

能量动量张量无迹的静态平面对称标量场的静态时空*

强 稳 朝

(西安建筑科技大学基础部, 西安 710055)

(1994 年 11 月 8 日收到)

求出了具有无迹能量动量张量的静态平面对称标量场产生的静态平面对称度规的通解, 并讨论了这种度规的共形性质, 对称性和奇异性等。这个通解包含了两个共形平直特解, 其所代表的时空没有奇异性。

PACC: 0420; 0440

1 引 言

各种标量场产生的时空一直是广义相对论研究中一个有趣的问题。1981 年, Wyman 曾找到了零质量标量场产生的静态球对称时空^[1]。近年来, 文献[2—4]又先后求得了平面对称标量场产生的静态和非静态时空。以上这些作者所用的能量动量张量都不是无迹的。我们知道将平直时空的 Klein-Gordon 方程推广到弯曲时空并不是唯一的^[5]。另一种推广就是共形不变场论里的标量场方程。与这种标量场方程相应的零质量标量场的能量动量张量是无迹^[6]。Frøylund 在 1982 年就曾求得了零质量静态球对称标量场产生的时空, 而他所用的标量场的能量动量张量是无迹的^[7]。本文中求得能量动量张量无迹的平面对称标量场产生的静态时空, 并讨论其性质。

2 能量动量张量与场方程

在共形不变场论里标量场方程为^[5, 8]

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V - \left(\frac{1}{6}R + m^2\right)V = 0, \quad (1)$$

相应的能量动量张量为^[6]

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \partial^\mu V \partial^\nu V - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\alpha V \partial^\alpha V - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}m^2V^2 \\ & + \frac{1}{6}[g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(V^2) - \nabla^\mu\nabla^\nu(V^2) + G^{\mu\nu}V^2]. \end{aligned} \quad (2)$$

* 陕西省自然科学基金资助的课题。

本文采用号差 $(-, +, +, +)$ 。以上两式中 V 是标量场, m 是质量, ∇_μ 表示协变微分, $G^{\mu\nu}$ 和 R 分别是 Einstein 张量和标曲率。对零质量标量场, $m = 0$, $T^{\mu\nu}$ 是无迹的,因而标量场产生的时空标曲率 $R = 0$ 。标量场方程与零质量的 Klein-Gordon 方程相同,即

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu V = 0. \quad (3)$$

平面对称时空的线元为^[2]

$$ds^2 = E(-dt^2 + dz^2) + G(dx^2 + dy^2). \quad (4)$$

对于静态时空, E 和 G 仅是 z 的函数。不为零的 Ricci 张量为

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{E'G'}{2EG} + \frac{EE'' - (E')^2}{2E^2}, \\ R_{11} &= R_{22} = -\frac{G''}{2E}, \\ R_{33} &= \frac{E'G'}{2EG} - \frac{2GG'' - (G')^2}{2G^2} + \frac{(E')^2 - EE''}{2E^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $E' = dE/dz$, $G' = dG/dz$ 。根据文献[4]和[2]求得 $T_{\mu\nu}$ 代入场方程

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6)$$

因为 $\mu \neq \nu$ 时 $R_{\mu\nu} = 0$, 所以标量场 V 必须满足

$$\begin{aligned} 2V_0V_1 - VV_{1,0} &= 0, \quad 2V_0V_3 - VV_{3,0} - \frac{E'}{2E}VV_0 = 0, \\ 2V_1V_2 - VV_{2,0} &= 0, \quad 2V_1V_3 - VV_{3,1} + \frac{G'}{2G}VV_1 = 0, \\ 2V_1V_2 - VV_{2,1} &= 0, \quad 2V_2V_3 - VV_{3,2} + \frac{G'}{2G}VV_2 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $V_\mu = \partial V / \partial x^\mu$ 。本文仅考虑静态平面对称标量场,即只有 $V_3 \neq 0$, V 仅是 z 的函数。这时(7)式自动满足。非零的能量动量张量为

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{6} \left[(V_3)^2 + \frac{E'}{E} VV_3 \right] + \frac{1}{6} R_{00}V^2, \\ T_{11} &= -\frac{1}{6} \left[\frac{G}{E} (V_3)^2 + \frac{G'}{E} VV_3 \right] + \frac{1}{6} R_{11}V^2, \\ T_{33} &= \frac{1}{6} \left[3(V_3)^2 - 2VV_{3,3} + \frac{E'}{E} VV_3 \right] + \frac{1}{6} R_{33}V^2. \end{aligned} \quad (8)$$

$\mu = \nu$ 时,场方程可以写成

$$\begin{aligned} R_{00} \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right) &= \frac{4}{3} \pi \left[(V_3)^2 + \frac{E'}{E} VV_3 \right], \\ R_{11} \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right) &= -\frac{4}{3} \pi \left[\frac{G}{E} (V_3)^2 + \frac{G'}{E} VV_3 \right], \\ R_{33} \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right) &= \frac{4}{3} \pi \left[3(V_3)^2 - 2VV_{3,3} + \frac{E'}{E} VV_3 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

3 场方程的通解

对于本文的情况,标量场方程为

$$\frac{1}{EG} \frac{d}{dz} (EGV^2) - \frac{1}{EG} \frac{d}{dz} (GV_3) = 0. \quad (10)$$

从上式立即得到

$$GV_3 = c_1, \quad (11)$$

其中 c_1 是积分常数。当 $c_1 = 0$ 时, $V = \text{常数}$ 。这时求解 (9) 式得到代表真空平面对称静态时空的 Taub 解^[6]。所以以下仅考虑 $c_1 \neq 0$ 的情况。从 (5) 式的 R_{11} 和 (9) 式的第二个方程得

$$G'' \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right) = \frac{8}{3} \pi [G(V_3)^2 + G' V V_3], \quad (12)$$

上式等号两边加 $G' \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right)' = -\frac{8}{3} \pi G' V V_3$ 积分得

$$G' \left(1 - \frac{4}{3} \pi V^2 \right) = \frac{8}{3} \pi V c_1 + c_2. \quad (13)$$

用同样的方法积分上式得

$$G = \frac{c_2 z + c_3}{1 - 4\pi V^2/3}. \quad (14)$$

在 (13), (14) 式中, c_2 和 c_3 是两个新的积分常数。当 $c_2 = 0$ 时, 从 (11) 和 (14) 式并根据 $1 - 4\pi V^2/3 > 0$ 和 $1 - 4\pi V^2/3 < 0$ 两种情况可以求得两个 V 。将这两个 V 和 (14) 式代入 (9) 式的第一个方程又可以得到两个 E 。结果得到 $c_2 = 0$ 时 V, G, E 的两组解, 但将这两组解代入 (9) 式中第三个方程, 无论那一组都不适合, 除非 $c_1 = 0$, 故应舍之。以下仅考虑 c_1 和 c_2 均不为零的情况。因为 $G > 0$, 所以 $c_2 z + c_3$ 和 $1 - 4\pi V^2/3$ 必须同号。从 (11), (14) 式得

$$\frac{V_3}{1 - 4\pi V^2/3} = \frac{c_1}{c_2 z + c_3}, \quad (15)$$

当 $c_2 z + c_3 > 0$ 和 $1 - 4\pi V^2/3 > 0$ 时, 积分上式得

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{A_-}{A_+}, \quad (16)$$

其中

$$A_{\pm} = (c_2 z + c_3)^{\frac{2c_1}{c_2} \sqrt{\pi/3}} \pm c_4 (c_2 z + c_3)^{-\frac{2c_1}{c_2} \sqrt{\pi/3}}, \quad (17)$$

再将上式代入 (14) 式得

$$G = \frac{(c_2 z + c_3) A_{\pm}^2}{4c_4} \quad c_4 > 0. \quad (18)$$

将 (16), (18) 式和 R_{00} 代入 (9) 式中第一式得

$$[E'/E]' + \frac{c_2}{(c_2 z + c_3)} \frac{E'}{E} = \frac{8\pi V_3 c_1/3}{(c_2 z + c_3)}. \quad (19)$$

用 (11) 式积分上式得

$$E = \frac{c_5}{4c_4} (c_2 z + c_3)^{c_1/c_2} A_{\pm}^2 \quad c_5 > 0, \quad (20)$$

其中 c_5 和 c_4 是两个新的积分常数。将已经求得的 V, G, E 代入 (9) 式的第三个方程,

发现只有

$$\frac{c_3}{c_2} = 6 \left[\frac{2c_1 \sqrt{\pi/3}}{c_2} \right]^2 - 1/2 \quad (21)$$

时这个方程才能成立, 因此 c_2 不是独立的积分常数. 令

$$\begin{aligned} Z - c_2 x + c_3 > 0, \quad X = \frac{x}{2\sqrt{c_4}}, \quad Y = \frac{y}{2\sqrt{c_4}}, \\ T = c_2 t, \quad a_1 = \frac{2c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \neq 0, \quad a_2 = c_4 > 0, \end{aligned} \quad (22)$$

并取 $c_6/4c_4c_2^2 = 1$, 则得在 (T, X, Y, Z) 坐标系中

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{A_-}{A_+}, \quad G = Z A_+^2, \quad E = Z^{a_1-1/2} A_+^2, \\ A_{\pm} = Z^{a_1} \pm a_2 Z^{-a_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

当 $c_2 x + c_3 < 0$ 和 $1 - 4\pi V^2/3 < 0$ 时, 采用同样的步骤, 在 (T, X, Y, Z) 坐标系中得到

$$V = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{A_+}{A_-}, \quad G = -Z A_-^2, \quad E = Z^{a_1-1/2} A_-^2. \quad (24)$$

因为这时 $Z = c_2 x + c_3 < 0$, E 有可能成为虚数, 而度规系数必须为实, 所以应将(24)式这一组解舍去. 结果(23)式就是所求的标量场和度规场的通解.

4 共形平直特解

当 $a_1 = 1/2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} A_{\pm} &= \sqrt{Z} \pm a_2/\sqrt{Z} \\ G = E &= Z A_{\pm}^2 = (Z + a_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad Z > 0; \quad (25)$$

而当 $a_1 = -1/2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} A_{\pm} &= 1/\sqrt{Z} \pm a_2 \sqrt{Z} \\ G = E &= (1 + a_2 Z)^2 \end{aligned} \right\} \quad Z > 0, \quad (26)$$

这时时空显然是共形平直的, 也无奇异性. 求曲率标量得

$$\begin{aligned} R &= 0 \\ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \begin{cases} 6(Z + a_2)^{-3} & a_1 = 1/2, \\ \frac{12a_2^2}{(1 + a_2 Z)^3} & a_1 = -1/2; \end{cases} \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} &= \begin{cases} 24(Z + a_2)^{-4} & a_1 = 1/2, \\ 24a_2^2(1 + a_2 Z)^{-3} & a_1 = -1/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

显然曲率标量在 $Z \geq 0$ 的整个范围内都不发散, 时空没有奇点. 这时只要令

$$A_{\pm} = |Z|^{a_1} \pm a_2 |Z|^{-a_1}, \quad (28)$$

就可将这组解延拓到 $Z < 0$ 的空间, 而使整个空间成为最大而且完备的. 这与文献[2]的情况不同. 在那里仅 $V_3 \neq 0$ 的标量场产生的平面对称静态时空的线元为

$$ds^2 = Z^{\pm \frac{a_2}{a_1}} (-dT^2 + dZ^2) + Z(dX^2 + dY^2), \quad (29)$$

其中 a_1 和 a_2 是两个积分常数。当 $a_2 = a_1$ 且取“+”号时,

$$ds^2 = Z(-dT^2 + dZ^2) + Z(dX^2 + dY^2), \quad (30)$$

这是共形平直时空。根据文献[2]的分析,这时 $Z = 0$ 仍是时空的奇点。

5 通解的性质

下边讨论 $a_1 \neq \pm 1/2$ 时(23)式代表的时空的性质。首先,可以看出线元

$$ds^2 = A_+^2 [Z^{a_1-1/2} (-dT^2 + dZ^2) + Z(dX^2 + dY^2)], \quad (31)$$

$$ds^2 = Z^{a_1-1/2} (-dT^2 + dZ^2) + Z(dX^2 + dY^2). \quad (32)$$

代表的两个时空是共形的。文献[2]指出,当在(29)式中取“+”时,只能有 $a_2/a_1 \geq -1/2$ 。因此当在(29)式中取“+”时,它与(32)式代表的是同一时空。所以得到的时空与文献[2]的静态标量场产生的时空,即与线元(29)式代表的时空,当在(29)式中取“+”时,是共形的。

根据共形变换的性质^[3],可以求得在(32)式所代表的时空里,标曲率和标量场分别为

$$\bar{R} = 6a_1^2/Z^{a_1+3/2}, \quad \bar{V} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} A_+. \quad (33)$$

容易验证 $\bar{V}$ 适合标量场方程

$$\left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{6} \bar{R} \right] \bar{V} = 0. \quad (34)$$

以上用“-”表示(32)式所代表的时空的有关量。显然在(32)式所代表的时空里, $\bar{R} \neq 0$, 因而标量场 $\bar{V}$ 的能量动量张量 $\bar{T}_{\mu\nu}$ 也不再是无迹的。

其次,讨论时空的对称性。求解 Killing 方程

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \quad (35)$$

同样得到任何静态平面对称时空所具有四个 Killing 矢量,即代表 T, X, Y 三个方向平移对称性的 Killing 矢量 $(\partial/\partial T)^\mu, (\partial/\partial X)^\mu, (\partial/\partial Y)^\mu$ 和代表 $X-Y$ 平面上旋转对称性的 Killing 矢量 $(\partial/\partial \phi)^\mu = X(\partial/\partial Y)^\mu - Y(\partial/\partial X)^\mu$ 。另外,当 $a_1 = \pm 1/2$ 时,时空共形平直,也具有文献[2]得到的两个 Killing 矢量

$$(1) \xi^\mu = (X, T, 0, 0), \quad (2) \xi^\mu = (Y, 0, T, 0). \quad (36)$$

这与文献[2]的情况相同。

最后讨论通解的奇异性。用与文献[2]完全类似的分析知,当 $0 < |a_1| < 1/2$ 时,类时类光测地线均不能到达 $Z = 0$ 处。这时存在转折点 Z_1 ,当 $Z > Z_1$ 时,测地线可无限延伸而完备;而在 $T-Z$ 平面内的类光测地线可以到达 $Z = 0$,沿测地线仿射参数有限。这种类光测地线不完备。当 $|a_1| > 1/2$ 时,无论类时类光测地线均可到达 $Z = 0$,沿测地线仿射参数有限,因而测地线不完备。

为了确定 $Z = 0$ 是否是时空的内禀奇点,需要考察曲率标量在 $Z \rightarrow 0$ 时的性质。对(4)和(23)式所描写的时空,除 $R = 0$ 外, $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的表达式相当复杂。从它们的具体表达式很难直接看出其在 $Z \rightarrow 0$ 时的性质。因此这里不给出它们的具体表达

式而采用逐项分析的办法确定它们在 $Z \rightarrow 0$ 时的性质。因为

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = (g^{00}R_{00})^2 + 2(g^{11}R_{11})^2 + (g^{33}R_{33})^2 \quad (37)$$

和

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 8(g^{00}R_{010}^1)^2 + 4(g^{00}R_{030}^3)^2 + 4(g^{11}R_{121}^2)^2 + 8(g^{11}R_{131}^3)^2, \quad (38)$$

其中 Ricci 张量由(5)式给出,而独立的不为零的曲率张量为

$$\begin{aligned} R_{010}^1 &= R_{030}^3 = E'G'/4EG, \\ R_{030}^3 &= \frac{1}{2}[E'/E]', \\ R_{121}^2 &= -(G')^2/4EG, \\ R_{131}^3 &= R_{322}^2 = (G')^2/4EG - \frac{1}{2}[G'/E]' - E'G'/4E^2. \end{aligned} \quad (39)$$

(37),(38)式中每一项均非负,所以只要其中有一项发散,整个式子就发散。因此只要分析这两式中每一项的平方根就可以了。例如,对(37)式,根据(5)和(23)式可以求出

$$g^{11}R_{11} = -\frac{a_1A_+A_- + a_1^2(A_-^2 + A_+^2)}{Z^{6a_1^2+3/2}A_+^2}, \quad (40)$$

而

$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} A_-/A_+ = \lim_{Z \rightarrow 0^+} \frac{Z^{a_1} - a_2Z^{-a_1}}{Z^{a_1} + a_2Z^{-a_1}} = \begin{cases} +1 & a_1 < 0; \\ -1 & a_1 > 0. \end{cases} \quad (41)$$

所以

$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} g^{11}R_{11} = \lim_{Z \rightarrow 0^+} \frac{|a_1|(1-2|a_1|)}{Z^{6a_1^2+2a_1+3/2} + a_2^2Z^{6a_1^2-2a_1+3/2} + 2a_2Z^{6a_1^2+3/2}} \quad (42)$$

再注意到 $6a_1^2 \pm 2a_1 + 3/2 = 6(a_1 \pm 1/6)^2 + 4/3 > 0$ 和 $a_2 > 0$ 则得

$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} g^{11}R_{11} = \infty. \quad (43)$$

所以 $Z \rightarrow 0^+$ 时, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 发散。用(41)式对(38)式作同样分析得

$$\lim_{Z \rightarrow 0^+} g^{11}R_{121}^2 = \lim_{Z \rightarrow 0^+} \frac{(1-2|a_1|)^2}{4[Z^{6a_1^2+2a_1+3/2} + a_2^2Z^{6a_1^2-2a_1+3/2} + 2a_2Z^{6a_1^2+3/2}]} = \infty. \quad (44)$$

因此 $Z \rightarrow 0^+$ 时, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ 发散。由以上讨论可以看出,当 $a_1 \neq \pm 1/2$ 时, $Z=0$ 是(4)和(23)式代表的时空的奇点。对这种时空不可能通过解析延拓使不完备的测地线完备,这与文献[2]的情况类似。

[1] M. Wyman, *Phys. Rev.*, D24(1981), 839.

[2] 李奎增、梁灿彬,物理学报,40(1991),673.

[3] 李奎增,物理学报,42(1993),188.

[4] Jianzeng Li, *J. Math. Phys.*, 33(1992), 3506.

[5] M. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago, U. S. A. 1984), pp. 445—449.

[6] L. Parker, in *Recent Developments in Gravitation*, Cargèse 1978, edited by M. Levy and S. Deser (Plenum, New York, 1979), p. 219.

[7] J. Frøyland, *Phys. Rev.*, D25(1982), p. 1470.

[8] D. Kramer *et al.*, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980), p. 459.

STATIC SPACETIMES OF STATIC PLANE-SYMMETRIC SCALAR FIELD WITH TRACELESS ENERGY- MOMENTUM TENSOR

QIANG WEN-CHAO

*(Department of Fundamental Course, Xi'an University of Architecture and
Technology, Xi'an 710055)*

(Received 8 November 1994)

ABSTRACT

The general static plane-symmetric metric yielded by static plane-symmetric scalar fields with traceless energy-momentum tensor has been found. The conformal property, symmetries and singularities are investigated. This general metric includes two special metrics describing nonsingular spacetimes.

PACC: 0420; 0440