

双参数动力学系统中混沌的控制

童培庆 何金勇

(南京师范大学物理系, 南京 210097)

(1994年8月23日收到)

研究了双参数动力学系统中混沌行为的控制问题, 提出了控制混沌的参数微调方法, 给出了参数变化方程, 然后应用到两个例子: Henon 映射和强迫布鲁塞耳振子, 得到了很好的控制结果, 并且与单参数的 Ott, Grebogi 和 Yorke (OGY) 方法进行了比较, 最后对有关问题进行了讨论.

PACC: 0545

1 引 言

自从1990年 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出控制混沌的方法(缩写为 OGY 方法)^[1]以来, 非线性动力学系统中混沌行为的控制问题已日益受到广大科学工作者(特别是物理学工作者)的重视^[1-16]. 这是因为, 一方面, 作为非线性系统共性之一的混沌已被发现出现在大量的非线性系统的动力学行为之中, 然而由于混沌运动对初始条件的敏感性, 给很多系统(特别是工程应用系统)带来麻烦, 为此, 人们设法避免混沌; 另一方面, 由于混沌运动中含有各种失稳的周期运动, 如果能够找到方便而有效的控制混沌的方法, 人们就可以充分地利用混沌(例如利用控制混沌来产生周期信号的能力可用来作新型信号发生器). 另外, 混沌的控制与目前非线性科学中较活跃的研究课题, 如混沌的识别、混沌的同步化等有密切关系. 正是由于这些原因, 混沌的控制已成为非线性科学研究领域中非常活跃的课题之一.

OGY 方法是一种参数微调的方法, 其物理基础是, 在混沌吸引子中失稳的各种周期轨道是稠密的. 当系统处于混沌状态时, 由于遍及性, 系统在相空间的状态点可以任意靠近失稳的不动点. 一旦状态点靠近不动点, 就通过参数的改变使系统的状态点运动到失稳不动点的稳定流形上, 从而达到控制混沌而产生周期运动. OGY 方法提出之后, 很快被应用到实验系统^[7-11]和理论模型^[12]中, 取得了满意的结果. 同时, OGY 的改进方法以及其它的方法也逐渐提了出来^[13-15], 倪皖邈等^[13]提出了一维参数自适应方法, 本文作者之一将其推广到二维及高维系统中^[14], 此方法与 OGY 方法相比, 除了能够将系统的混沌运动控制到周期运动, 还能够在周期吸引子时将系统控制到低周期的失稳周期状态上. 此外, 胡岗等^[15, 16]还研究了耦合映象格子(coupled map lattice)及偏微分方程系统中时空

混沌的控制问题。但至今为止,所有的讨论仅限于单个参数情况,本文的目的是研究多个参数系统(特别是双参数系统)中混沌行为的控制问题。

2 参数微调方程

考虑一个二维双参数动力学系统(高维系统可一样讨论):

$$x_{n+1} = f_x(x_n, y_n, p, q), \quad y_{n+1} = f_y(x_n, y_n, p, q), \quad (1)$$

其中 p, q 是系统的参数。

下面讨论方法的基本思想与 OGY 方法相类似。首先,当参数 p, q 取 p_0, q_0 时,系统处于混沌运动状态,那么系统(1)式的不动点 $x_i = (x_i, y_i)$

$$x_i = f_x(x_i, y_i, p_0, q_0), \quad y_i = f_y(x_i, y_i, p_0, q_0) \quad (2)$$

是失稳的。在任何初始条件下,略去瞬态过程之后,系统的状态点 $x_n = (x_n, y_n)$ 在相空间中构成混沌吸引子,由于遍及性,总有一些点靠近 x_i , 设 $x_n = (x_n, y_n)$ 靠近 x_i (即 $d(x_n, x_i) = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2} < \varepsilon$, ε 是一小量)。类似于 OGY 方法,改变系统的参数 p, q , 使系统状态点 x_{n+1} 落在 x_i 的稳定流形上。在 x_i 点附近线性展开后有

$$x_{n+1} - x_i = (\lambda_e f_i + \lambda_n e_n f_n) \cdot (x_n - x_i) + g_p \Delta p + g_q \Delta q, \quad (3)$$

其中 $\lambda_e (|\lambda_e| > 1), \lambda_n (|\lambda_n| < 1)$ 是系统(1)式在 x_i 处的线性化矩阵 (Jacobi 矩阵) 的本征值, e_n, e_i 是相应的本征矢量, f_n, f_i 是其协变矢量, 即 $f_i \cdot e_i = f_n \cdot e_n = 1, f_n \cdot e_i = f_i \cdot e_n = 0$; $g_p = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p}, \frac{\partial y_i}{\partial p} \right) \Big|_{p_0, q_0}$, $g_q = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q}, \frac{\partial y_i}{\partial q} \right) \Big|_{p_0, q_0}$ 。由条件 $f_n \cdot (x_{n+1} - x_i) = 0$ 得

$$g_p \cdot f_n \Delta p + g_q \cdot f_n \Delta q = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} (x_n - x_i) \cdot f_n. \quad (4)$$

方程(4)中含有两个参数改变量 $\Delta p, \Delta q$, 因而 $\Delta p, \Delta q$ 无法从(4)式中完全确定,为了求得 Δp 和 Δq , 必须有另外的条件。考虑到在控制过程中参数 $\Delta p, \Delta q$ 要尽可能的小,这样对应参数 $p_0 + \Delta p, q_0 + \Delta q$ 的系统与对应参数 p_0, q_0 的系统的运动状态定性上差别不大。为此,选择如下的辅助条件, $(\Delta p)^2 + (\Delta q)^2$ 取极小值,为了避免失稳性。考虑如下两种情况:

a) $|g_p \cdot f_n| > |g_q \cdot f_n|$, 此时由(4)式得

$$\Delta p = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \frac{(x_n - x_i) \cdot f_n}{g_p \cdot f_n} - \frac{g_q \cdot f_n}{g_p \cdot f_n} \Delta q.$$

结合辅助条件得

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \frac{(x_n - x_i) \cdot f_n}{g_p \cdot f_n} - \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \frac{(x_n - x_i) \cdot f_n}{g_p \cdot f_n + g_q \cdot f_n} \left(\frac{g_q \cdot f_n}{g_p \cdot f_n} \right), \\ \Delta q &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \frac{(x_n - x_i) \cdot f_n}{g_p \cdot f_n + g_q \cdot f_n} \frac{g_q \cdot f_n}{g_p \cdot f_n}; \end{aligned} \quad (5)$$

b) $|g_p \cdot f_n| < |g_q \cdot f_n|$, 同样,由(4)式得

$$\Delta q = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{(x_u - x_i) \cdot f_u}{g_i \cdot f_u} - \frac{g_p \cdot f_u}{g_i \cdot f_u} \Delta p.$$

结合辅助条件得

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{(x_u - x_i) \cdot f_u}{g_p \cdot f_u + g_i \cdot f_u} \frac{g_p \cdot f_u}{g_i \cdot f_u}, \\ \Delta q &= \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{(x_u - x_i) \cdot f_u}{g_i \cdot f_u} - \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \\ &\quad \cdot \frac{(x_u - x_i) \cdot f_u}{g_p \cdot f_u + g_i \cdot f_u} \cdot \left(\frac{g_p \cdot f_u}{g_i \cdot f_u} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

方程(5)和(6)就是参数变化方程.

3 数值例子

在本节中,应用上述参数变化方程到两个具体的例子——Henon 映射和强迫布鲁塞耳振子.

3.1 Henon 映射

Henon 映射是一二维双参数迭代. 其具体形式为

$$x_{n+1} = p - x_n^2 + qy_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (7)$$

其中 p, q 是系统的两个参数. 现在研究 $p = p_0 = 1.152$, $q = q_0 = 0.3$ 时的情形, 此时系统处于混沌运动状态. 对应的失稳不动点 $x_i = (x_i, y_i)$ 和相应的物理量为

$$x_i = y_i = \frac{1}{2} [(q - 1) + \sqrt{(1 - q)^2 + 4p}],$$

$$g_{px} = g_{py} = \frac{\partial x_i}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(1 - q)^2 + 4p}},$$

$$g_{qx} = g_{qy} = \frac{\partial x_i}{\partial q} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 - q}{\sqrt{(1 - q)^2 + 4p}} \right],$$

$$\lambda_u = -x_i - \sqrt{x_i^2 + q^2},$$

$$\lambda_s = -x_i + \sqrt{x_i^2 + q^2},$$

$$f_u = (\lambda_s^2 + 1)^{1/2} (\lambda_u - \lambda_s)^{-1} (i + \lambda_s j).$$

我们仅研究一个不动点, 另一个不动点可同样讨论.

图 1 给出了控制的结果. 其中未控制点 x_u 与 x_i 的距离 $d(x_u, x_i) = \varepsilon = 1.6943083 \times 10^{-2}$. 图 1 中结果是应用改进的 OGY 方案^[12]得到的. 即当系统点 x_u 靠近 x_i 时, 应用(5)或(6)式改变系统的参数在新参数 $p_0 + \Delta p, q_0 + \Delta q$ 下得到 x_{u+1} , 然后再在参数 p_0, q_0 下得到 x_{u+2} (整个过程在 multi-step 控制中称为一步控制^[12]). 随后比较 $d(x_{u+1}, x_i)$ 与 $d(x_{u+2}, x_i)$ 的大小. 若 $d(x_{u+2}, x_i) < d(x_u, x_i)$, 则用 x_{u+2} 作为新的初始点作下一步控制, 否则另找新的 x_u . 对图 1 中开始点 $x_u, d(x_u, x_i) = 1.6943083 \times 10^{-2}$, 给 5 步控

制之后,系统点与 x_i 的距离 $d < 10^{-10}$, 第 5 步控制时的参数变化 $\Delta p, \Delta q \approx 10^{-10}$. 为了与单参数的 OGY 方法进行比较. 在同样点让参数 $q_0 = 0.3$ 不变, 而仅改变 p 进行控制. 为了达到同样的精度(即 $d < 10^{-10}$) 大约要进行 135 步控制, 表 1 给出了另外两点的结果的比较. 在表 1 中不能控制是指在这点应用一步 OGY 方法后 $d(x_{n+1}, x_i) > d(x_n, x_i)$. 由此可见, 双参数可变方法可使得控制更为有效.

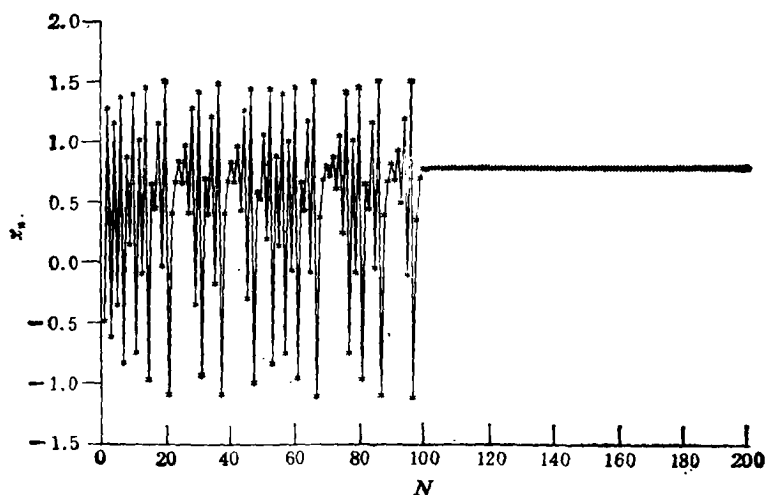


图 1 Henon 映射的控制结果

3.2 强迫布鲁塞耳振子

强迫布鲁塞耳振子的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= B + (A+1)x + x^2y + p \cos \omega t, \\ \frac{dy}{dt} &= Ax - x^2y. \end{aligned} \quad (8)$$

这是一个二维非自治的一阶常微分方程组, 它是极限环系统^[17]. 研究其 Poincare 截面上的情形. 取参数 $A = 1.2$, $B = 0.4$, 而以 p, ω 作为系统的参数. 对强迫布鲁塞耳振子其 Poincare 截面上的不动点及相应的物理量都可以通过不稳定轨道定位技术^[17]得到. 表 2 给出了 $p = p_0 = 0.062$, $\omega = \omega_0 = 0.85$ 处 ps_2 上的不动点及相应的物理量值. 图

表 1 对 Henon 映射, 本文方法与 OGY 方法的比较结果

$d(x_n, x_i)$	本文方法	OGY 方法
1.6943083×10^{-2}	5 步*	135 步*
3.2395557×10^{-1}	6 步*	138 步*
9.2695437×10^{-1}	13 步*	不能控制

* 指为了达到精度小于 10^{-10} 所需的控制步数.

表 2 $p_0 = 0.062$, $\omega_0 = 0.85$ 时, Poincaré 截面上的不动点及相应的物理量

物 理 量	数 值
x_f	0.38467781
y_f	3.22756864
λ_u	-1.86293836
L_{px}	0.37923745
L_{py}	-0.96648808
L_{qx}	-0.14918406
L_{qy}	-0.10783795

表 3 对强迫布鲁塞耳振子, 本文方法与 OGY 方法比较结果

$d(x_n, x_f)$	控制步数	本 文 方 法	OGY 方法
7.1740390×10^{-4}	3 步	$2.4298656 \times 10^{-10}$	1.4413127×10^{-8}
	4 步	$3.4736119 \times 10^{-12}$	$3.8778902 \times 10^{-12}$
2.9955288×10^{-3}	4 步	$1.9853736 \times 10^{-10}$	2.7910212×10^{-4}
	5 步	$3.4820219 \times 10^{-12}$	7.3703602×10^{-3}

2 给出了 $d(x_n, x_f) = 7.1740390 \times 10^{-4}$ 的多步控制结果, 经过 3 步控制之后, 系统点与 x_f 的距离 $d < 10^{-10}$ 。同样, 我们与单参数 OGY 方法进行了比较 ($\omega = 0.85$ 固定, 参数 p 可变)。表 3 给出了比较结果, 从中可以看出, 双参数可变方法比单参数方法有所改进, 但效果没有对 Henon 映射明显。原因将在下节讨论。

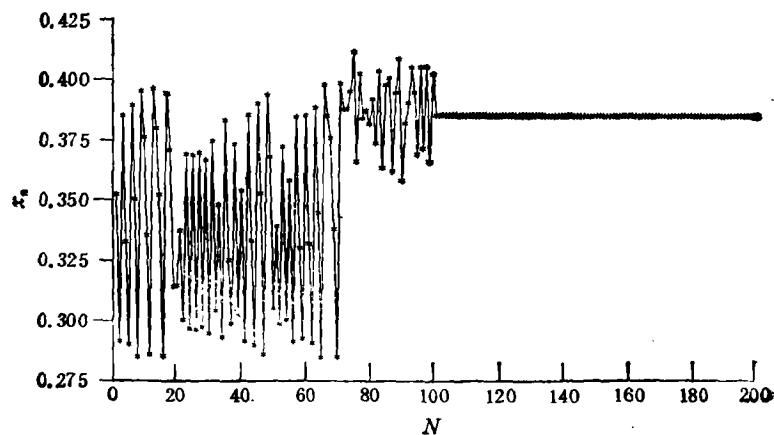


图 2 Poincaré 截面上, 强迫布鲁塞耳振子的控制结果

4 结果与讨论

1. 通过上述的两个例子可以看到, 在加进辅助条件之后, 得到的类似于 OGY 方法的参数变化方程(5)或(6)能够对双参数系统的混沌行为进行更有效的控制, 还可以看到辅

助条件的选择不是唯一的。例如,取 Δp 或 $\Delta q = 0$, 就得到单参数的 OGY 参数变化方程。另外,还可以选择别的辅助条件。例如: 可以选择使 $d(x_{n+2}, x_i)$ 取极小值等。但可以认为第二节中的辅助条件是一个较有效且方便的条件。

2. 从上面两个例子可以看到双参数方法对单参数方法改进的效果不同,对 Henon 映射效果好,而对强迫布鲁塞耳振子效果差些。这是什么原因呢? 通过分析,发现在两个例子中 g_p 和 g_q 的大小差别不同。对 Henon 映射, g_p 和 g_q 的大小是同一数量级的,由(5)或(6)式得到的 $\Delta p, \Delta q$ 也是同一数量级的,与单参数方法得到的 $\Delta p(\Delta q = 0)$ 差别较大。而对强迫布鲁塞耳振子 g_ω 比 g_p 的大小要小一个数量级,因而由(5)或(6)式得到的 $\Delta \omega$ 要比 Δp 小一个数量级,而 Δp 与单参数方法得到的 $\Delta p(\Delta \omega = 0)$ 相差很小,因此,虽然是双参数可变,但跟单参数时差别很小,因而双参数方法对单参数方法改进较小。对 Henon 映射则相反。

3. 对于双参数系统,在实验中往往只改变单个参数,那么选择哪个参数可以使控制的效果更好? 通过数值计算发现,应选择相应于 $|g|$ 较小的那个参数。例如: 对 Henon 映射 $p_0 = 1.152, q_0 = 0.3$ 时, $|g_p| > |g_q|$ 选择 q 作为单参数 ($\Delta p = 0$) 来应用 OGY 方法, 结果发现: 对 $d(x_n, x_i) = 1.6943083 \times 10^{-2}$ 只需 6 步就达到用 p 作单参数时需 135 步才达到的精度。同样, 对强迫布鲁塞耳振子 $p_0 = 0.062, \omega_0 = 0.85$ 时, $|g_p| > |g_\omega|$, 选择 ω 作为单参数, 对 $d(x_n, x_i) = 2.9955288 \times 10^{-3}$ 时只需 3 步就达到 2.1121924×10^{-9} 的精度。这比用 p 作参数时要快。

4. 最后指出,我们的方法同样可以借助于嵌入法应用到方程未知的系统之中。另外,还可应用到多个参数的系统之中,在此不一一赘述。

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1196.
- [2] B. A. Huberman, *et. al.*, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **37** (1990), 547.
- [3] E. A. Jackson, *Phys. Lett.*, **A151** (1990), 478. E. A. Jackson, *et. al.*, *Physica D* **44** (1990), 407.
- [4] R. Lima and M. Pettini, *Phys. Rev.*, **A41** (1990), 726.
- [5] Y. Braiman and I. Goldhirsch, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 2545.
- [6] U. Dressler and G. Nitzsche, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 1.
- [7] W. L. Ditto, S. N. Raueo and M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 3211.
- [8] J. Singer, Y.-Z. Wang and H. H. Ban, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1123.
- [9] E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1992), 1953.
- [10] R. Roy, *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 1259.
- [11] A. Azevedo and S. M. Rezende, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1342.
- [12] 童培庆, 赵灿东, *物理学报*, **44**(1995), 35.
- [13] W. S. Ni and T. F. Qin, *Chin. Phys. Lett.*, **11** (1994), 325.
- [14] 童培庆, *物理学报*, **44**(1995), 169.
- [15] Hu Gang and, He Kefen, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 3794.
- [16] Hu Gang Qu Zhili, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 68.
- [17] B. L. Hao, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System*, World Scientific, Singapore (1989). W. S. Ni, P. Q. Tong and B. L. Hao, *Inter. J. Mod. Phys. B* **3** (1989), 643.

CONTROLLING CHAOS OF TWO-PARAMETER DYNAMICAL SYSTEM

TONG PEI-QING HE JIN-YONG

(Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097)

(Received 23 August 1994)

ABSTRACT

We study the problem of controlling chaotic behavior of two-parameter dynamical system. We suggest the small parameter adjust method of controlling chaos and give the equations of variation of parameters. Then we apply this method to two examples—Henon map and forced Brusslator, and get the better results of control. We compare the method to OGY method of one-parameter. Finally, we discuss some related problems.

PACC: 0545