

广义相对论中广义协变的角动量 守恒定律

段 一 士

(兰州大学物理系, 兰州 730000)

冯 世 祥

(中国科学院上海原子核研究所, 上海 201800)

(1994年5月5日收到)

利用 Einstein 引力-物质系统的局域 Lorentz 不变性获得了相应于角动量的守恒定律。由于存在超势, 总的流是自然守恒的且只依赖于标架 (vierbein) 最后给出两个具体而典型的实例, 以说明此守恒定律的合理性。

PACC: 0450; 0420

1 引 言

建立广义协变的守恒定律一直是广义相对论中的基本问题之一^[1]。作者之一 (段一士) 利用 Noether 定理和广义平移变换曾成功地获得了广义协变的能量动量守恒定律^[2]。这一表述克服了其它表述的困难^[3]。广义相对论中的角动量守恒定律也有人讨论过^[4-9]。在文献[4]中, 引力-物质系统的角动量是由一赝张量而非张量给出。类似的困难同样存在于文献[5]和[6]中。Komar^[7]首次建议一组由 Killing 场决定的积分, 可以解释为系统的能量或角动量。这一建议只适用于对称的时空。对于不对称但于零无穷处渐近对称的时空, 被称作是 Linkage 的一组积分, 也可以物理地解释为能量或角动量^[8], 但其定义存在模糊性^[9], 所以上述的理论都不是令人满意的。

本文将说明, 对应于引力体系的局域 Lorentz 不变性存在相应的 Noether 守恒流, 其守恒荷可被解释为系统的角动量。此守恒定律克服了上述各理论的弱点。第一, 对系统没有特别的要求; 第二, 具有通常的 Noether 流, 且具有超势, 超势仅由标架决定。理论是局域的, 因而可讨论相关的辐射问题; 第三, 守恒荷具有 Lorentz 指标, 因而不依赖于 Riemann 坐标的选取, 即整个理论是广义协变的; 第四, 总的角动量是规范协变的, 因而物理意义是与规范无关。

2 广义协变角动量守恒定律

根据我们的观点, 守恒定律是与系统的对称性相关的, 而广义协变的守恒量应当是具

有 Lorentz 指标的物理量。在获得广义协变的能量动量守恒定律时^[4], 使用了广义平移变换, 它是狭义相对论中平移变换的推广。在局域 Lorentz 中, 此变换具有狭义相对论的形式。这意味着广义协变的守恒定律可由 Lorentz 形式的对称获得。所以可以想象, 广义协变的角动量守恒定律可经由引力体系的内部对称性获得。本文证明此推测是合理的。

广义相对论中, 引力-物质系统的作用量一般地由下式给出^[10]:

$$I = \int_M d^4x \mathcal{L} = \int_M (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) d^4x, \quad (1)$$

$$L_g = \frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\mu), \quad (2)$$

其中 $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ 为 Christoffel 符号, $\mathcal{L}_m$ 为物质部分的拉氏密度, G 为 Newton 引力常数。我们使用标架表述: e_μ^a 定义为 $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$, $\eta_{ab} = (1, -1, -1, -1)$, e_a^μ 为其逆。 $\omega_{\mu ab}$ 为自旋联络, 由下式定义:

$$\mathcal{D}_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a - \omega_{\mu ab} e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0. \quad (3)$$

还有 $\omega_{abc} = e_a^\mu \omega_{\mu bc}$, $\omega_a = \eta^{bc} \omega_{bac}$, 则可以证明

$$\mathcal{L}_g = \frac{c^4}{16\pi G} e (D_\mu e_a^\nu D_\nu e^{a\mu} - e^{ab} e_c^i D_\nu e_i^a D_\sigma e_b^\sigma), \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_m - \frac{c^4}{16\pi G} \Delta, \quad (5)$$

$$L_m = \frac{c^4}{16\pi G} (\omega_a \omega^a - \omega_{abc} \omega^{cba}), \quad (6)$$

$$\Delta = \partial_\mu (e e^{a\mu} \partial_\nu e_a^\nu - e e_a^\nu \partial_\nu e^{a\mu}), \quad (7)$$

其中

$$D_\mu e_a^\nu \equiv \partial_\mu e_a^\nu - \omega_{\mu ab} e^{b\nu}, \quad (8)$$

$$e = \sqrt{-g},$$

显然, Δ 是个全散度。

体系的局域 Lorentz 变换由下式给出:

$$e_\mu^a(x) \rightarrow e_\mu'^a(x) = \Lambda_b^a(x) e_\mu^b(x) \quad (9)$$

$$\eta_{ab} \Lambda_c^a(x) \Lambda_d^b(x) = \eta_{cd}$$

显然 $\mathcal{L}_g$ 为局域 Lorentz 变换不变的, 而 $\mathcal{L}_m$ 由其构造也是不变的。所以 $\mathcal{L}$ 在变换 (9) 式下是不变的, 即

$$[\mathcal{L}]_{e_a^\nu} \delta e_a^\nu + [\mathcal{L}]_{\phi^A} \delta \phi^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} \delta e_a^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^A} \delta \phi^A \right) = 0, \quad (10)$$

其中 $[\mathcal{L}]_{e_a^\nu}$ 和 $[\mathcal{L}]_{\phi^A}$ 为 Euler 式,

$$[\mathcal{L}]_{e_a^\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_a^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu e_a^\nu}, \quad (11)$$

$$[\mathcal{L}]_{\phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^A}. \quad (12)$$

Einstein 方程和物质场方程分别为

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}]_{e_a^\nu} &= 0, \\ [\mathcal{L}]_{\phi^A} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

于是(10)式成为

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} \delta e_a^\nu \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} \delta e_a^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^A} \delta \phi^A \right) = 0, \quad (14)$$

其中已用到如下事实: 只有 $\mathcal{L}_m$ 与物质场 $\phi^A (A=1, \dots, N)$ 有关. 考虑无穷小局域 Lorentz 变换

$$\Lambda_b^a(x) = \delta_b^a + \alpha_b^a(x), \quad \alpha_{ab} = -\alpha_{ba}, \quad (15)$$

由(9)式有

$$\delta e_a^\mu(x) = \alpha_{ab}(x) e^{\mu b}(x). \quad (16)$$

假设 $\mathcal{L}_m$ 具有形式

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(e_a^\mu, \phi^A, D_\mu \phi^A), \quad (17)$$

ϕ^A 属于 Lorentz 群的某表示, 其生成元为 $I_{ab} (a, b=0, 1, 2, 3)$, $I_{ab} = -I_{ba}$, D_μ 为协变微分算符

$$D_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} (I^{ab})_B^A \phi^B, \quad (18)$$

于是在变换(9)式之下, ϕ^A 按下述方式变换:

$$\phi^A(x) \rightarrow \phi'^A(x) = [D(\alpha)]_B^A \phi^B(x). \quad (19)$$

在无穷小变换(15)式下, $D(\alpha)$ 可以线性化为

$$[D(\alpha)]_B^A = \delta_B^A + \frac{1}{2} (I_{ab})_B^A \alpha^{ab}(x) \quad (20)$$

从而, ϕ^A 的变化为

$$\delta \phi^A(x) = \frac{1}{2} (I_{ab})_B^A \phi^B(x) \alpha^{ab}(x). \quad (21)$$

现在按下述定义引入 J_{ab}^μ :

$$\begin{aligned} e J_{ab}^\mu \alpha^{ab} &= \frac{3}{c} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} e_a^\nu \alpha^{ab} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} e_a^\nu \alpha^{ab} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \partial_\mu \phi^A} \frac{1}{2} (I_{ab})_B^A \alpha^{ab} \phi^B \right], \end{aligned} \quad (22)$$

则(14)式可写作

$$\partial_\mu (e J_{ab}^\mu \alpha^{ab}) - \frac{3c^3}{16\pi G} \partial_\mu \left(\frac{\partial^A}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} \delta e_a^\nu \right) = 0. \quad (23)$$

由(7)式有

$$\frac{\partial A}{\partial \partial_\mu e_a^\nu} e^{\mu\nu} \alpha_{lm} = \alpha^{lm} \partial_\mu (e V_{lm}^{\mu\nu}), \quad (24)$$

其中

$$V_{lm}^{\mu\nu} = e_l^\mu e_m^\nu - e_m^\mu e_l^\nu. \quad (25)$$

将(24)式代入(23)式得

$$\partial_\mu(eJ_{ab}^\mu\alpha^{ab}) - \frac{3c^3}{16\pi G}\partial_\mu[\alpha^{ab}\partial_\nu(eV_{ab}^\nu)] = 0, \quad (26)$$

即

$$\partial_\mu(eJ_{ab}^\mu)\alpha^{ab} + \left[eJ_{ab}^\mu - \frac{3c^3}{16\pi G}\partial_\nu(eV_{ab}^\nu) \right] \partial_\mu\alpha^{ab} = 0. \quad (27)$$

由于 α^{ab} 和 $\partial_\mu\alpha^{ab}$ 互相独立,所以一定有

$$\partial_\mu(eJ_{ab}^\mu) = 0, \quad (28)$$

$$J_{ab}^\mu = \frac{3c^3}{16\pi G}\nabla_\lambda V_{ab}^{\lambda\mu}. \quad (29)$$

由于 $V_{ab}^{\lambda\mu}$ 关于 μ, λ 反对称,所以 J_{ab}^μ 是自然守恒的. 类似于通常情形^[2], 我们也称 $V_{ab}^{\lambda\mu}$ 为超势. 由于 J_{ab}^μ 是由体系的局域 Lorentz 不变性获得的, 所以有自然的物理意义: 它相应于体系的角动量守恒流. 由 (25) 和 (29) 式可以看出, 流 J_{ab}^μ 只决定于标架这一特性与能量动量守恒定律极相似^[2]. 这是由于体系的所有知识都经由 Einstein 包含在标架中了.

对于一整体双曲的 Riemann 流形 M , 存在一系列 Cauchy 面 Σ_t 叶化 M . 选取一 M 的子流形 D , 它介于两个 Cauchy 面 $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$ 之间. 这样 D 的边界 ∂D 由三部分组成: $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$ 和 A , A 位于空间无限远处. 对于孤立系统, 时空在空间无穷远处应是渐近平坦的, 所以标架具有下述的渐近行为^[11].

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}) = 0. \quad (30)$$

由于

$$eV_{cd}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abcd}e_\mu^ae_\nu^b, \quad (31)$$

有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla_\sigma V_{cd}^{\rho\sigma} = 0, \quad (32)$$

所以利用恒等式

$$\int_D \nabla_\mu J_{ab}^\mu e d^4x = 0, \quad (33)$$

可获得守恒的角动量:

$$J_{ab} = \int_{\Sigma_t} J_{ab}^\mu e d\Sigma_\mu, \quad (34)$$

其中 $e d\Sigma_\mu$ 为 Cauchy 面 Σ_t 的协变面元, $e d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} e \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta$. J_{ab} 的表示式(34)可用 Gauss 定理进一步局域化为

$$J_{ab} = \frac{3c^3}{16\pi G} \int_{\partial\Sigma_t} e V_{ab}^i{}_{\mu} ds_i, \quad (35)$$

其中 $ds_i = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. $\partial\Sigma_t$ 为 Σ_t 的边界, 它位于空间无穷远处. 我们也有下述表示:

$$J_{ab} = \frac{3c^3}{32\pi G} \int_{\partial\Sigma_t} e V_{ab}^{\mu\nu} ds_{\mu\nu} \quad (36)$$

其中 $ds_{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$. 引入

$$\tilde{J}^{ab} = \frac{3c^3}{32\pi G} \int_{\partial\Sigma_t} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} e_\alpha^a e_\beta^b ds_\mu, \quad (37)$$

则

$$J_{ab} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{abcd} \tilde{J}^{cd}. \quad (38)$$

由(37)式可见,总的角动量只由标架的在空间无穷远处到 $1/r^2$ 的渐近行为决定.

现讨论角动量的引力辐射. 考虑 Σ_t 的与时间无关的子空间 σ . 恒等式

$$\int_\sigma \nabla_\mu J_{ab}^\mu e^b dx = 0, \quad (39)$$

给出

$$\int_\sigma \partial_b (e J_{ab}^\mu) d^3x = - \int_\sigma \partial_i (J_{ab}^\mu e) d^3x = - \int_{\partial\sigma} J_{ab}^\mu e ds_i, \quad (40)$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{ab}(\sigma) = - \int_{\partial\sigma} J_{ab}^\mu e ds_i. \quad (41)$$

这表示 σ 内所含角动量的减少等流出 $\partial\sigma$ 的角动量的通量,所以它刻画了角动量的引力辐射.

下面证明 J_{ab} 是规范协变的. 注意到孤立体系的物理解都是渐近平坦的,即满足(30)式. 考虑另外一规范选择 $e'^a_\mu(x)$, 它也满足(30)式, 与 $e^a_\mu(x)$ 由一局域 Lorentz 变换相联系

$$e'^a_\mu = \Lambda^a_b(x) e^b_\mu(x),$$

所以,在空间无穷远 $\partial\Sigma$ 处,存在惯性系 X^a, X'^a , 使得在 $\partial\Sigma$, 下述成立:

$$e^a_\mu(x) = \frac{\partial X^a(x)}{\partial x^\mu}, \quad (42)$$

$$e'^a_\mu(x) = \frac{\partial X'^a(x)}{\partial x^\mu}. \quad (43)$$

由狭义相对论知^[4], 任意两个惯性系皆由一 Lorentz 变换相联系. 所以有

$$X'_a(x) = B_a + A^b_a X_b(x), \quad (44)$$

其中 B_a, A^b_a 皆为常数. 另一方面, 从

$$\Lambda^a_b(x) e^b_\mu(x) = \frac{\partial X'^a(x)}{\partial x^\mu}$$

及

$$e^a_\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a},$$

有

$$\Lambda^a_b = \frac{\partial X'^a}{\partial X^b} \quad (45)$$

$$\Lambda_{ab} = A_{ab} = \text{const.} \quad (46)$$

所以很易证明

$$J'_{ab} = A^c_a \Lambda^d_b J_{cd}.$$

这是很合理的。

3 Kerr 解和多体渐近解

具有角动量的典型的 Einstein 方程的解可算 Kerr 解,它在空间无穷远处具有以下渐近行为^[2]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ + 4mac \frac{x dx dt - y dy dt}{r^3},$$

其中 $m = GM/c^2$, $ma = GJ/c^2$, M 为中心物质源的质量, J 为其旋转角动量。我们可以获得满足(30)式的标架

$$e_{00} = c\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad e_{33} = \sqrt{1 + \frac{2m}{r}}, \\ e_{01} = -\frac{2may}{r^3\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \quad e_{02} = -\frac{2max}{r^3\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \\ e_{11} = \sqrt{1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2a^2y^2}{r^6\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}}, \quad e_{22} = \sqrt{1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2a^2x^2}{r^6\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}}.$$

为计算 J_{ab} , 只需知道 $e_{a\mu}$ 在 $r \rightarrow \infty$ 时到 $1/r^2$ 阶的行为:

$$e_{00} = c\left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m^2}{r^2}\right), \quad e_{01} = -\frac{2may}{r^3}, \\ e_{02} = -\frac{2max}{r^3}, \quad e_{11} = e_{22} = e_{33} = 1 + \frac{m}{r} - \frac{m^2}{r^2}. \quad (47)$$

从(47)和(37)两式,可以得到

$$\tilde{J}^{03} = J, \quad \tilde{J}^{01} = \tilde{J}^{02} = \tilde{J}^{12} = \tilde{J}^{13} = \tilde{J}^{23} = 0,$$

所以

$$J_{12} = J, J_{01} = J_{02} = J_{03} = J_{13} = J_{23} = 0.$$

此结果表明 J_{ab} 确是体系的角动量。

角动量的引力辐射的讨论是简单的。由于标架与时间无关,有

$$\partial_\mu(eJ^{\mu}_{ab}) = \partial_i(eJ^i_{ab}) = 0.$$

在 $\Sigma_t - \sigma$ 区域使用 Gauss 定理,则可得

$$\int_{\partial\sigma} J^i_{ab} e ds_i = \int_{\partial\Sigma_t} J^i_{ab} e ds_i, \quad (48)$$

σ 包含了中心物质源。要讨论辐射, 只需知道 $J^i_{ab}e$ 在空间无穷远处到 $1/r^2$ 阶的渐近行为。由(25), (29)和(31)诸式可知

$$eJ^{\mu}_{ab} = \frac{3c^3}{32\pi G} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \varepsilon_{abcd} \partial_\nu (e^c_\alpha e^d_\beta). \quad (49)$$

这表明只需知道 $e_{\mu\nu}$ 到 $1/r$ 阶的渐近行为。由(47)式, 此行为为

$$e_{00} = c \left(1 - \frac{m}{r} \right), \quad e_{01} = e_{02} = 0, \quad (50)$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 1 + \frac{m}{r}.$$

将(50)式代入(49)式, 有

$$eJ_{12}^1 = -eJ_{23}^3 = \frac{3m^2c^4}{16\pi G} \frac{y}{r^4},$$

$$eJ_{12}^2 = eJ_{13}^3 = -\frac{3m^2c^4}{16\pi G} \frac{x}{r^4},$$

$$eJ_{13}^1 = eJ_{23}^2 = \frac{3m^2c^4}{16\pi G} \frac{z}{r^4}.$$

由于面元正比于 r^2 , 所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{ab}(\sigma) = - \int_{\sigma} J_{ab}^i e d\sigma_i = - \int_{\partial\Sigma_t} J_{ab}^i e d\sigma_i = 0.$$

这说明 Kerr 系统是没有角动量引力辐射的。这与其它理论的分析是一致的^[11]。

下面讨论多体系统。对应的 Einstein 方程具有渐近近似解^[12]。假设质心是静止的。于是有近似解:

$$\bar{g}^{00} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{4GM}{c^2 r} + \frac{7G^2 M^2}{c^4 r^2} \right), \quad \bar{g}^{0i} = \frac{2Gx^j M_{ji}}{c^3 r^3},$$

$$\bar{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{G^2 M^2 x^i x^k}{c^3 r^4},$$

其中 M 为多体体系总的质量, M_{ij} 为总的 Newton 意义下的角动量, $\bar{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, 于是可以获得 $g_{\mu\nu}$:

$$g_{00} = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2G^2 M^2}{c^4 r^2} \right), \quad g_{0i} = \frac{2Gx^j M_{ji}}{c^2 r^3}, \quad (51)$$

$$g_{ik} = \delta_{ik} \left(-1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G^2 M^2}{c^4 r^2} \right) - \frac{G^2 M^2}{c^4 r^4} x^i x^k.$$

由(51)式可以得到标架

$$e_{00} = c \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{G^2 M^2}{2c^4 r^2} \right), \quad e_{0i} = \frac{2Gx^j M_{ji}}{c^2 r^3},$$

$$e_{ij} = \frac{G^2 M^2}{c^4 r^4} x_i x_j \quad (i \neq j), \quad (52)$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = 1 + \frac{GM}{c^2 r} + \frac{G^2 M^2}{2c^4 r^2}.$$

将(52)式代入(36)式, 得到多体体系的角动量

$$J_{12} = M_{12}, \quad J_{13} = M_{13}, \quad J_{23} = M_{23}, \quad J_{01} = J_{02} = J_{03} = 0.$$

要讨论多体系统角动量的引力辐射, 就需要更精确的 Fock 解^[13]。此处不拟讨论。

4 讨 论

综上所述, 我们得出以下几点看法。

1) 守恒流 J_{ab}^{μ} 可用于开系或闭系而守恒的角动量 J_{ab} , 只能用于孤立系统, 它具有边界条件(30)式。此条件与 Ashtekar 自对偶形式的广义相对论的边界条件相同^[13]。由于流 J_{ab}^{μ} 与自旋联络有关, 所以它不是规范协变的, 这对于广义相对论中的守恒定律似乎是不可避免的, 但这并不影响总的角动量是 Lorentz 协变的。这主要是由于对孤立系统, 解应当满足边界条件(30)式, 即把无穷远处理解为 Minkowski 的, 而任意局域规范变换都要保持这一点。这完全与能量动量守恒定律一致^[12]。

2) 人们可直接从(25)和(29)式出发而立刻得到(28)式, 但这样就缺乏物理解释。然而这里, 它是基于 $SO(1, 3)$ 不变性, 所以有自然的角动量解释, 是 Einstein 引力体系的一个动力学守恒量而非其它。另外本文所述的角动量守恒定律也有超势, 如能量动量守恒定律一样^[1]。所以可以说自然守恒流也可由 Noether 定理获得。当然我们可以先构造一超势, 然后获得相应的自然守恒流, 但这样缺乏物理意义。

3) 虽然本文举出的两个例子很简单, 但它们是很典型的, 而第二个例子又是很一般的。

最后, 在通常情况下, J_{ab} 只是赝 Riemann 几何中的一个几何量。只有当此几何描述一物理体系时 J_{ab} 才具有物理意义。

- [1] R. Penrose, *Seminar on Differential Geometry* (Princeton University Press, 1982); S. T. Yau and R. Schoen, 微分几何(科学出版社, 北京, 1991).
- [2] Y. S. Duan *et al.*, *Gen. Rel. Grav.*, **20**(5)(1988), 485; 段一士等, 物理学报, **19**(1963), 589; 段一士等, 中国科学(A辑), (4)(1983), 343; 段一士等, 物理学报, **36**(1987), 760.
- [3] H. Bauer, *Physik Z*, **19**(1918), 163; E. Schrödinger, *Spacetime Structure* (Addison Wesley, Cambridge, Massachusetts, 1956).
- [4] B. A. Fock, *Theory of Spacetime and Gravitation* (Pergamon Press, 1959).
- [5] M. Blagjevic *et al.*, *Class. Quan. Grav.*, **5**(1988), 1241.
- [6] L. B. Szabados, *Class. Quan. Grav.*, **9** (1992), 2521.
- [7] A. Komar, *Phys. Rev.*, **113**(1959), 934.
- [8] A. Ashtekar and J. Winicour, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 2410; A. Ashtekar and R. O. Henssen, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 1534; R. Geroch and J. Winicour, *J. Math. Phys.*, **22** (1981), 803.
- [9] J. Chevalier, *Helv. Phys. Acta*, **63**(1990), 553.
- [10] I. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Field* (Fourth Revised Edition, Pergamon Press, 1987).
- [11] 段一士等, 物理学报, **18**(1962), 211.
- [12] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **11** (1963), 237.
- [13] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2244; *Phys. Rev.*, **D36** (1987), 2587.
- [14] A. Einstein, *Berl. Ber.*, (1915), 178; *ibid.*, (1918), 448; R. Tolman, *Phys. Rev.*, **35**(1930), 875.
- [15] J. W. Maluf, *J. Math. Phys.*, **33**(1992), 2849.
- [16] 段一士、冯世祥, 预印本(1994.1), 兰州大学.
- [17] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

GENERAL COVARIANT ANGULAR MOMENTUM CONSERVATION LAW IN GENERAL RELATIVITY

DUAN YI-SHI

(Department of Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

FENG SHI-XIANG

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 5 May 1994)

ABSTRACT

The Noether current corresponding to the invariance of the action of a gravity-matter system under the local Lorentz transformation can be interpreted as the angular momentum tensor of the system. The total current is identically conserved due to the existence of superpotentials which are expressed in terms of the vierbein only and the total angular momentum is gauge-covariant. Two examples are given to show this conservation law of angular momentum in general relativity is reasonable.

PACC: 0450; 0420