

一种氢原子相干态*

李 光 华

(长沙电力学院物理系, 长沙 410077)

(1993年7月9日收到; 1995年5月25日收到修改稿)

引入了氢原子的一种多分量相干态, 并讨论了在该相干态中的测不准关系和压缩性质。

PACC: 0210; 0365

1 引 言

相干态不但是近代物理学中的一个重要概念, 而且是理论物理学中的一个有效方法, 它已被广泛应用于物理学和数学物理的许多领域^[1]。相干态这一物理概念最初由 Schrödinger 于 1926 年提出^[2]。本世纪 60 年代, Glauber 系统地建立起谐振子相干态^[3], 证明它是谐振子湮没算符的本征态, 而且是使测不准关系取极小值的态。Gilmore 等^[4]提出独立的多模谐振子相干态等于单模谐振子相干态的乘积。

关于氢原子的相干态, Gerry^[5] 利用 Kustannheimo-Stiefel 变换将三维氢原子问题化为带约束条件的四维各向同性谐振子, 在此基础上定义了氢原子相干态, 并证明这样定义的相干态给出经典运动方程。许伯威、曾祺^[6]完善了这一证明, 并讨论了这种相干态中的测不准关系。他们定义的氢原子相干态是在粒子数表象中的独立四模谐振子相干态, 然后考虑约束。

本文引入了在 J 表象中氢原子的多分量相干态, 并讨论了在这种相干态中的测不准关系及其压缩性质。

2 氢原子的 $SO(4)$ 对称性

采用原子单位后, 氢原子的哈密顿量为

$$H = p^2/2 - e^2/r, \quad (1)$$

令

$$\begin{aligned} L &= r \times p, \\ A &= (-2H)^{-1/2} \left[\frac{1}{2} (p \times L - L \times p) - e^2 r/r \right], \end{aligned} \quad (2)$$

* 湖南省科学技术委员会自然科学基金资助的课题。

利用坐标与动量的对易关系, 可以证明

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, [L_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, [A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \quad (3)$$

这表明算符 $\{L_i, A_i; i = 1, 2, 3\}$ 构成李代数 $SO(4)$ 。Biedenharn^[7] 与 Wybourne^[8] 都对它进行了详细地研究。令

$$\begin{aligned} L_0 &= L_3, L_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(L_1 \pm iL_2), \\ A_0 &= A_3, A_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 \pm iA_2), \end{aligned} \quad (4)$$

它们满足的非零对易关系为

$$\begin{aligned} [L_0, L_{\pm}] &= \pm L_{\pm}, [L_+, L_-] = -L_0, \\ [A_0, A_{\pm}] &= \pm L_{\pm}, [A_+, A_-] = -L_0, \\ [L_0, A_{\pm}] &= \pm A_{\pm}, [A_0, L_{\pm}] = \pm A_{\pm}, [L_{\pm}, A_{\mp}] = \mp A_0. \end{aligned} \quad (5)$$

显然, $\{L_0, L_{\pm}\}$ 形成李代数 $SO(4)$ 的子代数 $SU(2)$ 。 $SO(4)$ 的不可约表示 $[p, q]$ 的基矢量为 $|[p, q]LM\rangle$, $L = |q|, |q| + 1, \dots, p - 1, p$; $M = -L, -L + 1, \dots, L - 1, L$, 它们是正交归一完备的:

$$\langle [p, q]LM | [p', q']L'M' \rangle = \delta_{pp'} \delta_{qq'} \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \quad (6)$$

$$\sum_{[p, q]LM} |[p, q]LM\rangle \langle [p, q]LM| = 1, \quad (7)$$

而且满足

$$\begin{aligned} L_0 |[p, q]LM\rangle &= M |[p, q]LM\rangle, \\ L_{\pm} |[p, q]LM\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} |[p, q]LM \pm 1\rangle, \\ A_0 |[p, q]LM\rangle &= MA_L |[p, q]LM\rangle \\ &\quad + [(L - M + 1)(L + M + 1)]^{1/2} B_L |[p, q]L + 1M\rangle \\ &\quad - (L^2 - M^2)^{1/2} C_L |[p, q]L - 1M\rangle, \\ A_{\pm} |[p, q]LM\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [(L \mp M)(L \pm M + 1)]^{1/2} A_L |[p, q]LM \pm 1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} [(L \pm M + 1)(L \pm M + 2)]^{1/2} B_L |[p, q]L + 1M \pm 1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} [(L \mp M)(L \mp M - 1)]^{1/2} C_L |[p, q]L - 1M \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} A_L &= [L(L + 1)]^{-1} q(p + 1), \\ B_L &= (L + 1)^{-1} [(2L + 1)(2L + 3)]^{-1/2} [(p + L + 2)(p - L)(L + 1 - q) \\ &\quad \cdot (L + 1 + q)]^{1/2}, \\ C_L &= -L^{-1} [(2L - 1)(2L + 1)]^{-1/2} [(p + L + 1)(p - L + 1)(L + q) \\ &\quad \cdot (L - q)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

3 氢原子的多分量相干态

李代数 $SO(4)$ 的不可约表示 $[p, q]$ 的表示空间可以分为 $p - |q| + 1$ 个子空间, $L = |q|, |q| + 1, \dots, p - 1, p$, 每一个子空间都是 $SO(4)$ 的子代数 $SU(2)$ 的不可约表示空间. 因此, 对于 $SO(4)$ 的每一个子空间, 都可用指数算符 $\exp(zL_+)$ 作用在该子空间的最低权态 $|[p, q]L, -L\rangle$ 上, 得到该子空间的相干态 $|z\rangle_L$,

$$|z\rangle_L = \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-L} \exp(zL_+) |[p, q]L, -L\rangle \\ = \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-L} \sum_{k=0}^{2L} \left[\frac{(2L)!}{k!(2L-k)!} \right]^{1/2} \left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^k |[p, q]L, -L+k\rangle, \quad (10)$$

其中

$$z = \rho e^{i\theta}. \quad (11)$$

利用(6)式可以证明

$$L' \langle z' | z \rangle_L = \delta_{LL'} I(z, z'; L), \quad (12)$$

其中

$$I(z, z'; L) = \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-L} \left(1 + \frac{1}{2} z' z'^*\right)^{-L} \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{2L}. \quad (13)$$

显然, 当 $z = z'$ 时有

$$I(z, z'; L) = 1. \quad (14)$$

(12)式表明, 虽然在同一子空间中的相干态 $|z\rangle_L$ 是归一但不正交的, 但在不同子空间中的相干态却总是彼此正交的.

利用这 $p - |q| + 1$ 个子空间的相干态, 定义氢原子的多分量相干态为

$$|z\rangle = \left(\left(\frac{2|q|+1}{d} \right)^{1/2} |z\rangle_{|q|}, \left(\frac{2|q|+3}{d} \right)^{1/2} |z\rangle_{|q|+1}, \dots, \left(\frac{2p+1}{d} \right)^{1/2} |z\rangle_p \right). \quad (15)$$

这是个列矩阵, 其中 $d = \sum_{L=|q|}^p (2L+1) = (p+|q|+1)(p-|q|+1)$, 它是 $SO(4)$ 的不可约表示 $[p, q]$ 的维数.

氢原子的任意两个多分量相干态的标积为

$$\langle z' | z \rangle = \frac{1}{d} I(z, z'; |q|) \\ \times \begin{pmatrix} 2|q|+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2|q|+3) \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right) \left(1 + \frac{1}{2} z' z'^*\right)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(2p-1) \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{2(p-|q|-1)}}{\left[\left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right) \left(1 + \frac{1}{2} z' z'^*\right)\right]^{p-|q|-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(2p+1) \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{2(p-|q|)}}{\left[\left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right) \left(1 + \frac{1}{2} z' z'^*\right)\right]^{p-|q|}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

显然

$$\langle z|z\rangle = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 2|q|+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2|q|+3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2p+1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

这表明矩阵 $d|z\rangle\langle z|$ 的每一非零矩阵元是相应子空间的维数, 且

$$\text{Tr}\langle z|z\rangle = 1. \quad (18)$$

氢原子的多分量相干态的完备性条件为

$$\begin{aligned} \int d\sigma(z) |z\rangle\langle z| &= \sum_{p,q} \sum_{L=|q|}^p \frac{2L+1}{2\pi} \int \frac{d^2z}{\left(1 + \frac{1}{2}zz^*\right)^2} |z\rangle_{LL}\langle z| \\ &= \sum_{p,q} \sum_{L=|q|}^p \sum_{k=0}^{2L} |[p,q]L, -L+k\rangle\langle [p,q]L, -L+k| \\ &= 1, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$d\sigma(z) = \frac{d}{2\pi} \frac{d^2z}{\left(1 + \frac{1}{2}zz^*\right)^2}, \quad (20)$$

$$d^2z = \rho d\rho d\delta, \quad z = \rho e^{i\delta}.$$

任一矢量 $|f\rangle$ 可以用氢原子多分量相干态展开为

$$|f\rangle = \sum_{p,q} \sum_{L=|q|}^p \frac{2L+1}{2\pi} \int \frac{d^2z}{\left(1 + \frac{1}{2}zz^*\right)^2} |z\rangle_{LL}\langle z|f\rangle. \quad (21)$$

由于传统的氢原子能量本征态 $|nlm\rangle$ 与基 $|[p,q]LM\rangle$ 的关系为^[10]

$$|nlm\rangle = |[n-1, 0]lm\rangle. \quad (22)$$

因此, 氢原子的能量本征态与我们定义的多分量相干态的关系为

$$|nlm\rangle = \frac{2l+1}{2\pi} \left[\frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!} \right]^{1/2} \int \frac{d^2z}{\left(1 + \frac{1}{2}zz^*\right)^{l+2}} \left(-\frac{z^*}{\sqrt{2}} \right)^{l+m} |z\rangle_{ll}. \quad (23)$$

这里的 z 是(11)式定义的复数.

利用能量本征态 $|nlm\rangle$ 的完备性关系得

$$|z\rangle_L = \left(1 + \frac{1}{2}zz^*\right)^{-L} \sum_{k=0}^{2L} \left[\frac{(2L)!}{k!(2L-k)!} \right]^{1/2} \left(-\frac{z}{\sqrt{2}} \right)^k |p+1, L, -L+k\rangle. \quad (24)$$

氢原子的能量本征态 $|nlm\rangle$ 可以通过波函数

$$\phi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (25)$$

在位形空间得到实现, 其中 $R_{nl}(r)$ 是氢原子的归一化径向波函数, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 是归一化

的球谐函数。因此氢原子多分量相干态在位形空间为

$$C_L(z; r, \theta, \varphi) = \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-L} \sum_{k=0}^{2L} \left[\frac{(2L)!}{k!(2L-k)!} \right]^{\nu/2} \cdot \left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^k R_{r+1,L}(r) Y_{L,-L+k}(\theta, \varphi), \quad (26)$$

其中 z 如(11)式所示, 相应的概率密度为

$$\omega = \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{2L} \sum_{k,k'=0}^{2L} \left[\frac{(2L)!(2L)!}{k!k!(2L-k)!(2L-k')!} \right]^{\nu/2} \times \left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^k \left(-\frac{z^*}{\sqrt{2}}\right)^{k'} R_{r+1,L}^2 Y_{L,-L+k}(\theta, \varphi) Y_{L,-L+k'}^*(\theta, \varphi). \quad (27)$$

4 矩阵元与测不准关系

利用(8)与(10)式, 可以求出 $SO(4)$ 的生成元在氢原子多分量相干态中的矩阵元。

$$L' \langle z' | L_0 | z \rangle_L = -L \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} z z'^*\right) I(z, z'; L) \delta_{LL'},$$

$$L' \langle z' | L_+ | z \rangle_L = L z'^* \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} I(z, z'; L) \delta_{LL'},$$

$$L' \langle z' | L_- | z \rangle_L = -L z \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} I(z, z'; L) \delta_{LL'},$$

$$\begin{aligned} L' \langle z' | A_0 | z \rangle_L = & \left\{ -L A_L \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} z z'^*\right) \delta_{LL'} \right. \\ & - [(L+1)(2L+1)]^{\nu/2} B_L z'^* \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L+1} \\ & + [L(2L-1)]^{\nu/2} C_L z \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right) \\ & \left. \times \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-2} \delta_{L'L-1} \right\} I(z, z'; L), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' \langle z' | A_+ | z \rangle_L = & \left\{ L A_L z'^* \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L} \right. \\ & + [(L+1)(2L+1)]^{\nu/2} B_L \frac{1}{2} (z'^*)^2 \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L+1} \\ & + [L(2L-1)]^{\nu/2} C_L \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right) \\ & \left. \times \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-2} \delta_{L'L-1} \right\} I(z, z'; L), \end{aligned}$$

$$L' \langle z' | A_- | z \rangle_L = \left\{ -L A_L z \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + [(L+1)(2L+1)]^{1/2} B_L \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L+1} \\
& + [L(2L-1)]^{1/2} C_L \frac{1}{2} z^2 \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right) \\
& \times \left(1 + \frac{1}{2} z z'^*\right)^{-1} \delta_{L'L-1} \} I(z, z'; L).
\end{aligned} \quad (28)$$

由量子力学知,若算符 F 与 G 的对易关系为

$$[F, G] = iK, \quad (29)$$

则存在测不准关系

$$(\overline{\Delta F})^2 (\overline{\Delta G})^2 \geq \frac{1}{4} (\bar{K})^2, \quad (30)$$

其中

$$(\overline{\Delta F})^2 = \bar{F}^2 - \bar{F}^2. \quad (31)$$

由(3)式得

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_1, A_2] = iA_3, \quad [A_1, A_2] = iL_3. \quad (32)$$

因此一定存在测不准关系

$$(\overline{\Delta L_1})^2 (\overline{\Delta L_2})^2 \geq \frac{1}{4} (\bar{L}_3)^2, \quad (33)$$

$$(\overline{\Delta L_1})^2 (\overline{\Delta A_2})^2 \geq \frac{1}{4} (\bar{A}_3)^2, \quad (34)$$

$$(\overline{\Delta A_1})^2 (\overline{\Delta A_2})^2 \geq \frac{1}{4} (\bar{L}_3)^2. \quad (35)$$

为简单起见,仅讨论(33)式。

由(4)式得

$$\begin{aligned}
L_3 &= L_0, \quad L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_+ - L_-), \quad L_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (L_+ + L_-), \\
L_1^2 &= \frac{1}{2} (L_+^2 + L_-^2 - L_+ L_- - L_- L_+), \\
L_2^2 &= \frac{-1}{2} (L_+^2 + L_-^2 + L_+ L_- + L_- L_+).
\end{aligned} \quad (36)$$

由(28)式得角动量在相干态中的期望值为

$$\begin{aligned}
{}_L \langle z | L_3 | z \rangle_L &= -L \left(1 - \frac{1}{2} z z^*\right) \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-1}, \\
{}_L \langle z | L_1 | z \rangle_L &= \frac{L}{\sqrt{2}} (z + z^*) \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-1}, \\
{}_L \langle z | L_2 | z \rangle_L &= i \frac{L}{\sqrt{2}} (z - z^*) \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-1}, \\
{}_L \langle z | L_1^2 | z \rangle_L &= \frac{L}{2} + \frac{1}{4} L(2L-1) (z + z^*)^2 \left(1 + \frac{1}{2} z z^*\right)^{-1},
\end{aligned}$$

$${}_L\langle z|L_1^2|z\rangle_L = \frac{L}{2} - \frac{1}{4}L(2L-1)(z-z^*)^2\left(1+\frac{1}{2}zz^*\right)^{-2}. \quad (37)$$

因此有

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta L_1)^2} &= {}_L\langle z|(\Delta L_1)^2|z\rangle_L = \frac{L}{2}(1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta), \\ \overline{(\Delta L_2)^2} &= {}_L\langle z|(\Delta L_2)^2|z\rangle_L = \frac{L}{2}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta), \\ (\bar{L}_3)^2 &= ({}_L\langle z|L_3|z\rangle_L)^2 = L^2\cos^2\alpha, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$z/\sqrt{2} = \tan\frac{\alpha}{2} \cdot e^{i\beta}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (39)$$

因此有

$$\overline{(\Delta L_1)^2} \overline{(\Delta L_2)^2} - \frac{1}{4}(\bar{L}_3)^2 = \frac{L^2}{16} \sin^2\alpha \sin^2 2\beta \geq 0, \quad (40)$$

即对氢原子多分量相干态空间的任一子空间,角动量算符之间存在测不准关系。而且当 β 等于 $0, \pi/2, \pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$ 时,对于任意的 α 都有

$$\overline{(\Delta L_1)^2} \overline{(\Delta L_2)^2} = \frac{1}{4}(\bar{L}_3)^2. \quad (41)$$

这表明在这些相干态下, L_1 与 L_2 满足最小测不准关系。将上述 α 与 β 的值代入 (26) 式,即可得到满足最小测不准关系时,相干态在位形空间的表达式。将上述 α 与 β 的值代入 (27) 式,即可得到相应的电荷密度在位形空间中的 z, r, θ, φ 关系。

另外,还可得到

$$\overline{(\Delta L_1)^2} = \frac{1}{2}|\bar{L}_3| = \frac{L}{2}(1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta - |\cos\alpha|), \quad (42)$$

$$\overline{(\Delta L_2)^2} = \frac{1}{2}|\bar{L}_3| = \frac{L}{2}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta - |\cos\alpha|). \quad (43)$$

由此可知,当 β 等于 0 或 π , 而 α 不等于 0 或 π 时,有

$$\overline{(\Delta L_1)^2} < \frac{1}{2}|\bar{L}_3|, \quad \overline{(\Delta L_2)^2} > \frac{1}{2}|\bar{L}_3|, \quad (44)$$

这表明氢原子的这些多分量相干态是角动量算符 L_1 的压缩相干态。当 β 等于 $\pi/2$ 或 $\frac{3}{2}\pi$, 而 α 不等于 0 或 π 时,有

$$\overline{(\Delta L_1)^2} > \frac{1}{2}|\bar{L}_3|, \quad \overline{(\Delta L_2)^2} < \frac{1}{2}|\bar{L}_3|, \quad (45)$$

它们是角动量算符 L_2 的压缩相干态。

5 讨 论

在本文中,我们构造了氢原子的多分量相干态。显然,这一方法可推广应用于构造任

何以 $SU(2)$ 为子代数的李代数, 李超代数或量子代数的多分量相干态^[9]。更具普遍意义的是, 虽然 Perelomov^[10] 给出了构造任意李代数 g 相干态的一般方法, 但除了对于较简单的李代数外, 应用起来都比较困难。本文表明, 若 g 包含子代数 η , g 的有限维不可约表示空间可分解为 η 的不可约表示空间的直和, 且子代数 η 的相干态可以用 Perelomov 的方法很容易地构造出来, 则应用本文所叙述的方法, 能够不难地构造出 g 的多分量相干态。因此, 本文所述方法可看作是 Perelomov 方法的一个补充。

感谢范洪义教授的有益讨论。

- [1] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam (ed.), *Coherent States* (World Scientific, Singapore, 1985), pp. 1-115.
- [2] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, **14**(1926), 664.
- [3] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130**(1963), 2529; *ibid.*, **131** (1963), 2766.
- [4] R. Gilmore, C. M. Bowden and L. M. Narducci, *Phys Rev.*, **A12** (1975), 1019.
- [5] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 6.
- [6] 许伯威、曾祺, *物理学报*, **40**(1991), 1212.
- [7] L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **2**(1961), 433.
- [8] B. G. 怀邦著, 冯承天等译, *典型群及其在物理学上的应用* (北京: 科学出版社, 1982), 第二十一章.
- [9] Guang-Hua Li, San-Ru Hao, Jun-Yun Long and Qian-Jun Yue, *J. Phys. A*, **27**(1994), 3073.
- [10] A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **26**(1972), 222.

ANOTHER KIND OF COHERENT STATES OF HYDROGEN ATOM

LI GUANG-HUA

(Department of Physics, Changsha University of Electric Power, Changsha 410077)

(Received 9 July 1993; revised manuscript 25 May 1995)

ABSTRACT

The multicomponent coherent states for hydrogen atom are presented. The uncertainty relation and the squeezing property are discussed.

PACC: 0210; 0365,