

用非线性反馈实现混沌的同步化*

成 雁 翔

(中国工程物理研究院研究生部 北京 100088)

王 光 瑞

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(中国科学院国际材料物理中心, 沈阳 110015)

(1994年6月13日收到)

我们指出不用分解原来的完整系统, 对整个系统的一个复制系统引入合适的非线性反馈项就可以实现并完成混沌的同步化。我们以 Lorenz 系统为例用李雅普诺夫函数方法构造了几种反馈形式并数值地研究了这种同步化方法。

PACC: 0540

1 引 言

混沌系统的一个显著特征是其对初始条件的极端敏感性。由相差很小的不同初始条件出发的两条轨道将指数地分离。对实际系统来说, 由于存在噪声和其它误差, 不可能给出完全相同的初始条件与演化环境, 因此让两个混沌系统保持很好的全同性质似乎是不可能的。然而近来的工作表明保持两个混沌系统同步地演化不仅是可能的^[1], 而且在通讯等领域的应用方面很有潜力^[2], 同时混沌系统的同步化现象也可能对神经系统及一些生理过程机制的研究有用。

Pecora 和 Carroll 在文献[1]中指出: 对一定的混沌系统, 同步化是可以实现的。将一个混沌系统分为两个子系统, 如果一个子系统的条件李雅普诺夫指数全为负, 那么两个这样的子系统可以用系统的其它剩余状态变量作为共同的驱动变量来实现同步化。他们用 Lorenz 系统和 Rossler 系统对该方法进行了数值研究, 并在一些电路系统中做了实验^[3]。在应用方面, 这种方法已用于传输数字信号和保密通讯的研究。

混沌系统的同步化也可以用其它方式实现。对一些不可分解的混沌系统, 诸如激光器等, 同步化一般采用外加控制的方式实现。例如 Newell 等对一组振荡电路用正比反馈技术实现了同步化^[4]。其它线性耦合反馈方式也已得到广泛研究^[5]。由于混沌的本质在于其非线性, 对其做线性的分析只能在局域成立, 这就不可避免地出现两个问题: 一是如果限制反馈的大小则会出现一个较长的瞬变过程, 以等待混沌系统达到期望的目标区

* 国家基础性研究重大项目、国家自然科学基金及中国工程物理研究院基金资助的课题。

域中;二是采用线性反馈方式,在同步化的过程中在某些时刻会有非同步化的性质。本文将针对第二个问题进行讨论。

本文中利用混沌系统的同步化现象与渐近稳定性的关系^[4],对一个完整的混沌系统的复制系统引入合适的非线性反馈项(反馈增益与复制系统或原始系统的状态有关),使复制系统的演化一致地趋向原始系统的演化状态,而且在这一过程中没有非同步化的趋势出现,从而实现这两个混沌系统的同步化。其中附加的非线性反馈项的形式与系统本身的非线性性质有关,可以用渐近稳定性理论事先确定。一般存在多种反馈形式,可根据实际需要选择其中容易实现的合适形式。由于这种同步化方法可以在复制系统上重现原始系统的所有状态变量的演化,因而可以使同步化在混沌通讯等领域中的应用更为方便。同时还要指出的是通过选择合适的反馈参数还可以使同步化收敛得更快,这在应用中也很重要。

2 Pecora-Carroll 同步化^[1]

考虑一个 N 维动力系统:

$$\dot{Z} = F(Z). \quad (1)$$

其中 Z 为 N 维矢量。把 N 个状态变量分为两部分, $Z = [X^T, Y^T]^T$, (T 表示转置), x 是 n_1 维矢量, y 是 n_2 维矢量, $n_1 + n_2 = N$ 。把 x 叫做驱动变量(通常是一维的,即 $n_1 = 1$ ^[4])。原始系统(1)式分解为

$$\dot{x} = G(x, y), \quad (2)$$

$$\dot{y} = H(x, y). \quad (3)$$

建立一个新系统 y' ,它是子系统(3)式的复制品,把它叫做响应系统:

$$\dot{y}' = H(x, y'). \quad (4)$$

如果系统(4)与(3)式对典型的不同初始条件 $y(0) \neq y'(0)$,在 $t \rightarrow \infty$ 时,满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y'(t) - y(t)\| = 0, \quad (5)$$

则称系统(4)与(3)式是同步的。

Pecora 和 Carroll 数值地证明了同步化现象发生的必要条件(大多数情况下也是充分条件)是响应系统的所有条件李雅普诺夫指数全为负^[4]。He 和 Vaidya 用渐近稳定性理论证明了:当且仅当对相空间中一定区域内的初始条件(为同步化区),响应系统(4)式的解是渐近稳定的,则响应系统(4)式最终将与驱动系统同步化。这给出了发生同步化现象的充分必要条件。例如对 Lorenz 系统:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \gamma z. \quad (6)$$

其中 σ, ρ 和 γ 为参数,使该系统表现混沌行为。以 x 为驱动变量时,其 (y, z) 子系统的复制系统 (y', z') 为响应系统,写为

$$\dot{y}' = \rho x - y' - xz', \quad \dot{z}' = xy' - \gamma z' \quad (7)$$

当 $\sigma = 16$, $\rho = 45.92$, $\gamma = 4$ 时, (y', z') 响应系统的条件李雅普诺夫指数为 $(-2.5, -2.5)$,因而对不同的初始条件, (y', z') 系统的演化将趋向于与 (y, z) 子系统同步^[4]。这一结果也可以由渐近稳定性理论予以解释^[4]。令 $e_2 = y - y'$, $e_3 = z - z'$, 其动力学方程

为

$$\dot{e}_2 = -e_2 - xe_3, \quad \dot{e}_3 = xe_2 - \gamma e_3. \quad (8)$$

定义一个李雅普诺夫函数

$$E = \frac{1}{2} (e_2^2 + e_3^2) \geq 0,$$

则

$$\begin{aligned} \dot{E} &= e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = e_2(-e_2 - xe_3) + e_3(xe_2 - \gamma e_3) \\ &= -e_2^2 - \gamma e_3^2 \leq 0. \end{aligned}$$

其中等号仅对 $e_2 = e_3 = 0$ 成立。因此方程(8)对其原点是渐近稳定的,因而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

系统 (y', z') 与 (y, z) 将同步化。

对 Lorenz 系统以 z 为驱动变量时, (x, y) 对应的响应系统的条件李雅普诺夫指数约为 $(0.00789, -17.0)$, 其中一个为正, 因而 (x, y) 系统不能用 Pecora-Carroll 方法实现同步化。

3 用非线性反馈同步化

现在我们考虑如何用一个附加的非线性反馈项使一个混沌系统的复制系统与原系统发生同步化。在方程(1)的基础上建立一个带反馈项的新系统

$$\dot{Z}' = F(Z') + f(Z, Z'). \quad (9)$$

通过选择合适的 $f(Z, Z')$ 使得 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(Z, Z') \rightarrow 0$ 且 $Z'(t) = Z(t)$, 也就是说使方程(9)的解渐近稳定地趋向方程(1)的解, 从而使系统(9)与(1)式同步化。

这样做的好处在于: 一般来说 $f(Z, Z')$ 是与 $F(Z)$ 的非线性性质有关的一大类函数, Pecora-Carroll 方法只是其中的特例, 这使得有多种可选择的方法可以实现这两个混沌系统的同步化, 从而使应用混沌同步化现象的可行性更大。同时对 Pecora-Carroll 方法不能同步化的子系统也可以引入反馈项使之同步化, 也就是说用这种方法也可以起到加强同步化的作用。

方程(9)称之为响应系统, 其条件李雅普诺夫指数由一个变分方程来定义

$$\delta \dot{x}' = \frac{\partial F(Z')}{\partial Z'} \delta Z' + \frac{\partial f(Z, Z')}{\partial Z'} \delta Z' \quad (10)$$

用方程(1)的一条典型混沌轨道 $Z(t)$ 和一个典型的初始偏差 $\delta Z'(0)$ 求解方程(10), 则可给出响应系统(9)式的最大条件李雅普诺夫指数^[4]:

$$\Lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [\|\delta Z'(t)\| / \|\delta Z'(0)\|]. \quad (11)$$

按照 He 和 Vaidya 的理论^[6], 方程(1)与响应方程(9)发生同步化的充分必要条件是 $\Lambda < 0$ 。但在实践中为了确保不出现非同步化的趋势, 还可以要求 $\|Z(t) - Z'(t)\|$ 随时间单调下降, 我们称满足这个要求的同步化为单调同步化。

下面我们选定 Lorenz 系统(6)式为例, 以方程(9)中 $f(Z, Z')$ 的几种特殊形式阐明

这种同步化方法, 对 Lorenz 系统(6)式带有反馈项 $f(Z, Z') = [f_1, f_2, f_3]^T$ 的响应系统为

$$\dot{x}' = \sigma(y' - x') + f_1, \dot{y}' = \rho x' - y' - x'z' + f_2, \dot{z}' = x'y' - \gamma z' + f_3. \quad (12)$$

其中参数为 $\sigma = 16$, $\gamma = 4$, $\rho = 45.92$, 与原系统(6)式相同 (实际上当参数值仅有微小偏差时, 不会影响同步化的结果^[4]).

同步化问题关心的是原系统(6)式与响应系统(12)式的差的动力学行为. 令 $e_1 = x - x'$, $e_2 = y - y'$, $e_3 = Z - Z'$. 由方程(6)和(12)可得差的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1) - f_1, \dot{e}_2 = \rho e_1 - e_2 - (xz - x'z') - f_2, \\ \dot{e}_3 &= xy - x'y' - \gamma e_3 - f_3. \end{aligned} \quad (13)$$

令李雅普诺夫函数为

$$E = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \geq 0,$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{E} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \\ &= -\sigma e_1^2 - e_2^2 - \gamma e_3^2 + (\sigma + \rho - z)e_1 e_2 \\ &\quad + y e_1 e_3 - f_1 e_1 - f_2 e_2 - f_3 e_3. \end{aligned} \quad (14)$$

如果选择合适的 f_1, f_2, f_3 使 $\dot{E} \leq 0$ 且等号仅对 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ 成立, 那么由李雅普诺夫稳定性定理可知差动力学(13)式对其原点是渐近稳定的, 即系统(12)式将与系统(6)式同步化. 同时由于我们所用的李雅普诺夫函数的特殊性, 也保证了这是单调同步化.

首先考虑如下的三种线性反馈形式:

$$f_1 = \alpha(x - x'), f_2 = f_3 = 0, \quad (15)$$

$$f_2 = \alpha(y - y'), f_1 = f_3 = 0, \quad (16)$$

$$f_3 = \alpha(z - z'), f_1 = f_2 = 0. \quad (17)$$

其中 α 为增益. 这三种形式都是一维的而且只有一个输入变量. 图 1(a) 显示了这三种反馈形式作用下响应 Lorenz 方程(12)的最大条件李雅普诺夫指数 Λ 随增益 α 的变化. 从图中可以看出当增益 α 大于一定值时总能使最大条件李雅普诺夫指数小于 0, 这意味着这时响应 Lorenz 系统(12)式将与驱动 Lorenz 系统(6)式发生同步化. 但是以方程(15)为例, 将其代入方程(14), 有

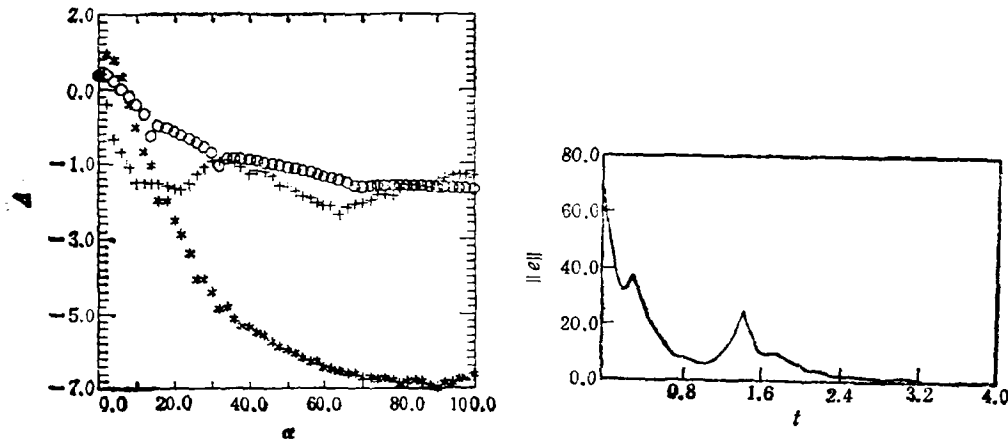
$$\begin{aligned} \dot{E} &= -[\alpha + \sigma - y'^2/4\gamma - (\sigma + \rho - z')^2/4]e_1^2 - [e_2 \\ &\quad - (\sigma + \rho - z')e_1/2]^2 - (2\sqrt{\gamma}e_3 - e_1/2)^2, \end{aligned}$$

只有在 α 满足条件:

$$\alpha > y'^2/4\gamma + (\sigma + \rho - z')^2/4 - \sigma \quad (18)$$

时, 对任意的 e_1, e_2, e_3 有 $\dot{E} \leq 0$. 然而, (18)式的右边是与响应系统(12)式的状态有关, 在吸引子上它可以在很大范围内变化, 因而对固定的 α 值很难保证(18)式处处成立. 因此用线性反馈(15)式不能保证同步化是单调的. 图 1(b) 显示了 $\alpha = 60.0$ 时, 系统(12)式与(7)式之间的同步化. 两个系统的初始状态分别为 $(x', y', z') = (10.0, 8.0, 2.0)$, $(x, y, z) = (-10.0, 1.0, 70.0)$. 从图中可以看出在某些时刻两个系统间的状态差会增

大,出现非同步化的趋势,但在长时间以后这两个系统仍会保持很好的同步性质。



(a) 响应系统(12)式在线性反馈作用下的同步化,最大条件李雅普诺夫指数 Λ 随增益 α 的变化. 符号“○”,“*”和“+”分别对应于线性反馈(15),(16)和(17)式

(b) $\alpha = 60.0$ 时,在反馈(15)式的作用下, $\|e\|$ 随时间的变化. 其中 $\|e\| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}$

图 1

以上讨论线性反馈的情况,下面我们就几种特殊的非线性反馈形式讨论实现同步化的条件.

$$1) \quad f_1 = (a - z') \cdot (y - y') + (b + y') \cdot (z - z') \quad (19)$$

或

$$f_1 = (a - z) \cdot (y - y') + (b + y) \cdot (z - z') \quad (20)$$

及

$$f_2 = f_3 = 0.$$

这个反馈项是一维的,包含有两个驱动变量. 把它代入方程(14),得到

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\sigma e_1^2 - e_2^2 - \gamma e_3^2 + (\sigma + \rho - a)e_1 e_2 - b e_1 e_3 \\ &= -[\sigma - (\sigma + \rho - a)^2/4 - b^2/4\gamma]e_1^2 - [e_2 - (\sigma + \rho - a)e_1/2]^2 \\ &\quad - [\gamma^{\frac{1}{2}}e_3 + b\gamma^{-\frac{1}{2}}e_1/2]^2. \end{aligned}$$

很明显,当 a 和 b 满足下面条件时,对任意的 e 有 $\dot{E} \leq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma + \rho - 2\sqrt{\sigma} < a < \sigma + \rho + 2\sqrt{\sigma}; \\ b^2 < 4\sigma\gamma - \gamma(\sigma + \rho - a)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

因此差动力学对其原点是整体渐近稳定的,对任意初始条件都能实现单调的同步化. 图 2(a)显示了 $b = 0$ 时响应系统(12)式的最大条件李雅普诺夫指数 Λ 随 a 的变化. 与(21)式相比可看出满足(21)式的 a 值对应于 $\Lambda - a$ 曲线的谷底部分,因而具有很好的收敛性质. 在图 2(b)中我们分别显示了系统(12)和(9)式的单调同步化 ($a = \sigma + \rho, b = 0.0$, 实线)和非单调同步化 ($a = 45.0, b = 0.0$, 虚线). 两个系统的初始条件分别为 $(x', y', z') = (10.0, 8.0, 2.0)$ 和 $(x, y, z) = (-10.0, 1.0, 70.0)$. 在非单调情况下可以看到某些时刻 $\|e\|$ 会随时间增加.

$$2) \quad f_1 = 0, f_2 = (a - z')(x - x'), f_3 = (b + y')(x - x'). \quad (22)$$

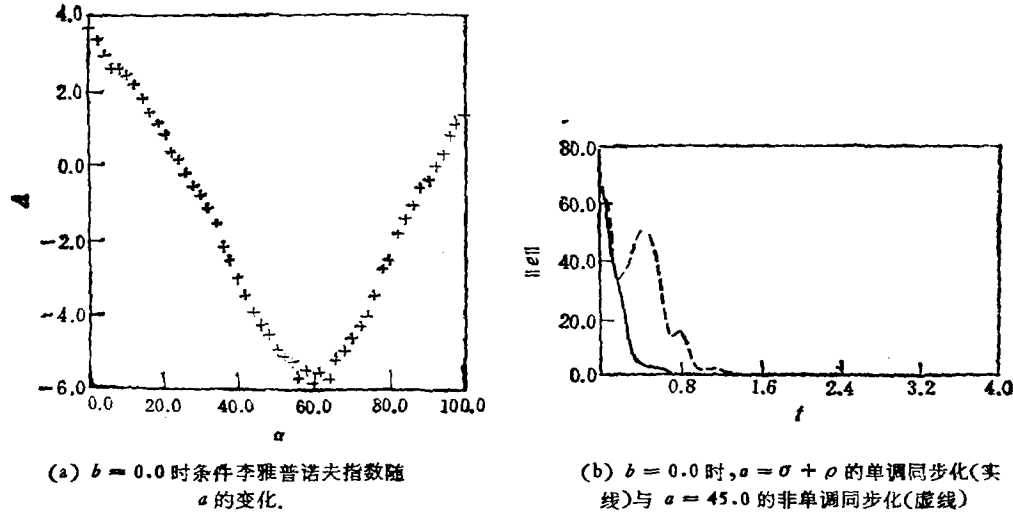


图2 在非线性反馈(19)和(20)式作用下系统(12)与(9)式的同步化

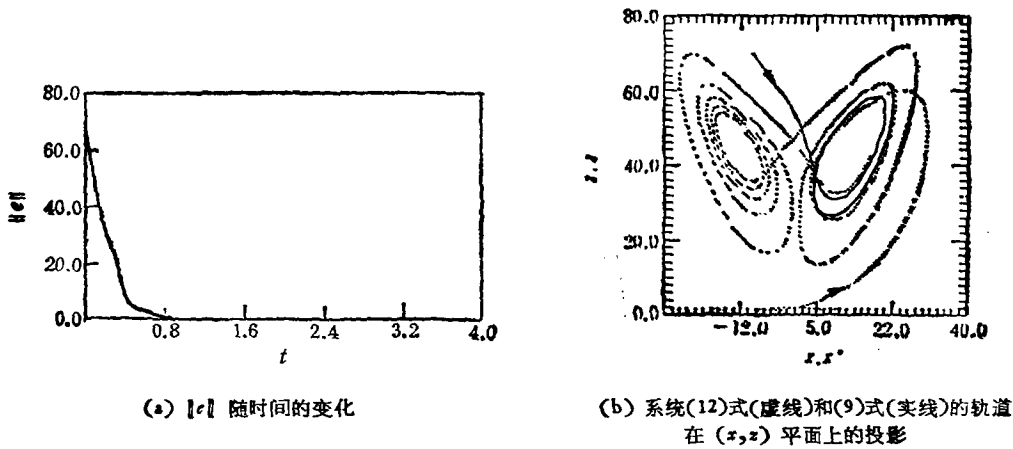


图3 在与图2相同的初始条件下,用反馈(22)式的同步化, $a = 60.0, b = 0.5$

这个反馈项是二维的,但只包含一个驱动变量 x , 增益项 $(a - x')$ 和 $(b + y')$ 与响应系统的状态有关. 将其代入(14)式得到与上例相同的单调同步化条件(21)式. 在 $a = \sigma + \rho$ 和 $b = 0$ 时,这种同步化方式等价于 Pecora-Carroll 方法中以 x 变量驱动 (y, z) 子系统的情况. 因此 Pecora-Carroll 方法也可以实现单调同步化,它是非线性反馈的一个特例.

图3在与上例相同的初始条件和系统参数下显示了用这种反馈的同步化,所用的 $a = 60.0, b = 0.5$. (a) 显示了 $\|e\|$ 随时间的变化; (b) 显示了两个系统的轨道在 (x, z) 平面上的投影. 从图3中可以看出这种同步化有很好的单调收敛性.

从以上两个例子可以看出,反馈项的形式可以变化很大,但在一定的参数条件下都能实现这两个混沌系统的整体单调同步化. 利用非线性反馈可以得到比线性反馈更好地收敛性质.

基于上面的思路,在 Pecora-Carroll 方法不能实现同步化的情况下引入外加的反馈项以实现同步化。例如对 Lorenz 系统的 (x, y) 子系统如前一节所讨论的,不能用 Pecora-Carroll 方法实现同步化。这里我们引入一个反馈项,将响应系统写为

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \sigma(y' - x') + (a + z)(y - y'); \\ \dot{y}' &= \rho x' - y' - x'z. \end{aligned} \quad (23)$$

不难证明,当 $-2\sqrt{\sigma} - \sigma - \rho < a < 2\sqrt{\sigma} - \sigma - \rho$ 时,系统(23)式与系统(9)式的对应子系统可实现单调同步化。图 4 表示 $a = -\sigma - \rho$ 时,系统(23)与系统(9)式的同步化过程。两个系统的初始条件分别为 $(x', y') = (10.0, -30.0)$, $(x, y, z) = (-10.0, 21.0, 70.0)$ 。图 4(a)表示 $x - x', y - y'$ 随时间的变化。图 4(b)表示两条轨道在 (x, y) 平面上的投影。从中可以看出反馈项对 Pecora-Carroll 方法有明显的改进。

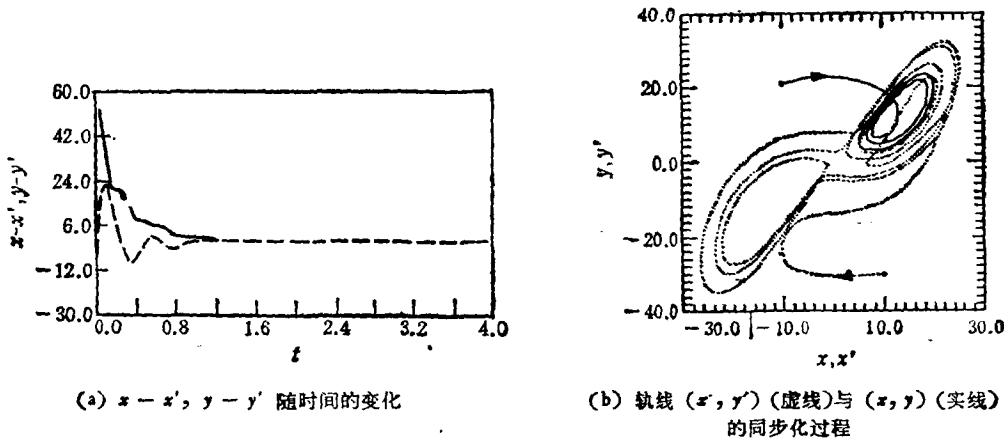


图 4 系统(21)式与系统(5)式之间的同步化

4 结 论

我们提出了一种用非线性反馈实现混沌同步化的方法。对 Lorenz 系统用李雅普诺夫函数方法解析地讨论了两种特殊的非线性反馈形式,并数值地研究了实现混沌同步化的过程。与线性反馈方法相比,用非线性反馈可以实现单调的同步化。同时由于存在多种可选择的反馈形式,使得这种方法比 Pecora-Carroll 方法具有更好的易变性。最后我们还讨论了对 Pecora-Carroll 方法不能实现同步化的情况,通过引入反馈项可使之同步化。

- [1] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 82; L. M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 2374.
- [2] K.M. Cuomo, A. V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 65.
- [3] C. Skarda, W. J. Freeman, *Behav. Brain. Sci.*, **10**(1987), 161.
- [4] T.C. Newell, P.M. Alsing, A. Gavrielides, V. Kovanis, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1647.
- [5] H. G. Winful, L. Rahman, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 1575; Y.C. Lai, C. Grebogi, *Phys. Rev.*, **E47** (1993), 2357; T. C. Newell *et al.*, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 313.
- [6] R. He, P.G. Vaidya, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 7387.

SYNCHRONIZATION OF CHAOS BY NONLINEAR FEEDBACK

CHENG YAN-XIANG

(Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088)

WANG GUANG-RUI

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088)

(International Center of Material Physics, Academia Sinica, Shenyang 110015)

(Received 13 June 1994)

ABSTRACT

In this paper, we point out that synchronization of chaos may also be achieved by a nonlinear feedback without decomposing the original system. We apply the idea to the Lorenz system, and discuss several forms of nonlinear feedbacks by Lyapunov function and numerical method.

PACC: 0540