

# 非退化的 Ashtekar 理论中的正能证明

沈 月 林

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

龚 云 贵

(中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

(1994年3月17日收到)

由于 Ashtekar 理论中所有动力学约束均为第一类, 其哈密顿量可明确写出, 当加上渐近平坦流形的边界修正后, 便得到引力能量的积分表述. 特殊的时空分解及 3-标架选取将给出 Ashtekar 理论的正能证明.

PACC: 0420; 0450

## 1 引 言

引力的能量正定性是一个有着很久历史的问题, 直至 70 年代末, Schoen 和 Yau<sup>[1]</sup> 利用拓扑学给出了第一个完整的证明, 由于其高度的数学技巧性, 物理学工作者难以接受. Witten<sup>[2]</sup> 利用旋量给出了一个简洁的证明, 关于他的证明也可见 Faddeev<sup>[3]</sup> 的证明. 最近 Nester<sup>[4]</sup> 给出了一个局域性的证明, 这种张量形式的能量表述易为物理学工作者所接受, 但是由于引力体系的约束具有复杂的代数关系, Nester 所给出的哈密顿量是含糊的. 本文考察了 Ashtekar 理论<sup>[5]</sup>, 该理论优越性在于所有约束均为第一类, 这为我们定义体系的哈密顿量提供了一种直接的途径. 但是这种理论形式并不是 Einstein 理论的简单重述, 而是对广义相对论的推广, 其相空间可以扩展到度规退化区域, 然而退化区域的物理及数学意义均还不清楚, 文献[6]发现 Ashtekar 理论具有负能解, 这自然是一个值得深究的结果. 基于此, 我们要考察此理论的能量问题, 但仅限于理论的非退化区.

本文简述了 Ashtekar 理论, 给出了 Ashtekar 理论的总能量表达式, 当作特殊的时空分解后, 一个自然导致正能的条件将给出, 通过选取特殊的标架, 证明上述条件总能满足.

## 2 复引力理论

最近, 引力理论取得了革命性的进展, Ashtekar 通过一个正则变换将引力的约束表示成一个多项式约束, 从而对引力的正则量子化方案产生了深刻的影响<sup>[7]</sup>.

在引力的 Palatini 表述中,基本变量是标架  $e$  及自旋联络  $\omega$ , 引力作用量为

$$S[e, \omega] = \int d^4x e e^{\mu I} e^{\nu J} R_{\mu\nu IJ}, \quad (1)$$

其中指标  $\mu, \nu$  为时空指标,  $I, J$  为标架指标, 取值均为 0—3。标架指标按  $\eta_{IJ} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  升降, 时空指标无升降, 从而无需逆度规, 这正是此理论的特点, 因为建立无度规的引力理论正是人们所期待的。上式中  $e^{-1} = \det e^{\mu I}$ , 曲率张量  $R_{\mu\nu IJ}$  定义为

$$R_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu A_\nu^{IJ} - \partial_\nu A_\mu^{IJ} + A_\mu^{IM} A_\nu^J{}_M - A_\nu^{IM} A_\mu^J{}_M, \quad (2)$$

其中复联络  $A_\mu^{IJ}$  取自旋联络的自对偶部分,

$$A_\mu^{IJ}[\omega] = \omega_\mu^{IJ} - \frac{1}{2} i e_{MN}^{IJ} \omega_\mu^{MN}. \quad (3)$$

从群论观点看, 由于  $SO(3, 1) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$ , 所以

$$R_{\mu\nu IJ}(+A + -A) = R_{\mu\nu IJ}(+A) + R_{\mu\nu IJ}(-A), \quad (4)$$

即来源于  $+A$  与  $-A$  的曲率无交叉项 ( $+A$  与  $-A$  分别为自对偶与反自对偶联络,  $\omega = +A + -A$ ), 由于自对偶与反自对偶联络脱耦, 所以只讨论其一。为过渡到正则形式, 将时空作 ADM 的 3+1 分解。此时理论明显的协变性被破坏, 但由于这种分解本身的任意性, 体系仍具有协变性, 因而在后面的证明中选取了特殊的超曲面及标架形式<sup>[7-9]</sup>, 以下用  $a = 1, 2, 3$  代表空间指标。

作如下 ADM 分解:

$$N^a = e_i^a e^{0i} N^i, \quad (5)$$

$$N = e / \sqrt{q}, \quad (6)$$

$$E_i^a = e_i^a + N^a e_i^0. \quad (7)$$

按惯例,  $q$  为三维空间度规  $q_{ab}$  的行列式,  $N$  和  $N^a$  分别为 Lapse 和 Shift 函数。再引入

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{q} E_i^a. \quad (8)$$

同时定义

$$e^{IJK} = e_L^I e^{LIJK} N, \quad (9)$$

$$A_a^I = e_{jK}^I A_a^{jK} = e_{jK}^{0I} A_a^{jK}, \quad (10)$$

其中已选取时性规范条件  $e_i^0 = 0 (i = 1, 2, 3)$ , 最后得作用量为

$$S = \int d^4x i A_a^i \tilde{E}_i^a - i A_a^i C_i + i N^a C_a - \tilde{N} C, \quad (11)$$

其中  $\tilde{N} = N / \sqrt{q}$ 。

从上式看出, 体系的动力学变量只有  $\tilde{E}_i^a$ , 其它变量  $\tilde{N}, N^a, A_a^i$  均成了拉氏乘子。于是体系有如下三个约束:

$$C_i = \mathcal{D}_a \tilde{E}_i^a, \quad (12)$$

$$C_a = \tilde{E}_i^b F_{ab}^{ij}, \quad (13)$$

$$C = \tilde{E}^a \tilde{E}_b^i F_{ab}^{ij}, \quad (14)$$

其中  $F_{ab}^{ij}$  是由三维空间中复联络  $A_a^i$  定义的曲率张量,  $F_{ab}^{ij} = e_{ik}^i F_{ab}^{jk}$ ,  $\mathcal{D}_a$  为关于  $A_a^i$  的协变导数。注意到以上三个约束全部为第一类<sup>[1]</sup>, 便可写出体系哈密顿量为

$$H(\tilde{E}, A) = \int N C - i \int N^a C_a + i \int A_b C_i. \quad (15)$$

为了以后方便起见, 写出  $A_i^j$

$$A_i^j = e_{ik}^j A_a^{ik} = e_{ik}^j \dot{\omega}_a^{ik} - i \omega_a^{ik}. \quad (16)$$

该式也叫实性条件。而体系中对广义坐标  $\tilde{E}_i^j$  的广义动量  $P_i^j = i A_i^j$ 。

### 3 能量正定性条件

由(12)–(14)式中的多项式表述, 看到标架退化的扩张是允许的, 但下面的讨论只限于非退化情形。此时 Ashtekar 理论在经典意义上是广义相对论的新表述。对于一个渐近平坦流形, 为使哈密顿量成为总的能量表达式, 即要求哈密顿量在边界可微, (15)式中的哈密顿量应加一表面项<sup>[5,6]</sup>

$$H_{\text{surf}} = N^a P_a, \quad (17)$$

其中

$$N P_0 = - \int_{\partial \Sigma} 2 N e^{ijk} \tilde{E}_i^j \tilde{E}_k^b A_{b,i} dS_a, \quad (18)$$

$$N^a P_a = i \int_{\partial \Sigma} 2 N^a \tilde{E}_i^b A_{b,i} dS_a, \quad (19)$$

$dS_a = \frac{1}{2} e_{ab,c} dx^b \wedge dx^c$  为边界上面元, 方括号表示关于指标反对称化。

由于在此动力学体系的约束面上, 上述哈密顿量不能保证时间演化的厄密性, 选择合理的拉氏乘子, 或在哈密顿量中再加上如下的约束项将保证厄密的时间演化<sup>[9]</sup>。

$$\bar{C} = \int_{\Sigma} - (D_a N) \tilde{E}_i^j (\mathcal{D}_a \tilde{E}_i^j), \quad (20)$$

其中协变算子  $D_a$  和  $\mathcal{D}_a$  定义如下:

$$D_a = \partial_a + [\omega_a, ], \quad \mathcal{D}_a = \partial_a + [A_a, ],$$

于是得到体系的总能量表述

$$\begin{aligned} H_T(\tilde{E}, A) = & \int_{\Sigma} N C - i \int_{\Sigma} N^a C_a + i \int_{\Sigma} A_b C_i - \int_{\partial \Sigma} 2 N e^{ijk} \tilde{E}_i^j \tilde{E}_k^b A_{b,i} dS_a \\ & + i \int_{\partial \Sigma} (N^a \tilde{E}_i^b - N^b \tilde{E}_i^a) A_{b,i} dS_a - \int_{\Sigma} (D_a N) \tilde{E}_i^j (\mathcal{D}_a \tilde{E}_i^j), \end{aligned} \quad (21)$$

由于  $N$  及  $N^a$  均为拉氏乘子, 可通过适当的坐标系选择, 使得

$$N = 1/\sqrt{q}, \quad N^a = 0, \quad (22)$$

于是(21)式变为

$$H_T(\tilde{E}, A) = \int \frac{1}{\sqrt{q}} C + i \int A_b C_i - 2 \int_{\partial \Sigma} \frac{1}{\sqrt{q}} e^{ijk} \tilde{E}_i^j \tilde{E}_k^b A_{b,i} dS_a. \quad (23)$$

将上式中的面积分改为体积分, 并取值在约束面(12)式上, 得到如下表达式:

$$H_T(\tilde{E}, A) = \int_{\Sigma} N (\tilde{E}_i^j \tilde{E}_j^b \bar{A}_b^i A_a^i - \tilde{E}_i^j \tilde{E}_j^b \bar{A}_a^i A_b^i). \quad (24)$$

由于  $N = 1/\sqrt{q}$  恒正, 只须证明哈密顿密度

$$\mathcal{H}_T(\tilde{E}, A) = \tilde{E}_i^* \tilde{E}_j^* \bar{A}_i^* A_j - \tilde{E}_i^* \tilde{E}_j^* \bar{A}_i^* A_j \quad (25)$$

正定即为本文的目标. 等效地即需证明, 存在特殊的标架与特殊的超曲面选取使

$$\mathcal{H}_T(E, A) = E_i^* E_j^* \bar{A}_i^* A_j - E_i^* E_j^* \bar{A}_i^* A_j \quad (26)$$

局域正定, 其中  $\bar{A}_i^*$  为  $A_i^*$  的复共轭. 为此定义  $A_{ij} = E_i^* A_{bj}$ , 则上式即为

$$\mathcal{H}_T(E, A) = \text{Tr}(\bar{A}A) - \text{Tr}\bar{A}\text{Tr}A. \quad (27)$$

从(27)式可见, 只要能取到  $A_{ij}$  对称无迹, 则能量必为正定. 而从  $A_{ij}$  定义有

$$\begin{aligned} A_{ij} &= E_i^* A_{bj} = e_i^b (e_{jkl} \omega_b^{kl} - i \omega_{ij}^0) \\ &= e_{jkl} \omega_i^{kl} - i e_i^b \omega_{bj}^0. \end{aligned} \quad (28)$$

下面将(28)式中  $A_{ij}$  的实部与虚部分开考虑.

首先注意到  $e_i^b \omega_{bj}^0$ , 据 Palatini 理论, 此项正是在标架形式中的外曲率  $K_{ij}$ , 在 Riemann 几何中,  $K_{ij}$  自然对称. 事实上, 如将(12)式中的实部与虚部分开则有

$$\partial_i \tilde{E}_j^* + \omega_{sij} \tilde{E}^{sj} = 0, \quad (29)$$

$$\omega_{ij}^{0i} E_{ij}^* = 0. \quad (30)$$

从(30)式便知  $K_{ij}$  为对称, 再如要求  $K = K_{ij} q^{ij}$  无迹, 即要求外标曲率为零, 这样的超曲面被称为最大超曲面, 这样的超曲面分解总是能取到<sup>[10]</sup>. 因而虚部能做到对称无迹. 下面主要考虑实部, 即考虑怎样通过适当选取标架, 使得(28)式中的实部  $e_{jkl} \omega_i^{kl}$  关于指标  $(ij)$  为对称无迹. 由于选取了标架为基本变量, 因而整个体系的对称性被扩大, 在超曲面上有六个洛伦兹自由度, 在选取时性规范后, 还剩下三个关于标架的转动自由度.

为清楚起见, 将  $\omega_{ikl}$  按张量的不可约表示分解为一个标量, 一个矢量及一个对称的二阶张量, 即

$$\omega_{iik} = q^{il} e_{ijk} + \frac{1}{2} (\delta_i^l q_k - \delta_k^l q_i) + \frac{1}{3} q e_{ijk}, \quad (31)$$

其中  $q$  为标量,  $q_i$  为矢量,  $q^{il}$  为对称无迹张量. 从而  $e^{ijkl} \omega_{ikl}$  对称无迹等价于

$$q_i = 0, \quad q = 0. \quad (32)$$

于是一个完整的正能定理证明将通过证明(32)式的存在性而实现.

#### 4 特殊的正交标架<sup>[11]</sup>

在此称满足条件(32)式的标架为特殊的标架. 为方便起见, 采用微分形式来考察活动标架. 对于无挠几何 (Riemann 几何), 自旋曲率由余标架  $\theta^i$  决定

$$d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j = 0, \quad (33)$$

其中  $\theta^i$  及  $\omega_j^i$  均为 1-形式.

条件(32)式可简单表述为如下方程:

$$d * q = 0, \quad (34a)$$

$$d \tilde{q} = 0, \quad (34b)$$

其中  $*$  为对偶算子.

$$\tilde{q} = q_i \theta^i = \omega_{ij}^i \theta^j, \quad (35)$$

$$q = \frac{1}{2} \omega_{ijk} \theta^i \wedge \theta^j \wedge \theta^k. \quad (36)$$

对于渐近平坦流形, 边界上  $q = 0$ .

为寻求特殊的标架  $\theta^i$  使(34)式有解, 等价于证明对于给定的任意标架  $\theta^i$ , 总能通过一个转动使  $\theta'^i = R^i_j \theta^j$  满足

$$\begin{aligned} d * q' &= 0, \\ d \tilde{q}' &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} q' &= q + \theta_i \wedge R^i_j dR^j_k \wedge \theta^k, \\ \tilde{q}' &= \tilde{q} + R^i_j R^j_k d\theta^k. \end{aligned} \quad (38)$$

固定  $\theta^i$ , 对于一个转动  $R^i_j$ , 上述方程构成一个非线性二阶椭圆系统. 对于非线性系统, 解的存在性及唯一性是很困难的问题, 因而如下的证明并不是严密的. 先研究此问题的线性化. 对于一个无限小转动

$$R^i_j = \delta^i_j + \xi^i_k A^k_j, \quad (39)$$

相应的有

$$q' = q - 2 \{ d * A + A \wedge * \tilde{q} \}, \quad (40)$$

$$\tilde{q}' = \tilde{q} - * (dA - A_k d\theta^k), \quad (41)$$

其中  $A = A_i \theta^i$ .

从上述线性化形式, 将证明方程(34)有解. 设一标架  $\theta^i$  对应于  $d * q$  及  $d \tilde{q}$  很小, 则一个无穷小转动  $A$  将产生一个  $\theta'^i$  满足(37)式, 其条件为

$$\begin{aligned} d * d * A + d * (A \wedge * \tilde{q}) &= d \left( \frac{1}{2} * q \right), \\ d * dA - d * (A_k d\theta^k) &= d \tilde{q}. \end{aligned} \quad (42)$$

利用 Hodge 算子  $\delta = (-1)^i * d *$ , 上式成为

$$\begin{aligned} d \delta A - d * (A \wedge * \tilde{q}) &= d \left( -\frac{1}{2} * q \right), \\ \delta dA - \delta (A_k d\theta^k) &= \delta (* \tilde{q}). \end{aligned} \quad (43)$$

两者合并起来即为下椭圆微分方程

$$\begin{aligned} LA &:= \Delta A - \delta (A_k d\theta^k) - d * (A \wedge * \tilde{q}) \\ &= \delta (* \tilde{q}) + d \left( -\frac{1}{2} * q \right), \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $\Delta = d\delta + \delta d$  为 Laplace-Beltrami 算子. 在一定的边界条件下  $\Delta A = \rho$  解唯一, 方程(44)至少在  $d\theta^i$  不太大情形有唯一解, 其解可通过迭代得到

$$\begin{aligned} \Delta A^0 &= \delta (* \tilde{q}) + d \left( -\frac{1}{2} * q \right), \\ \Delta A^{n+1} &= \delta (A^n d\theta^i) + d * (A^n \wedge * \tilde{q}), \\ A &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \end{aligned} \quad (45)$$

由渐近条件  $A^m \approx \frac{1}{r^{m+1}}$  知  $A$  是收敛级数, 且  $A_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \rightarrow 0$ 。所以上方程解唯一。对于自伴椭圆微分方程唯一性即意味存在性, 因此可知方程(34)的解总是存在的, 从而完成了能量正定性证明。

## 5 讨 论

1. 上面的论证中选择了自旋联络的自对偶截面, 对于其反自对偶截面, 可得到同样结论, 从而在整个自旋联络上均能通过选择特殊的规范和超曲面及特殊的标架, 在局域水准上给出了正能证明。

2. 对于 Ashtekar 理论的退化区域, 上述论证不再成立, 希望在该领域作进一步研究。

感谢张元仲、Nester 教授和丁浩刚教授的有益讨论。

- [1] R. Schoen and S. T. Yau, *Commun. Math. Phys.*, **65**(1979), 45.
- [2] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **80**(1981), 381.
- [3] L. D. Faddeev, *Sov. Phys. Usp.*, **25**(1982), 3.
- [4] J. M. Nester, *Phys. Lett.*, **A139**(1989), 112.
- [5] A. Ashtekar, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1587.
- [6] M. Varadajan, *Class. and Quantum Gravity*, **8**(1991), L235.
- [7] C. Rovelli, *Class. and Quantum Gravity*, **8**(1991), 1613.
- [8] T. Jacobson and L. Smolin, *Class. and Quantum Gravity*, **5**(1988), 583.
- [9] J. M. Nester, *Mod. Phys. Lett.*, **A6**(1991), 2655.
- [10] R. Burtnik, *Commun. Math. Phys.* **94**(1984), 155.
- [11] J. M. Nester, *J. Math. Phys.* **30**(1989), 624.

## POSITIVE ENERGY IN NONDEGENERATE/ ASHTEKAR THEORY

SHEN YUE-LIN

(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

GONG YUN-GUI

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica Beijing 100080*)

(Received 17 March 1994)

### ABSTRACT

The explicit Hamiltonian of Ashtekar theory can be given due to its first-class constraints. Considering the modification of the asymptotic flat boundary, we obtain the integral expression for the total energy of gravity. Then a new positive energy proof is completed when one chooses the ADM space-time splitting and the special three vierbeins.

**PACC:** 0420; 0450