

损耗与噪声对分束器的量子 非破坏性测量的影响*

薛秋寒 郭光灿

(中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

(1994 年 5 月 5 日收到)

采用量子理论详细地分析有损耗的分束器作为量子非破坏性测量系统时的量子态制备能力和量子光学分流能力与透射损耗和反射损耗的关系。给出当输入探测光的量子起伏为某一确定值时, 要实现量子非破坏性测量分束器损耗的上限值。还讨论输入信号光不是相干态而是含有热噪声的相干信号场时, 信号光的量子起伏对量子非破坏性测量的影响。

PACC: 4250

1 引 言

量子非破坏性 (QND) 测量已成为目前量子光学的重要前沿课题之一^[1], 其主要目标是合理选取待测的力学量 A 以及与其耦合的后级测量系统, 以避免共轭量之间无规的量子起伏及测量系统的反作用对测量精度的影响, 从而实现对 A 进行一系列准确的测量, 并使每一个测量值都能由第一次测量结果预测出来。由于理想 QND 测量需要满足一些严格条件, 科学工作者试图定义一些参数来刻画非理想的 QND 测量。Grangier 等人在前人工作的基础上, 提出用两个参数(即条件起伏和传递系数)来分别刻画 QND 测量中的量子态制备能力及量子光学分流能力^[2]。条件起伏定义为

$$W_{X_s, X_m} = W_{X_s X_s}^{\text{out}} - \frac{|W_{X_s X_m}^{\text{out}}|^2}{W_{X_m X_m}^{\text{out}}}, \quad (1)$$

其中量子相关度 $W_{XY}^{\text{out}} = \langle X^{\text{out}} Y^{\text{out}} \rangle - \langle X^{\text{out}} \rangle \langle Y^{\text{out}} \rangle$, X, Y 代表 X_s 或 X_m , X_s 为待测信号场的正交位相分量, X_m 为测量器(即 meter 系统)的正交位相分量。 W_{X_s, X_m} 用来描述系统的量子态制备能力, 可以证明: $0 \leq W_{X_s, X_m} \leq 2$ 。理想的量子态制备要求 $W_{X_s, X_m} = 0$ 。当 $0 < W_{X_s, X_m} < 1$ 时, 则表示系统具备非理想的量子态制备能力。当 $W_{X_s, X_m} > 1$ 时, 则称系统为经典系统, 不具备量子态制备能力。 $W_{X_s, X_m} = 1$ 为经典与量子系统的分界线。传递系数定义为

$$T_s = \frac{\text{SNR}_s^{\text{out}}}{\text{SNR}_s^{\text{in}}}, \quad T_m = \frac{\text{SNR}_m^{\text{out}}}{\text{SNR}_m^{\text{in}}}, \quad (2)$$

* 国家自然科学基金资助的课题。

SNR 为信噪比,下标 s, m 分别表示待测信号场与 meter 系统的探测场,上标 in, out 分别表示输入与输出。传递系数 $(T_s + T_m)$ 用来描述系统的量子光学分流能力,可以证明: $0 \leq T_s + T_m \leq 2$ 。在理想场合, $T_s + T_m = 2$, 它表示 meter 系统可以最大限度探测到信号场而不会引进任何对待测量的干扰。当 $1 < T_s + T_m < 2$ 时,系统具有非理想的量子光学分流能力。 $T_s + T_m < 1$ 为经典系统。 $T_s + T_m = 1$ 为经典与量子系统的分界线。当系统同时满足 $W_{X_s|X_m} = 0$ 和 $T_s + T_m = 2$ 时,称为理想的 QND 测量,而当系统同时满足 $0 < W_{X_s|X_m} < 1$ 和 $1 < T_s + T_m < 2$ 时,则称为非理想的 QND 测量。

在所有的 QND 测量方案中,分束器是最简单的一种。Grangier 等人^[2-4]已经证明当信号光与探测光都处于相干态时,无损耗的分束器处于经典耦合器与 QND 测量系统的分界点上,即 $T_s + T_m = 1$, $W_{X_s|X_m} = 1$ 。当探测光处于压缩相干态时,有可能实现 QND 测量。若探测光场为理想正交位相压缩态,则可实现理想的 QND 测量。但这些工作仅限于无损耗、无热噪声的理想情况,实际的测量过程显然必须考虑损耗与噪声的影响。本文将详细地研究在分束器有损耗、探测光为非理想压缩态以及待测信号含有噪声的场合下,分束器作为 QND 测量装置的实际效果,并给出这些损耗和噪声对量子态制备能力和量子光学分流能力的限制,这将为开展实验研究提供有力的依据。

2 信号光含有热噪声对 QND 测量的影响

采用分束器作为 QND 测量的装置,如图 1 所示, t 用来表示分束器对光场振幅的透过率, r 表示相应的反射率,且有 $t^2 + r^2 = 1$,分束器的输入输出关系可表示为

$$X_s^{\text{out}} = tX_s^{\text{in}} + rX_m^{\text{in}}, \quad (3a)$$

$$X_m^{\text{out}} = -rX_s^{\text{in}} + tX_m^{\text{in}}, \quad (3b)$$

定义光场正交位相分量的量子起伏 V_X 为

$$V_X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \quad (4)$$

若输入信号场含有热噪声,则此信号场的密度算符为^[5]

$$\rho = (1 - e^{-\lambda}) \exp[-\lambda(a^\dagger - w^*)(a - w)], \quad (5)$$

式中 $\lambda = \hbar\omega/KT$, 参数 w 和 w^* 由电场和磁场的平均值表示:

$$\langle p \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (w^* - w), \quad (6a)$$

$$\langle q \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (w^* + w). \quad (6b)$$

应用(5)式可以计算 X_s^{in} 的量子起伏 $V_{X_s^{\text{in}}}$,

$$V_{X_s^{\text{in}}} = 2/(e^\lambda - 1) + 1. \quad (7)$$

输入探测光处于压缩态, X_m^{in} 的量子起伏 $V_{X_m^{\text{in}}} = u$ 。

现在考察输入信号场的噪声对 QND 测量的影响。图 2 (a),(b) 分别给出条件起伏

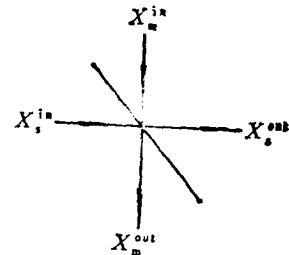


图1 分束器装置 输入为信号场 X_s^{in} 和探测场 X_m^{in} ; 输出为信号场 X_s^{out} 和探测场 X_m^{out}

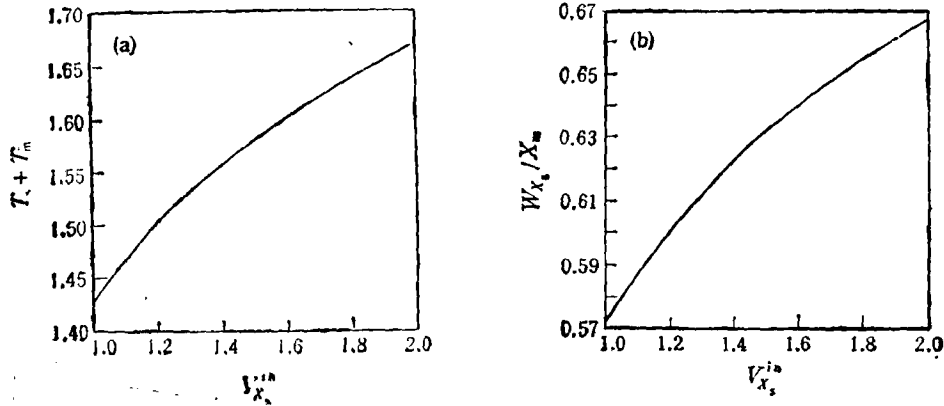


图2 分束器无损耗时,条件起伏(a)和传递系数(b)与输入信号光的量子起伏 $V_{X_s}^{in}$ 的关系

和传递系数随 $V_{X_s}^{in}$ 变化的曲线。图中 $r^2 = 0.5, \mu = 0.4$, 可以看出,随信号光的量子起伏 $V_{X_s}^{in}$ 增加,传递系数 $T_s + T_m$ 增大,条件起伏 $W_{X_s|X_m}$ 也增大,即系统的态制备能力降低,而量子光学分流能力增加。若 $\mu = 0$, $V_{X_s}^{in}$ 对 $T_s + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 都没有影响,系统仍为理想 QND 测量装置。

3 有损耗的分束器

本节将研究分束器的损耗对 QND 测量的影响。我们采用热库理论来描述分束器的损耗。由光场的朗之万方程:

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a(t) - Ka(t) + F(t), \quad (8a)$$

$$\frac{da^+}{dt} = i\omega a^+(t) - Ka^+(t) + F^+(t), \quad (8b)$$

得形式解:

$$a(t) = a(0)\exp[(-i\omega - K)t] + \int_0^t \exp[(-i\omega - K)(t - \tau)]F(\tau)d\tau, \quad (9a)$$

$$a^+(t) = a^+(0)\exp[(i\omega - K)t] + \int_0^t \exp[(i\omega - K)(t - \tau)]F^+(\tau)d\tau, \quad (9b)$$

其中 F, F^+ 为朗之万噪声算符,假定辐射场的热库处于温度为 T 的热平衡体系,其平均光子数为 $\bar{n}$,在马尔可夫近似下, F, F^+ 具有如下性质:

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0, \quad \langle F^+(t) \rangle = 0, \\ \langle F^+(t)F^+(t') \rangle &= 0, \quad \langle F(t)F(t') \rangle = 0, \\ \langle F^+(t)F(t') \rangle &= 2K\bar{n}\delta(t - t'), \\ \langle F(t)F^+(t') \rangle &= 2K(\bar{n} + 1)\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (10)$$

(9a)式加(9b)式得

$$X(t) = a(t) + a^+(t) = gX(0) + G, \quad (11)$$

其中

$$g = \exp(-Kt), \quad (12)$$

$$G = \int_0^t \exp[(-i\omega - K)(t - \tau)] F(\tau) d\tau + \int_0^t \exp[(i\omega - K)(t - \tau)] F^+(\tau) d\tau, \quad (13)$$

g 是与损耗有关的实参数, $0 \leq g \leq 1$, g 愈大, 损耗愈小, $g = 1$ 对应无损耗, G 可理解为广义噪声算符。

由(10)和(11)式可得

$$\langle G \rangle = 0, \quad (14)$$

$$\langle G^2 \rangle = (2\bar{n} + 1)(1 - g^2). \quad (15)$$

(9)–(13)式中的 t 表示时间。在以后的计算中, 我们令常温下热库的平均光子数为零。以下利用(12), (14), (15)式分析有损耗的分束器的输入输出关系。考虑两种情况:

(1) 探测光直接到达反射面。如图 3 所示, 信号光首先与透射过程的相应热库作用, 发生透射损耗, 使输入信号光变为

$$X_i^{in'} = g_{1t} X_i^{in} + G_{1t}. \quad (16)$$

在反射面上, 探测光与信号光 $X_i^{in'}$ 发生模式耦合, 并伴随有反射损耗, 于是信号光与探测光分别变为 $X_i^{in''}$, $X_m^{in'}$:

$$X_i^{in''} = t X_i^{in'} - r(g_{2t} X_m^{in} + G_{2t}), \quad (17a)$$

$$X_m^{in'} = r(g_{4t} X_i^{in'} + G_{4t}) + t X_m^{in}. \quad (17b)$$

最后, 探测光与透射过程相应的热库作用, 发生透射损耗, 变为

$$X_m^{in''} = g_{3t} X_m^{in'} + G_{3t}, \quad (18)$$

上述诸式中 $X_i^{in''}$ 和 $X_m^{in''}$ 实际上就是有损耗的分束器的输出信号光和输出探测光, 它们分别满足下列方程:

$$X_i^{out} = X_i^{in''} = t g_{1t} X_i^{in} + t G_{1t} - r g_{2t} X_m^{in} - r G_{2t}, \quad (19a)$$

$$X_m^{out} = X_m^{in''} = r g_{3t} g_{4t} g_{1t} X_i^{in} + r g_{3t} g_{4t} G_{1t} + r g_{3t} G_{4t} + t g_{1t} X_m^{in} + G_{3t}, \quad (19b)$$

g 与 G 的下标 1, 2, 3, 4 代表不同热库, t , r 分别代表透射与反射。

图 4 为条件起伏和传递系数随损耗变化的曲线, 图中取 $r^2 = 0.5$, $\mu = 0.4$ 。为了分别考虑反射损耗与透射损耗的影响, 令 $g_{1t} = g_{3t} = 1$, $g_{2t} = g_{4t} = g_r$, 得出图中虚线表示的 $T_s + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 随 g_r 变化的曲线。同样令 $g_{2t} = g_{4t} = 1$, $g_{1t} = g_{3t} = g_t$, 得出图中实线表示的 $T_s + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 随 g_t 变化的曲线。结果表明, 随 g_t, g_r 的增加, 即损耗减小, 传递系数 $T_s + T_m$ 增加, 条件起伏 $W_{X_s|X_m}$ 减小,

可见损耗使 QND 测量的质量降低。但透射损耗和反射损耗对两个参数的影响程度不同, 透射损耗对传递系数的影响较大, 而反射损耗对条件起伏的影响较大。因此, 如果 QND 测量系统的主要目的是为了实现量子态制备, 应当力图减小反射损耗; 如果为了获取被测系统的信息, 则应力图减小透射损耗。如果目的是实现 QND 测量, 则对两种损

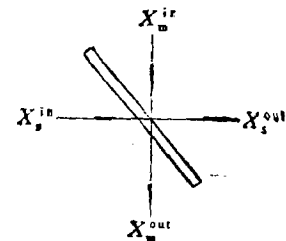


图3 分束器装置 探测光直接到达反射面

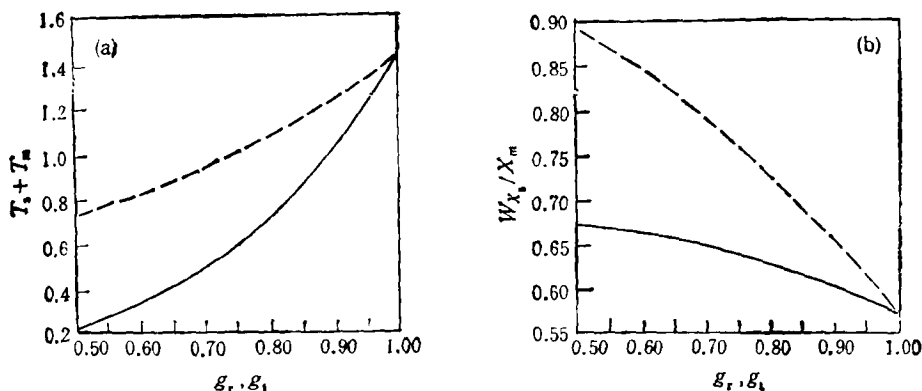


图4 在图3装置下,条件起伏(a)和传递系数(b)与损耗的关系 实线表示透射损耗;虚线表示反射损耗

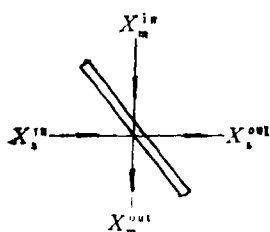


图5 分束器装置 信号光直接到达反射面

耗均要加以限制。

(2) 信号光直接到达反射面,如图5所示。探测光的 X_m^{in} 首先与透射过程的热库作用,产生透射损耗,然后在反射面上发生与信号场的模式耦合,并伴随有反射损耗,最后信号光与透射的热库作用,产生透射损耗。类似(19)式的推导,可求得这种情况下分束器的输入输出关系为

$$X_s^{out} = r g_{st} g_{tr} g_{lt} X_m^{in} + r g_{st} g_{tr} G_{lt} + r g_{st} G_{tr} + t g_{st} X_s^{in} + G_{st}, \quad (20a)$$

$$X_m^{out} = t g_{lt} X_m^{in} + i G_{lt} - r g_{st} X_m^{in} - r G_{st}. \quad (20b)$$

图6表示损耗对 $T_r + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 的影响,图中 $r^2 = 0.5$, $u = 0.4$ 。令 $g_{lt} = g_{st} = 1$, $g_{tr} = g_{tr} = g_r$, 得出图中虚线表示的 $T_r + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 随 g_r 变化的曲线。同样令 $g_{tr} = g_{tr} = 1$, $g_{lt} = g_{lt} = g_t$, 得出图中实线表示的 $T_r + T_m$ 和 $W_{X_s|X_m}$ 随 g_t 变化的曲线。结果证明,随 g_t, g_r 减小, $T_r + T_m - g_t$ 下降的速度比 $T_r + T_m - g_r$ 大, $W_{X_s|X_m} - g_t$ 上升的速度也比 $W_{X_s|X_m} - g_r$ 大。可见,透射损耗对传递系数和条件起伏的影响都比反射

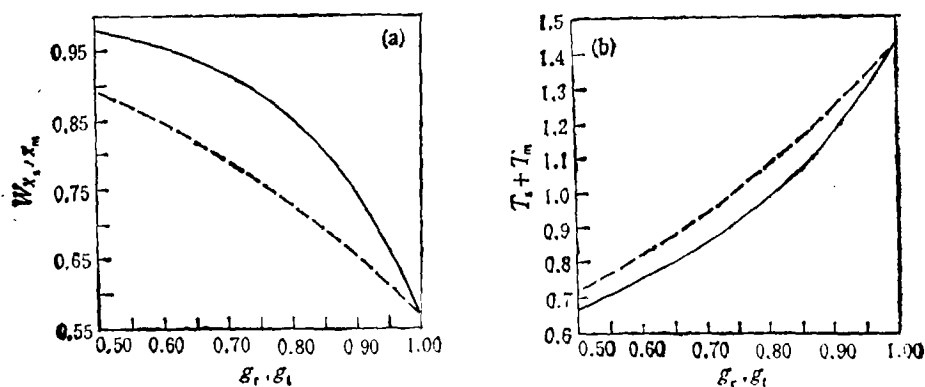


图6 在图5装置下,条件起伏(a)和传递系数(b)与损耗的关系 曲线说明同图4

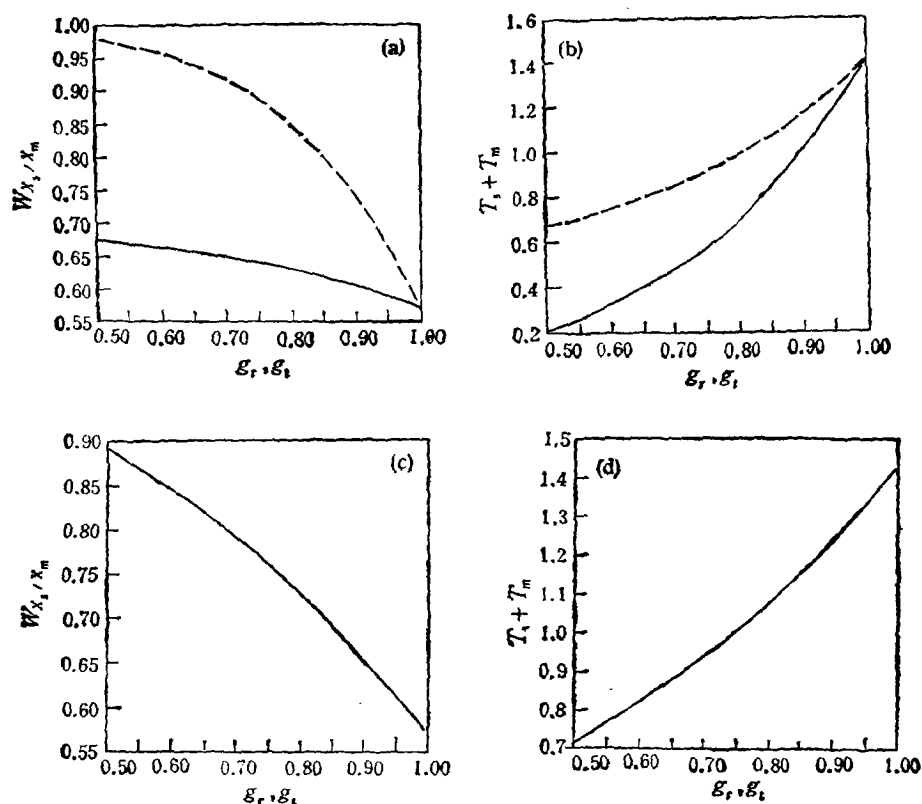


图7 在图3, 图5两种装置下, 透射损耗((a),(b))和反射损耗((c),(d))对条件起伏和传递系数的影响比较
实线对应图3装置, 虚线对应图5装置; (c), (d)中实线虚线重合

损耗的影响大, 所以这种情况下减小透射损耗在测量系统中更加重要。

现在考虑两种情况下, 反射损耗与透射损耗的影响有什么不同。图7给出条件起伏和传递系数随损耗变化的曲线。图中取 $r^2 = 0.5$, $\mu = 0.4$ 。令 $g_{1t} = g_{3t} = 1$, $g_{2r} = g_{4r} = g_r$, 得出图中 $T_t + T_m - g_r$ 和 $W_{x_1|x_m} - g_r$ 曲线。同样令 $g_{2r} = g_{4r} = 1$, $g_{1t} = g_{3t} = g_t$, 得出图中 $T_t + T_m - g_t$ 和 $W_{x_1|x_m} - g_t$ 曲线, 其中实线对应图3的装置, 虚线对应图5的装置。由图7的结果可以看出, 两种情况下, 反射损耗的影响相同, 而透射损耗对传递系数的影响在第一种情况下较大, 对条件起伏的影响在第二种情况下较大, 所以当透射损耗较大时, 如果要增加测量系统的态制备能力, 应让探测光直接到达反射面(取图3的方式); 如果要提高测量效率, 则应让信号光直接到达反射面(即图5的方式)。

最后假定 $g_{1t} = g_{3t} = g_{2r} = g_{4r} = g$, 考虑当损耗一定时, 探测信号至少要压缩到什么程度, 系统才能进入 QND 测量区域, 即 $T_t + T_m \geq 1$, 且 $W_{x_1|x_m} \leq$

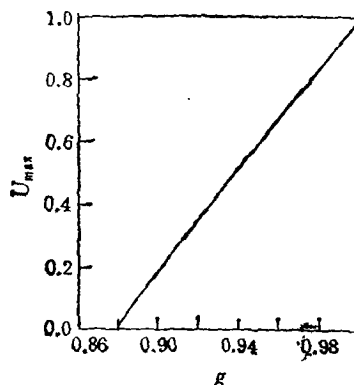


图8 $r^2 = 0.5$ 时, 为了系统进入 QND 测量区域, 允许输入探测光最大量子起伏 $U_{\max}$ 与参数 g 的关系

1. 图 8 给出当 $r^2 = 0.5$ 时, 系统进入 QND 测量区域所允许的输入探测光的最大量子起伏 $\mu_{\max}$ 与参数 g 的关系。结果表明, $\mu_{\max}$ 与参数 g 基本上是线性关系。当 $g = 0.88$, 即透射与反射损耗达到了 12% 时, 则 $X_{\text{in}}^{\text{in}}$ 必须达到完全压缩, 才能实现 QND 测量。若输入探测光为压缩态, 其量子起伏达到了 $\mu = 0.3-0.4$, 这时损耗必须小于 2% 才能实现 QND 测量。

4 结 语

由本文的分析可以得出如下结论: (1) 当输入探测光为完全压缩态, 分束器无损耗时, 可以实现理想 QND 测量。(2) 无损耗的分束器作为 QND 测量系统, 在输入探测光为非完全压缩态时, 分束器的透射率越高, 系统的量子态制备能力越弱, 而传递系数则在 $r^2 = 0.5$ 时达到极大值。(3) 分束器的损耗对 QND 测量的效果影响甚大, 损耗必须低于某个值, 才有可能实现 QND 测量。当输入探测光为理想压缩时, 损耗必须小于 12%; 当输入探测光的量子起伏 $\mu = 0.3-0.4$ 时, 损耗必须小于 2%, 才能实现非理想的 QND 测量。(4) 分束器的透射损耗和反射损耗的影响不同, 而且其影响还依赖于分束器反射面的位置。在图 3 的装置中, 反射损耗对量子态制备能力影响较大, 而透射损耗对传递系数的影响较大。在图 5 的装置中, 透射损耗对两个参数的影响都比反射损耗大。上述两种装置的主要差别表现在透射损耗有不同的影响。(5) 输入信号光不是相干态而是含有热噪声的信号场, 会导致量子态制备能力降低, 但传递系数则相对提高。

[1] 张晓龙, 郭光灿, 彭堃巍, 物理学进展, 14(2)(1994), 173.

[2] J. F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J. M. Courty and S. Reynaud, *Appl. Phys.*, B55 (1992), 291.

[3] B. Yurke, *J. Opt. Soc. Am.*, B2 (1985), 732.

[4] P. Grangier, J. M. Courty, S. Reynaud, *Opt. Commun.*, 89 (1992), 99.

[5] 郭光灿, 量子光学(高等教育出版社, 北京, 1990).

INFLUENCE OF LOSS AND NOISE ON BEAM SPLITTER'S QUANTUM NONDESTRUCTIVE MEASUREMENT

XUE QIU-HAN GUO GUANG-CAN

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 5 May 1994)

ABSTRACT

We use quantum theory to analyse the dependence of quantum state preparing ability and quantum optical tapping ability on a beam splitter's transmitting loss and reflecting loss when the losing beam splitter acts as a quantum nondestructive (QND) measurement device. We give out the maximal limit of the beam splitter's loss when the input probe is a nonideal squeezed light and the system can implement QND measurement. We also illustrate how fluctuations and noise of input signal influence the effectiveness of QND measurement.

PACC: 4250