

边界条件对非传播孤子运动的影响

颜 家 壬

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

(1994年7月11日收到; 1995年1月6日修改稿)

用延拓法处理了非线性边值问题。指出第一类和第二类边界对非传播孤子的影响分别等效于某种势垒或势阱对经典弹性粒子的作用。研究了一对反相孤子在边界作用下的运动规律并得到与实验一致的结果。

PACC: 4735; 4325; 0290

1 引 言

1984年, 吴君汝等^[1]首次在实验室发现了一种所谓的非传播孤子(吴孤子)。他们在长度为 $L = 38\text{ cm}$, 宽度为 $b = 2.54\text{ cm}$ 的矩形槽中注入深度为 $d = 2\text{ cm}$ 的水, 将槽水平地置于某一振动台上并使它在外加驱动下沿竖直方向作简谐振动: $z_0 = a_0 \cos 2\omega_0 t$ 。当调节振幅 a_0 为毫米量级、频率 ω/π 接近系统的固有频率(约 10 Hz) 时, 在水面上就可能激励出吴孤子。它在纵向因弱非线性调制而呈钟形并静止不动(非传播), 在横向则作比较剧烈的上下振荡。文献[2—4]用不同方法导出了孤子所满足的非线性方程与单孤子解, 较好地解释了上述实验现象。此外, 实验^[1]还报道了在一定条件下可同时激励出多个吴孤子。它们的横向振动位相只能相同或相反。孤子之间存在短程相互作用, 其基本特征是同相孤子相引、反相孤子相斥。许阳光^[5]、倪皖芬^[6]等用不同方法解释同相孤子间的相互吸引并取得了一定的成功。文献[7, 8]进一步用最小作用量原理导出了孤子间相互作用势能的近似解析表达式, 从理论上得出了同相孤子相引、反相孤子相斥的基本结论。

应该指出的是, 在实验^[1]中, 槽长度为 L 远大于孤子的宽度 ($\sim 8\text{ cm}$), 而在一般情况下, 孤子是远离槽端的, 故可忽略边界(本文特指槽端边界)对孤子的影响, 因而可将槽看成无限长的波导^[4-6]。为研究边界对孤子的作用, 王新龙^[7]将槽长度缩短为 $L = 20\text{ cm}$ (槽宽度改为 $b = 3\text{ cm}$, 水深为 $d = 2\text{ cm}$ 保持不变)。他经过仔细的观察后指出, 一对反相孤子将沿槽作周期性的纵向往返运动(振动), 并惊奇地发现在过程的某些时间间隔内, 两孤子的运动竟然是同方向的。此外, 他进一步唯象地用“镜像效应”(mirror effect)对孤子的上述运动作了很好的概括。本文对非线性边值问题作了较普遍的研究, 将线性方程边界条件的处理方法(延拓法)推广于非线性方程, 发现第一(二)类边界对孤子的作用等价于反(同)相孤子间的相互作用势垒(阱), 从理论上导出了“反镜像原理”(“镜像原理”)。最后, 本文将上述结果应用于有界槽中一对反相孤子的运动, 成功地解释了文献[9]的实验现象。

2 两孤子之间的相互作用

前面已指出,边界对孤子的作用等价于孤子之间的相互作用,故有必要首先回顾和概述文献[7,8]的有关结果,作为下一节处理边值问题的基础。

引进直角坐标系,使其 x, y, z 轴分别平行于槽的长、宽、高方向,并取静止液面为 $z=0$ 。假定流体是不可压缩的,其运动是无旋的,并忽略表面张力与粘性,则流体运动的速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 满足如下运动方程与边界条件:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -d \leq z \leq \xi(x, y, t); \quad (1)$$

$$\phi_y = 0, \quad y = 0, b; \quad (2)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -d; \quad (3)$$

$$\phi_x = \xi_t + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y, \quad z = \xi(x, y, t); \quad (4)$$

$$\phi_t + (g + \ddot{z}_0)\xi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = 0, \quad z = \xi(x, y, t); \quad (5)$$

$$\phi_x = 0, \quad x = -L/2, L/2, \quad (6)$$

式中 $\xi(x, y, t)$ 为液面偏离静止平衡位置的位移; g 为重力加速度; 下标表示对相应变量求偏导数; ∇ 为梯度算子; $\ddot{z}_0 = -4\omega_0^2 a_0 \cos 2\omega_0 t$ 代表驱动 $z_0 = a_0 \cos 2\omega_0 t$ 对时间 t 求二阶导数。

暂不考虑边界条件(6)式,则方程(1)–(5)导致^[4,7,8]

$$\xi(x, y, t) = u(x, t) \cos(\pi y/b) e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.} + o(x, y, t), \quad (7)$$

式中 c.c. 代表前面诸项的共轭复数, $u(x, t)$ 满足如下无量纲非线性方程(从此开始,所有物理量均应理解为已化为无量纲的):

$$iu_t - u + u_{xx} + 2|u|^2 u + ru^* = 0, \quad (8)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$; u^* 与 $|u|$ 分别代表 u 的复共轭与模; 唯一的无量纲参数 r 正比于驱动振幅。方程(8)具有单孤子解

$$u = (1+r)^{1/2} \text{sech}[(1+r)^{1/2}(x-x_0)] e^{\pm i\pi/2}, \quad (9)$$

式中常数 x_0 代表孤子的中心位置,相因子 $e^{\pm i\pi/2}$ 表明孤子的位相只可能相同或相反。此外,文献[7,8]得出的如下主要结论:

1. 方程(8)的双孤子解可近似地表示为两孤子的线性迭加。在质心坐标中,两孤子的运动是完全对称的。

$$u = u_1 + u_2, \quad (10)$$

$$u_1 = a \text{sech}[(1+r)^{1/2}(x-x_0)] \exp[i\lambda(x-x_0) + i\mu \pm i\pi/2], \quad (11)$$

$$u_2 = a \text{sech}[(1+r)^{1/2}(x+x_0)] \exp[i\lambda(x+x_0) + i\mu \pm i\pi/2], \quad (12)$$

式中的各参量 a, x_0, λ, μ 将不再为常数而依赖于时间 t , 这反映了非线性效应的影响。

2. 两孤子间存在短程相互作用。其相互作用势能为^[7,8]

$$U^{(\pm)}(x_0) = [2 - (\pi^2/3 - 2)r] \left[\mp 2 \left(\frac{\cosh D}{\sinh D} - \frac{D}{\sinh D} \right) - 6 \left(\frac{D \cosh D}{\sinh^3 D} - \frac{1}{\sinh^2 D} \right) \right], \quad (13)$$

式中 $A = 2x_0(1 + \gamma)^{1/2}$ 正比于孤子间的距离 $2x_0$, 势阱 $U^{(+)}(x_0)$ 与势垒 $U^{(-)}(x_0)$ 分别描述同相孤子间的相互吸引与反相孤子间的相互排斥。不难看出, 随着 $|A|$ 的增大, $U^{(\pm)}(x_0)$ 均按指数率 $e^{-|A|}$ 衰减。文献[7, 8]得出的基本结论是: 在质心坐标系中, 相互作用的每个孤子的行为等价于经典弹性粒子在势场 $U^{(\pm)}(x_0)$ 中的运动, 并服从粒子的能量守恒定律

$$\frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + U^{(\pm)}(x_0) = E, \quad (14)$$

式中 $\frac{1}{2} \dot{x}_0^2$ 与 E 分别代表质心系中每个孤子的动能与总能量。

必须强调指出的是, 上述两点是一个不可分割的整体, 即孤子的线性迭加(10)式与它们之间存在相互作用(13)式共同构成方程(8)的近似双孤子解, 缺一不可。换言之, 上述两点共同构成非线性迭加原理。这是下一节用延拓法处理边值问题的基础。

3 非线性边值问题的处理

为了其它领域内可能具有的应用, 不妨对边界条件作较为普遍的研究, 即考察最常见的第一、二类边界条件对孤子运动的影响。为简单, 本节只考虑半无界槽 $0 \leq x < +\infty$ 的情况, 有界槽不难照此处理。第一、二类边界条件分别为 $\phi|_{x=0} = 0$ 与 $\phi_x|_{x=0} = 0$ 。从文献[4]的(21)–(28)式不难看出, 它们分别等价于 $u|_{x=0} = 0$ 与 $u_x|_{x=0} = 0$ 。边界条件与非线性方程(8)共同构成相应的非线性边值问题。现分类讨论如下:

3.1 第一类边值问题

$$\begin{cases} iu_t - u + u_{xx} + 2|u|^2u + \gamma u^* = 0 & 0 \leq x < +\infty, \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

$$(16)$$

假定初时刻在距边界不远的某处 $x_0 > 0$ 存在一个孤子, 则按通常的第一类线性边值问题的处理方法, 应将初条件奇式延拓至 $-\infty < x \leq 0$ 。这相当于在对称点 $-x_0$ 处存在一个假想的反相孤子(且称它为孤子的反相像, 或简称为反像)。如果这一对孤子的运动是完全对称的(事实确是如此), 就能保证边界条件(16)式在任何时刻均被满足。按上节末的讨论, 只需再假定这对反相孤子间存在相互作用势能 $U^{(-)}$, 方程(8)、因而方程(15)就能近似地被满足。由此可见, 第一类边界对孤子的作用由中心在边界处的势垒 $U^{(-)}$ 给出, 就好象孤子受到边界另一侧对称点处一个反相孤子的排斥一样(反镜像原理)。

现考察一个射向边界的孤子。如果其能量较小, 不足以克服势垒 $U^{(-)}$ 的障碍, 则它在到达边界之前速度已衰减为零并改向相反的方向运动, 就好象粒子被势垒所反射一样。如果入射孤子的动能大于势垒的最大值, 它就能穿出(假想的)边界而进入 $x < 0$ 的区域。与此同时, 它的反像(反相孤子)将以大小相等方向相反的速度穿过边界进入 $x > 0$ 的区域。结果表明槽中 ($x > 0$ 的区域)的孤子好象弹性粒子那样被边界所反射。但反射孤子是反相的, 其横向振动位相在边界处跃变 180° , 相当于有“半波损失”。

3.2 第二类边值问题

$$\begin{cases} iu_t - u + u_{xx} + 2|u|^2u + \gamma u^* = 0 & 0 \leq x < +\infty, \\ u_x|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

同样的分析可得出如下的类似结论：第二类边界对孤子的作用由中心在边界处的势阱 $U^{(+)}$ 所描述，就好像孤子受到边界另一侧对称点处一个同相孤子的吸引一样（“镜像原理”）。射向边界的孤子因势阱的吸引而加速前进，直到被边界所弹性反射。但不存在“半波损失”。

综上所述，如果不计半波损失，则第一类或第二类边界对孤子的作用可以归结为：有界槽中孤子的运动分别等价于图 1 或图 2 所示势场中经典弹性粒子的运动。于是又一次看到，和吴孤子之间的相互作用一样，吴孤子在与边界相互作用时也表现出鲜明的粒子性。

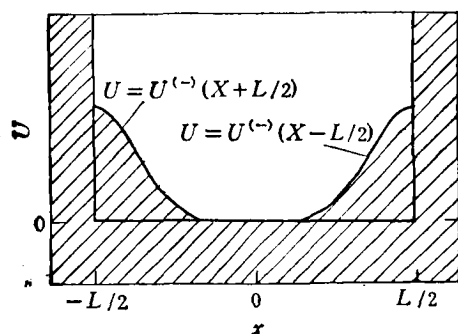


图 1 与第一类边界条件相应的势场

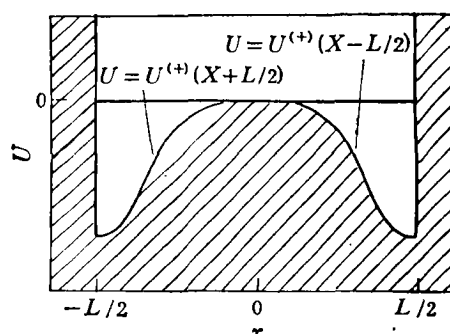


图 2 与第二类边界条件相应的势场

4 边界对孤子运动的影响

由于水槽的边界是刚性的，故只需考虑第二类边值问题。研究弹性粒子在图 2 所示势场中的运动属于经典的质点组动力学问题，无需在此赘述。但为了与实验^[9]的结果进行比较，还得仔细研究边界对两个反相孤子的作用。首先指出两种可能出现的特殊情况。第一种情况是两孤子的运动是完全对称的。它们同时到达自己的边界，也同时到达距边界最远的位置。这一过程的特点是质心保持在槽的中心不动、孤子间的距离作周期性的变化、两孤子的运动方向永远保持相反。第二种情况是两孤子的运动完全“同步”。即其中一个孤子到达边界时，另一个孤子同时到达其距边界最远的位置。这一过程的特点是两孤子的运动方向始终保持相同，孤子间的距离变化不明显。

普遍情况是两孤子的运动既不完全对称，也不完全同步，而是介于两者之间。不同时刻孤子的运动情况如图 3 (a)–(e) 所示。图 3 中箭头的长短和指向代表孤子速度的大小和方向。图 3(a) 为两孤子在边界的吸引下分别朝各自的边界运动。但左孤子离边界较近，故其速度较大。图 3(b) 为左孤子已被边界所反射，但右孤子尚未到达边界。图 3(c) 为右孤子已被边界所反射，但左孤子尚未到达其距边界的最远点。图 3(d) 为左孤子在到

达其距边界的最远点以后,因受到右孤子的排斥而改向边界运动,而右孤子尚未到达其距边界的最远点。图 3(e) 为左孤子已被边界所反射,右孤子在到达其距边界的最远点以后因受左孤子的排斥而改向边界运动……,如此周而复始地循环下去。这一过程的特点是两孤子的运动同向、反向地交错演变,孤子间的距离变化不明显。与文献[9]的图 2 比较可知,本文图 3 所描述的一对反相孤子的运动特征与实验观察结果^[9]完全一致。但因孤子在势场中的运动强烈地依赖于实验条件(包括初始条件)^[7,8],而文献[9]没有提供充分的实验数据,故无法进行定量的比较。最后顺便指出孤子本身的相互作用对两孤子运动的影响。一对反相孤子相互排斥,但只要它们充分远离,这种排斥是十分微弱的,因而对孤子的运动影响不大。它的作用主要表现在阻止两孤子相互靠近和重叠,尤其是当其中一个孤子达到其距边界的最远点时(此时其速度为零),由于受到另一孤子的排斥才能折向边界运动,因而导致彼此分离的周期性往返运动。显然,两同相孤子由于吸引可以相互靠近和对穿,只要速度足够大,它们必将在整个槽中作周期性的往返对穿振动。

显然,本文的方法原则上可推广于处理其它非线性边值问题。

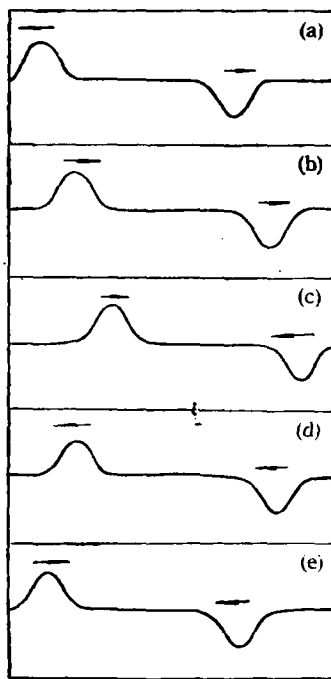


图 3 一对反相孤子在有界槽中的运动

- [1] J. R. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 1421.
- [2] A. Larraza and S. Putterman, *J. Fluid Mech.*, **148** (1984), 443.
- [3] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **148** (1984), 451.
- [4] J. R. Yan and G. X. Huang, *Chinese Phys. Lett.*, **5** (1988), 305.
- [5] Y. G. Xu and R. J. Wei, *Chinese Phys. Lett.*, **7** (1990), 12.
- [6] 倪婉芬, 魏荣爵, 中国科学, **11** (1991), 1207.
- [7] J. R. Yan and Y. P. Mei, *Europhys. Lett.*, **23** (1993), 335.
- [8] J. R. Yan, X. H. Yan, J. Q. You and J. X. Zhong, *Phys. Fluids*, **A5** (1993), 1651.
- [9] X. L. Wang, *Chinese Phys. Lett.*, (待发表)

EFFECTS OF THE BOUNDARY CONDITIONS ON THE NON-PROPAGATING SOLITONS

YAN JIA-REN

(*Department of Physics, Xiangtan University, Changsha 410081*)

(Received 11 July 1994; revised manuscript received 6 January 1995)

ABSTRACT

The non-linear boundary value problems are treated with the method of continuation. It is pointed out that the effects on the non-propagating solitons of the first/second kind boundary is equivalent to those of a certain potential barrier/well on the classical elastic particles. The motion of a pair of solitons with opposite polarities under the influence of the boundary is studied, the result is consistent with the experiment.

PACC: 4735; 4325; 0290