_1(t)\hat{a}]\exp[v_2(t)\hat{a}^\dagger]=\exp[v_1(t)\hat{a}]\exp[v_1(t)v_2(t)], \tag{18}$$

可将规范变换 $\hat{U}_g(t)$ 写为

$$\hat{U}_g(t)=\exp[-v^*(t)\hat{a}^\dagger]\exp[v(t)\hat{a}]\exp\left[-\frac{1}{2}|\chi(t)|^2\right]\exp\left[-\mathrm{i}\ \mathrm{Re}\int_0^t\gamma(\tau)\chi(\tau)\right]\mathrm{d}\tau.$$

$$=\exp[-v^*(t)\hat{a}^\dagger+v(t)\hat{a}]\exp\left[-\mathrm{i}\ \mathrm{Re}\int_0^t\gamma(\tau)\chi(\tau)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

从(19)式可以看出，现在所取的规范变换是幺正的．在所取规范下，规范哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 变为

$$\hat{H}(t)=\omega(t)\hat{I}(0), \tag{20}$$

其中

$$\hat{H}(0)=\hat{N}. \tag{21}$$

(20)式表明，在上述这种特殊的规范选择下，Cartan 算子 $\hat{I}$ 不显含时间而且正好就是

粒子数算符. 因此,这种规范对应于谐振子表象.

动力学 Cartan 算子可由下式得出:

$$\hat{I}(t)=\hat{U}_g\hat{I}(0)\hat{U}_g^{-1}=\hat{N}+\alpha(t)\hat{a}+\alpha^*(t)\hat{a}^\dagger+\delta(t), \tag{22}$$

其中系数 $\alpha$ 及 $\delta$ 由下式给出:

$$\alpha(t)=v_1(t)=v(t),\ \alpha^*(t)=-v_2(t)=v^*(t),\ \delta(t)=|\chi(t)|^2. \tag{23}$$

容易验证, $\hat{I}(t)$ 为系统的动力学不变量. $\alpha(t)$的运动方程为

$$\dot{\alpha}(t)=\mathrm{i}\omega(t)\alpha(t)-\mathrm{i}\Omega(t), \tag{24a}$$

$$\dot{\alpha}^*(t)=-\mathrm{i}\omega(t)\alpha^*(t)+\mathrm{i}\Omega^*(t). \tag{24b}$$

$\alpha(t)$ 满足初值条件 $\alpha(t=0)=0$. (24a)和(24b)式也可以从不变算子 $\hat{I}(t)$ 的运动方程 $\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}+\mathrm{i}[\hat{H}(t),\hat{I}(t)]=0$ 得到. 现在讨论量子解与经典解之间的对应关系. 系统的经典代数动力学可表述为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\{a,H(a,a^*,t)\},\ \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}t}=\{a^*,H(a,a^*,t)\}, \tag{25}$$

其中$\{\cdots,\cdots\}$表示泊松括号. 与(2)式对应的泊松括号为

$$\{a,a^*\}=-\mathrm{i},\ \{N,a\}=\mathrm{i}a,\ \{N,a^*\}=-\mathrm{i}a^*. \tag{26}$$

经典哈密顿量为

$$H(t)=\omega(t)N+\Omega^*(t)a^*+\Omega(t)a,\ N=a^*a. \tag{27}$$

从以上方程,可以得到系统的经典动力学方程,即

$$\dot{a}(t)=\{a(t),\ H(t)\}=-\mathrm{i}\omega(t)a(t)-\mathrm{i}\Omega^*(t), \tag{28a}$$

$$\dot{a}^*(t)=\{a^*(t),\ H(t)\}=\mathrm{i}\omega(t)a^*(t)+\mathrm{i}\Omega(t). \tag{28b}$$

比较方程(28a),(28b)与方程(24a),(24b),可以得到下列重要的经典-量子对应关系式:

$$\alpha=v_1=-a^*,\ \alpha^*=-v_2=-a, \tag{29a}$$

$$\hat{I}(t)=\hat{N}-a^*\hat{a}-a\hat{a}^\dagger+\delta. \tag{29b}$$

作为一般李代数的 $hw(4)$, 得到这种直接而漂亮的量子-经典对应是难得的[1]. 其原因, 从数学上讲,不变算子的运动方程涉及的结构常数矩阵是厄密的, 根据文献[1]应有直接的量子-经典对应. 从物理上讲,不变算子 $\hat{I}$ 涉及的代数动力学自由度与 $\hat{a}^\dagger$ 及 $\hat{a}$ 对应, 其经典对应正好是相空间中 $p$ 和 $q$ 的运动方程. 换句话说, 对不变算子 $\hat{I}$ 而言, $hw(4)$ 代数的子代数 $\hat{N}$ 的自由度被冻结, $hw(4)$ 约化为 $h(3)$, 因而产生上述直接而漂亮的量子-经典一一对应.

上面讨论了量子解与经典解之间的对应关系, 下面将继续利用代数动力学方法以求出所研究系统的精确解. 首先, 考虑不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)=\hat{U}_g\hat{I}(0)\hat{U}_g^{-1}$ 的本征值问题. 令 $|n\rangle$ 表示算子 $\hat{I}(0)=\hat{N}$ 的本征态(谐振子本征态),即

$$\hat{I}(0)|n\rangle=n|n\rangle, \tag{30}$$

则不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的本征值问题可表述为

$$\hat{I}(t)\hat{U}_g|n\rangle=n\hat{U}_g|n\rangle=n|\phi_n(t)\rangle, \tag{31}$$

其中 $|\phi_n(t)\rangle=\hat{U}_g|n\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的本征态, 相应的本征值为 $n$. 利用 $\hat{U}_g$ 的表达式(19), 可计算出本征态$|\phi_n(t)\rangle$的具体表达式,即

$$|\phi_n(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}(m-n)\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sqrt{\frac{n!}{m!}}\,[\chi(t)]^{(m-n)}\mathrm{L}_n^{m-n}(|\chi(t)|^2)$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}|\chi(t)|^2\right]\exp\left[-\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\int_0^t \gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]|m\rangle, \tag{32}$$

其中 $\mathrm{L}_n^{m-n}(|\chi(t)|^2)$ 为拉盖尔多项式. 应当注意到在上式对 $m$ 的求和中，暗含了这样的假定：所有的阶乘因子(包括 $\mathrm{L}_n^{m-n}(|\chi(t)|^2)$ 中的阶乘因子)的宗量必须大于或等于零.

在规范条件(12a)—(12d)式下，规范薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \omega(t)\hat{I}(0)|\Psi(t)\rangle, \tag{33}$$

它具有下列形式的解：

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp[\mathrm{i}\Theta_n(t)]|n\rangle, \tag{34}$$

其中

$$\Theta_n(t) = -n\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{35}$$

由(10)式，可以得到系统的正交非绝热基矢，即薛定谔方程(6)的一个精确解

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp[\mathrm{i}\Theta_n(t)]|\phi_n(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\exp\left[-\mathrm{i}m\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\exp\left[-\frac{1}{2}|\chi(t)|^2\right]$$
$$\times \exp\left[-\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\int_0^t \gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sqrt{\frac{n!}{m!}}\,[\chi(t)]^{(m-n)}\mathrm{L}_n^{m-n}(|\chi(t)|^2)|m\rangle. \tag{36}$$

系统的非绝热能级可由下式给出：

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \langle\Psi_n|\hat{H}(t)|\Psi_n\rangle \\ &= \langle\Psi_n|\hat{U}_g^{-1}\hat{H}\hat{U}_g|\Psi_n\rangle \\ &= n\omega(t) + |\chi(t)|^2\omega(t) + 2\mathrm{Re}[\chi(t)\gamma(t)]. \end{aligned} \tag{37}$$

薛定谔方程(6)的一般解可以用正交非绝热基矢来展开，即

$$\Psi(t) = \sum_n C_n\Psi_n(t) = \sum_n C_n\exp[\mathrm{i}\Theta_n(t)]\phi_n(t), \tag{38}$$

其中 $C_n$ 与时间无关，仅由系统初始所处状态决定，而系统随时间演化的所有动力学信息均包含在相因子 $\Theta_n(t)$ 和不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的本征函数 $\phi_n(t)$ 中. 不难证明，不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的量子力学平均值是一个运动常量

$$\langle\Psi(t)|\hat{I}(t)|\Psi(t)\rangle = \sum_n n|C_n|^2. \tag{39}$$

至此已经给出了具有 $hw(4)$ 代数结构的线性动力系统一般解的精确解析表达式. 下面讨论几种特殊情形：

1. 初态为粒子数算符 $\hat{N}$ 的任一本征态，即 $|\Psi(t=0)\rangle = |n\rangle$. 此时，薛定谔方程的解为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\exp\left[-\mathrm{i}m\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\exp\left[-\frac{1}{2}|\chi(t)|^2\right]$$
$$\times \exp\left[-\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\int_0^t \gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sqrt{\frac{n!}{m!}}\,[\chi(t)]^{(m-n)}\mathrm{L}_n^{m-n}(|\chi(t)|^2)|m\rangle. \tag{40}$$

这与文献[8]中给出的结果一致.

2. $|\Psi(t=0)\rangle=|n\rangle$, 且 $\omega=\mathrm{const}$, $\Omega^*=\Omega=\mathrm{const}$. 此时, 系统随时间演化的波函数为

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\exp[-\mathrm{i}n\omega t]\exp\left[-\frac{1}{2}|\beta(t)|^2\right]\exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega}{2}\int_0^t|\beta(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right]$$
$$\times\sqrt{\frac{n!}{m!}}[\beta(t)]^{(m-n)}\mathrm{L}_n^{m-n}(|\beta(t)|^2)|m\rangle, \tag{41}$$

其中

$$\beta(t)=-\mathrm{i}\left[\Omega\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2}\right]\exp[-\mathrm{i}\omega t/2]. \tag{42}$$

3. $|\Psi(t=0)\rangle=|0\rangle$, 且 $\omega=\mathrm{const}$, $\Omega^*=\Omega=\mathrm{const}$. 此时, 系统随时间演化的波函数为

$$\Psi(t)\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\beta(t)]^m}{\sqrt{m!}}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega}{2}\int_0^t|\beta(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right]\exp\left[-\frac{1}{2}|\beta(t)|^2\right]|m\rangle. \tag{43}$$

前面已经指出, 在代数动力学框架内, 可以根据需要选择适当的规范对问题进行求解. 为说明这一点,下面考虑第二种规范条件,即选择规范变换参数 $v_i(t)(i=1,2,3,4)$, 使得

$$v_1(t)=0, \tag{44a}$$
$$\dot{v}_2(t)+\mathrm{i}\omega(t)v_2(t)+\mathrm{i}\Omega^*(t)=0, \tag{44b}$$
$$\dot{v}_3(t)+\mathrm{i}\omega(t)=0, \tag{44c}$$
$$\dot{v}_4(t)+\mathrm{i}\Omega(t)v_2(t)=0. \tag{44d}$$

取初值 $\hat{U}_g(t=0)=1$, 即

$$v_2(t=0)=0,\ v_3(t=0)=0,\ v_4(t=0)=0, \tag{45}$$

则由方程 (44a)—(44d) 可以解出 $v_i(t)(i=2,3,4)$ 的表达式

$$v_2(t)=\frac{\gamma(t)\chi(t)}{\Omega(t)}, \tag{46a}$$

$$v_3(t)=-\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{46b}$$

$$v_4(t)=-\mathrm{i}\int_0^t\gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{46c}$$

其中 $\gamma$ 及 $\chi$ 由 (16a),(16b) 式定义. (46a)—(46c) 式就是在第二种规范下, 规范变换参数的积分表达式. 如果系数 $\omega(t)$ 及 $\Omega(t)$ 的时间依赖关系给定, 则很容易由 (46a)—(46c)式求出规范变换参数. 于是在第二种规范下,规范变换 $\hat{U}_g(t)$ 为

$$\hat{U}_g(t)=\exp\left[\frac{\gamma(t)\chi(t)}{\Omega(t)}\hat{a}^\dagger\right]\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\hat{N}\right]\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]. \tag{47}$$

在所取规范下,规范哈密顿量 $\bar{H}(t)$ 变为

$$\bar{H}(t)=f(t)\hat{I}(0), \tag{48}$$

其中

$$f(t)=\Omega(t)\exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\gamma(t), \tag{49a}$$

$$\hat{I}(0) = \hat{a}. \tag{49b}$$

(48)式表明，在上述这种特殊的规范选择下，Cartan 算子 $\hat{I}$ 不显含时间而且正好就是湮没算子 $\hat{a}$. 因此，这种规范对应的是相干态表象.

应当指出，第二种规范对应的规范变换 $\hat{U}_g(t)$，即(47)式，是非幺正的. 而规范哈密顿量 $\hat{H}(t)$，即(48)式，是非厄密的. 但是规范变换只是求解问题的一种手段，一种表象的选择，而物理问题(1)和(6)式的解自然与规范(表象)的选取无关.

不变 Cartan 算子由下式给出:

$$\hat{I}(t) = \hat{U}_g \hat{I}(0) \hat{U}_g^{-1} = -\frac{1}{\chi^*(t)} [\alpha(t)\hat{a} + \delta(t)], \tag{50}$$

其中系数 $\alpha$ 及 $\delta$ 定义为

$$\alpha(t) = -\frac{\gamma^*(t)\chi^*(t)}{\Omega^*(t)}, \quad \delta(t) = |\chi(t)|^2. \tag{51}$$

(50)式表明 $\hat{I}(t)$ 在 $h(3)$ 代数子空间运动，$hw(4)$ 的子代数 $\hat{N}$ 冻结，自然会导致直接的量子-经典一一对应. 不难验证，$\hat{I}(t)$ 为系统的不变量. $\alpha(t)$满足下列运动方程:

$$\dot{\alpha}(t) = \mathrm{i}\omega(t)\alpha(t) - \mathrm{i}\Omega(t), \tag{52}$$

(52)式也可以从不变算子 $\hat{I}(t)$ 的运动方程 $\frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} + \mathrm{i}[\hat{H}(t), \hat{I}(t)] = 0$ 得到. 通过比较方程(52)与(28b)，可以得到与前面类似的经典-量子一一对应关系

$$\alpha = -a^*, \quad \alpha^* = -a. \tag{53}$$

下面将给出所研究系统在相干态表象中的精确解. 与前面的作法类似，令$|\lambda\rangle$表示算子 $\hat{I}(0) = \hat{a}$ 的本征态，即

$$\hat{I}(0)|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \tag{54a}$$

其中 $\lambda$ 为本征值. $\hat{I}(0)$ 的本征态$|\lambda\rangle$为相干态，可表示为

$$|\lambda\rangle = \exp[\lambda\hat{a}^\dagger - \lambda^*\hat{a}]|0\rangle = N_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = N_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \tag{54b}$$

其中 $N_\lambda = \exp[-|\lambda|^2/2]$ 为归一化常数. 不变 Cartan 算子 $\hat{I}(t)$ 的本征值问题可表述为

$$\hat{I}(t)|\phi_\lambda(t)\rangle = \lambda|\phi_\lambda(t)\rangle, \tag{55}$$

其中 $|\phi_\lambda(t)\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的本征态，可表示为

$$|\phi_\lambda(t)\rangle = \hat{U}_g|\lambda\rangle = N_\lambda \exp\left[-\mathrm{i}\int_0^t \chi(\tau)\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}n\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \times \left[\frac{\gamma(t)\chi(t)}{\Omega(t)}\right]^m \frac{1}{m!}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}|n+m\rangle, \tag{56}$$

$\lambda$ 为相应的本征值. 本征态 $|\phi_\lambda(t)\rangle$ 还可表示为另一种紧凑的形式，即

$$|\phi_\lambda(t)\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}[|\Lambda(t)|^2 - |\lambda|^2]\right\}\exp\left\{-\mathrm{i}\int_0^t \gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}|\Lambda(t)\rangle. \tag{57}$$

在(57)式中，$|\Lambda(t)\rangle$ 是本征值为 $\Lambda(t)$ 的相干态 ($\hat{a}$ 的本征态)，即

$$|\Lambda(t)\rangle = \exp[\Lambda(t)\hat{a}^\dagger - \Lambda^*(t)\hat{a}]|0\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\Lambda(t)|^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\Lambda(t)]^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{58}$$

其中

$$\Lambda(t)=v_2(t)+\lambda\exp[v_3(t)]=\frac{\gamma(t)}{\Omega(t)}[\lambda+\chi(t)]. \tag{59}$$

在规范条件 (44a)—(44d) 式下,规范薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\Psi}(t)\rangle=f(t)\hat{I}(0)|\bar{\Psi}(t)\rangle, \tag{60}$$

它具有下列形式的解:

$$|\bar{\Psi}_\lambda(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\Theta_\lambda(t)]|\lambda\rangle, \tag{61}$$

其中

$$\mathrm{i}\Theta_\lambda(t)=-\mathrm{i}\lambda\int_0^t\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau=-\lambda\chi^*(t). \tag{62}$$

在第二种规范下,系统的非绝热基矢为

$$|\Psi_\lambda(t)\rangle=\hat{U}_g|\bar{\Psi}_\lambda(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\Theta_\lambda(t)]|\phi_\lambda(t)\rangle. \tag{63}$$

考虑系统初始处于相干态 $|\lambda\rangle$,则 $t$ 时刻系统的状态演化为

$$|\Psi(t)\rangle=|\Psi_\lambda(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\Theta_\lambda(t)]|\phi_\lambda(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\theta_\lambda(t)]|\Lambda(t)\rangle, \tag{64}$$

其中 $|\Lambda(t)\rangle$ 和 $\Lambda(t)$分别由(58)与(59)式定义. $\theta_\lambda(t)$ 为时间的实函数,定义为

$$\theta_\lambda(t)=-\left\{\mathrm{Im}[\lambda\chi^*(t)]+\mathrm{Re}\int_0^t\gamma(\tau)\chi(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{65}$$

容易验证, $|\Psi(t)\rangle$ 即为满足初始条件 $|\Psi(t=0)\rangle=|\lambda\rangle$ 的薛定谔方程的解. (64)式表明: 对所研究的系统,若初态为相干态,则系统状态随时间的演化始终保持为一个相干态(仅相差一个相因子). 在结束本文之前,给出一些量子力学平均值的计算结果.

1) 波函数 $|\Psi(t)\rangle$ 是归一的,即

$$\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle=1. \tag{66}$$

2) $\hat{a}$ 的量子期望值

$$\langle\hat{a}\rangle=\Lambda(t),\ \langle\hat{a}^2\rangle=\Lambda^2(t). \tag{67}$$

3) $\hat{a}^\dagger$ 的量子期望值

$$\langle\hat{a}^\dagger\rangle=\Lambda^*(t),\ \langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle=\Lambda^{*2}(t). \tag{68}$$

4) 能量的量子期望值

$$\begin{aligned}E(t)=\langle\hat{H}(t)\rangle&=\omega(t)|\Lambda(t)|^2+\Omega^*(t)\Lambda^*(t)+\Omega(t)\Lambda(t)\\&=\omega(t)|\lambda+\chi(t)|^2+2\mathrm{Re}\{\gamma(t)[\lambda+\gamma(t)]\}.\end{aligned} \tag{69}$$

5) 定义坐标及动量算符如下:

$$\hat{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a}),\ \hat{p}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a}), \tag{70}$$

则有

$$\langle\hat{q}\rangle=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}[\Lambda(t)],\ \langle\hat{p}\rangle=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}[\lambda(t)], \tag{71a}$$

$$\langle\hat{q}^2\rangle=2\{\mathrm{Re}[\Lambda(t)]\}^2+\frac{1}{2},\quad\langle\hat{p}^2\rangle=2\{\mathrm{Im}[\Lambda(t)]\}^2+\frac{1}{2}. \tag{71b}$$

测不准关系

$$\Delta p(t)\Delta q(t)=\Delta p(0)\Delta q(0)=\frac{1}{2}, \tag{72}$$

这是由于 $|\Psi(t)\rangle$ 是相干态，始终具有最小测不准性。

到此为止，我们已经在两种不同的规范(或两种不同的表象)下，得到了 $hw(4)$ 线性非自治量子系统的精确解。本文结果的新颖之处在于：1)把代数动力学从半单李代数系统推广到非半单李代数系统；2) 发现对非半单李代数系统存在直接量子-经典对应的规则：不变算子的量子运动方程仅涉及厄密型的结构常数矩阵；3)用不同于时间演化算子方法的规范变换方法，除谐振子表象中的精确解外，还求得了相干态表象中的精确解；4) 对于两种表象，都算出了不变算子，建立起量子-经典对应。

[1] S. J. Wang, F. L. Li and A. Weiguny, *Phys. Lett.*, **A180**(1993), 189.
[2] 左　维、王顺金，物理学报，**44**(1995)，1177.
[3] 左　维、王顺金，物理学报，**44**(1995)，1177.
[4] 左维、王顺金，时间有关的广义二维谐振子系统的精确解，待发表.
[5] S. Stenholm, Foundations of Laser Spectroscopy (J. Wiley and Sons, New York, 1984).
[6] D. Margcuse, Engineering Quantum Electrodynamics (Academic Press, New York, 1981).
[7] J. H. Eberly and P. Labropoulos, Multiphoton Processes Proeedings of the International Conference at the University Rochester (J. Wiley, New York, 1977).
[8] W. Magnus, *Commun. Pure & Appl. Math.*, **7**(1954), 649.
[9] E. P. Wigner, Group Theory (Academic Press, New York, 1959).
[10] G. Dattoli, J. C. Gallardo and A. Torre, *J. Math. Phys.*, **27**(1986), 772.

# INTERACTION OF A QUANTIZED RADIATION FIELD WITH A TIME-DEPENDENT CLASSICAL CURRENT

## EXACT SOLUTION OF THE LINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEM WITH $hw(4)$ DYNAMICAL GROUP

ZUO WEI

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou* 730000)

WANG SHUN-JIN

(*Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou* 730001)

(Received 8 June 1994)

ABSTRACT

The exact solution and the invariant Cartan operator of the linear nonautonomous system with $hw(4)$ dynamical group which discribes the interaction of a quantized radiation field with a time-dependent classical current are obtained by using the method of algebraic dynamics. The solution is expressed in the bases of both harmonic oscillator state and coherent state. The rule for direct quantum-classical correspondence of the solutions has been established. It has also been shown that the algebraic dynamics might be generalized from the linear dynamic system with a semi-simple Lie algebra to that with a general Lie algebra.

**PACC:** 0220