

混沌的自适应控制

童 培 庆

(南京师范大学物理系, 南京 210024)

(1994年2月14日收到)

提出了控制二维动力学系统中分岔和混沌的自适应方法, 给出了控制强度的选取方法. 并且对两个动力学系统——Henon 映射和强迫布鲁塞尔振子的分岔和混沌进行了控制, 取得了很好的结果. 最后, 将此方法与 (OGY) Ott, Grebogi, Yorke 缩写为控制方法进行了比较, 讨论了将此方法推广到高维系统以及方程未知的动力学系统的可能性.

PACC: 0545

1 引 言

随着参数的变化, 非线性动力学系统的运动状态由于失稳而出现分岔以及混沌状态是非常普遍的现象^[1-3]. 然而对实际的系统, 出现分岔和混沌往往是不希望的, 有时甚至是有害的. 因而人们期望能够找到一些方法来控制系统中的分岔和混沌行为. 另一方面, 当系统处在混沌状态时, 它包含有各种各样的失稳的周期、准周期运动. 如果能够找到一些方法把系统从混沌运动状态变到所希望的周期、准周期运动状态, 那就为混沌的利用(或更广义地非线性的利用)提供了一些方法. 由于这两个原因, 混沌的控制是当前非线性研究领域中的一个较活跃的研究领域. 目前已经提出了一些特殊的控制方法^[4-8]. 如 Ott, Grebogi 和 Yorke 的参数微调方法^[4](简称 OGY 方法). 最近, 倪皖荪等^[9]应用自适应方法对一维 Logistic 映射中的分岔和混沌进行了控制, 解析地给出了收敛条件和收敛区域, 而且讨论了自适应方法与 OGY 方法的关系. 本文将自适应方法应用到二维动力学系统. 给出其收敛条件, 并且给出两个控制的例子.

2 自适应控制方法

考虑一个二维动力学系统,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f_x(x_n, y_n, p); \\y_{n+1} &= f_y(x_n, y_n, p),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 p 是系统的参数, 设系统(1)式在参数 $p = p_0$ 处有不稳定不动点 (x_F, y_F) , 即

$$\begin{aligned}x_F &= f_x(x_F, y_F, p_0); \\y_F &= f_y(x_F, y_F, p_0),\end{aligned}\tag{2}$$

那么把系统(1)式控制到不动点 (x_F, y_F) 的自适应控制方法就是构造如下的参数可变的

叠代:

$$x_{n+1} = f_x(x_n, y_n, p_n); \quad (3a)$$

$$y_{n+1} = f_y(x_n, y_n, p_n); \quad (3b)$$

$$p_{n+1} = p_0 - \sigma_x(x_{n+1} - x_F) - \sigma_y(y_{n+1} - y_F), \quad (3c)$$

其中 σ_x, σ_y 称为控制强度, 由 (3c) 式可得

$$p_n - p_0 = -\sigma_x(x_n - x_F) - \sigma_y(y_n - y_F).$$

在线性近似之下由 (3a), (3b) 式可得

$$x_{n+1} - x_F = (f_{x,x} - \sigma_x f_{x,p})(x_n - x_F) + (f_{x,y} - \sigma_y f_{x,p})(y_n - y_F);$$

$$y_{n+1} - y_F = (f_{y,x} - \sigma_x f_{y,p})(x_n - x_F) + (f_{y,y} - \sigma_y f_{y,p})(y_n - y_F),$$

其中

$$f_{x,x} = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{x_F, y_F, p_0}, \quad f_{x,y} = \left. \frac{\partial f_x}{\partial y} \right|_{x_F, y_F, p_0},$$

$$f_{x,p} = \left. \frac{\partial f_x}{\partial p} \right|_{x_F, y_F, p_0}, \quad f_{y,x} = \left. \frac{\partial f_y}{\partial x} \right|_{x_F, y_F, p_0},$$

$$f_{y,y} = \left. \frac{\partial f_y}{\partial y} \right|_{x_F, y_F, p_0}, \quad f_{y,p} = \left. \frac{\partial f_y}{\partial p} \right|_{x_F, y_F, p_0}$$

由此可得线性近似下,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} - x_F \\ y_{n+1} - y_F \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_n - x_F \\ y_n - y_F \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} f_{x,x} - \sigma_x f_{x,p} & f_{x,y} - \sigma_y f_{x,p} \\ f_{y,x} - \sigma_x f_{y,p} & f_{y,y} - \sigma_y f_{y,p} \end{pmatrix}.$$

要使 (x_{n+1}, y_{n+1}) 比 (x_n, y_n) 更接近 (x_F, y_F) . 则要求 R 的两个特征值 $\lambda_{\pm}$ 满足条件

$$|\lambda_{\pm}| < 1. \quad (5)$$

由此可确定收敛的控制强度 σ_x, σ_y .

3 例 1: Henon 映射

为了检验上述的控制方法, 讨论一个简单例子 Henon 映射,

$$x_{n+1} = p - x_n^2 + 0.3y_n; \quad y_{n+1} = x_n, \quad (6)$$

其中 p 为参数, 不动点为

$$x_F = y_F = \frac{1}{2}(-0.7 + \sqrt{0.49 + 4p}). \quad (7)$$

仅考虑一个不动点, 另一不动点可类似讨论. 相应的矩阵 R 为

$$R = \begin{pmatrix} -2x_F - \sigma_x & 0.3 - \sigma_y \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

R 的本征值方程为

$$\lambda^2 + (2x_F + \sigma_x)\lambda + \sigma_y - 0.3 = 0,$$

其根为

$$\lambda_{\pm} = -x_F - \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(x_F + \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 - \sigma_y + 0.3},$$

根据收敛条件 $|\lambda_{\pm}| < 1$, 再经过仔细分析可得到 $\sigma_x \sigma_y$ 平面中收敛的区域是由下列两条直线和一条抛物线所围成的区域:

直线 I: $\sigma_x + \sigma_y = -0.7 - 2x_F$;

直线 II: $\sigma_x - \sigma_y = 0.7 - 2x_F$;

抛物线 III: $\sigma_y = \left(\frac{\sigma_x + x_F}{2}\right)^2 + 0.3$.

应用上述的自适应方法对 Henon 映射中的分岔和混沌进行控制。对 Henon 映射, 其吸引子随参数 p 的变化如图 2 所示, 图 2 中虚线是失稳的不动点, 取参数 $p = p_0 = 1.152$, 此时 Henon 映射处于混沌状态, 其失稳的不动点为

$$x_F = y_F = 0.77893755363173,$$

根据收敛条件, 取 $\sigma_x = -2x_F$, $\sigma_y = 0$ 。此 (σ_x, σ_y) 在图 1 的收敛区域内。

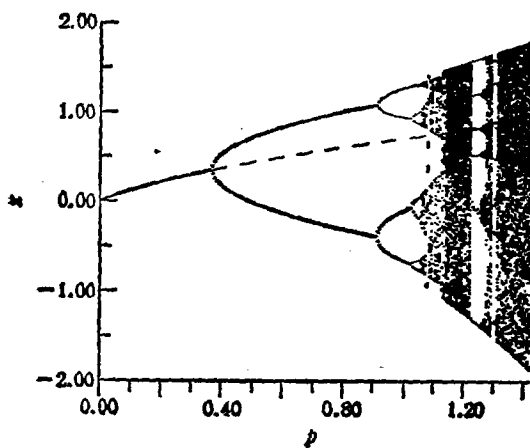


图 2 Henon 映射的吸引子随参数 p 的变化

$|p_n - p_0| < 10^{-10}$, $d(x_n, x_F) < 10^{-9}$ 。对其它选择的 σ_x, σ_y , 结果类似, 只是收敛的速度有所不同。

同 OGY 的控制方法所不同的是自适应方法不仅能够系统在混沌状态时把其运动状态控制到失稳的不动点上, 而且还能够在周期吸引子时把系统的运动状态控制到失稳的不动点上, 为此, 取 $p = p_0 = 0.501$, 这时系统的吸引子是两个稳定的不动点, 而不动点(7)式是失稳的。相应的值为

$$x_F = y_F = 0.4396201618499875.$$

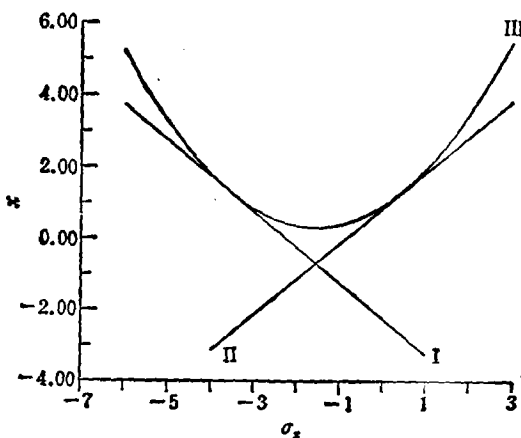


图 1 $p = 1.152$ 时, $\sigma_x \sigma_y$ 平面中的收敛区域

具体控制过程如下: 首先在给定的初始条件下, 应用方程(6)进行迭代, 略去瞬态过程之后, 考察系统点 $x_n = (x_n, y_n)$ 与不动点 $x_F = (x_F, y_F)$ 的距离 $d(x_n, x_F) = \sqrt{(x_n - x_F)^2 + (y_n - y_F)^2}$, 当 $d(x_n, x_F) < \epsilon$ 时应用迭代(3)式进行迭代。这样系统的参数随着 (x_n, y_n) 发生变化。对合适选取的 ϵ , 则经过(3)式的一些列迭代之后, 系统的 (x_n, y_n, p_n) 趋于 (x_F, y_F, p_0) 。图 3 给出了 $p = p_0 = 1.152$, $\epsilon = 10^{-1}$ 的控制结果。经过 20 步迭代之后 $|p_n - p_0| < 10^{-7}$ 以及 $d(x_n, x_F) < 10^{-6}$, 经 30 步迭代之后

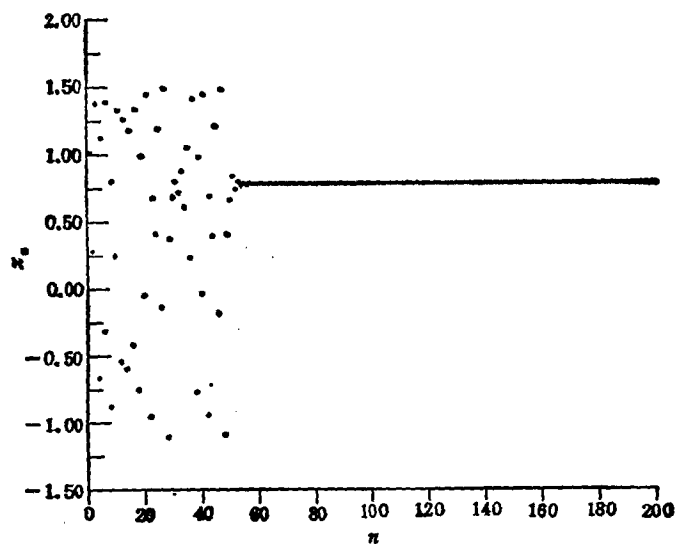
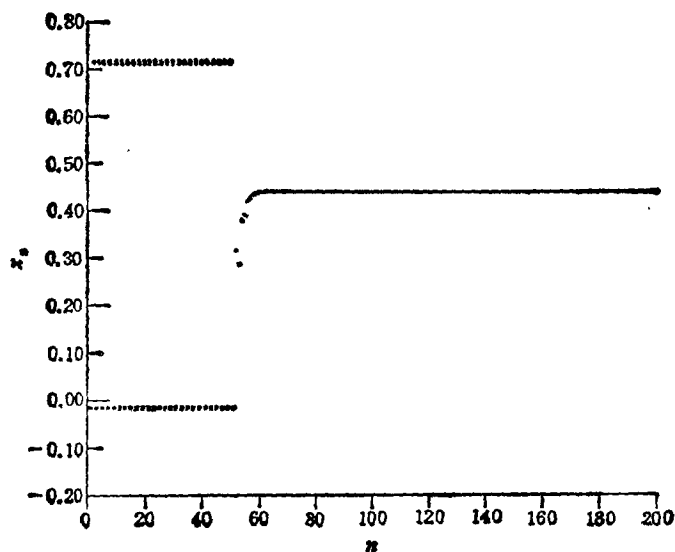
图3 对 Henon 映射 $p_1 = 1.152$ 时的控制结果图4 对 Henon 映射 $p_1 = 0.501$ 时的控制结果

图4给出了 $s = 1.0$, $\sigma_x = -2x_F$, $\varepsilon_y = 0$ 的控制结果。经过20步迭代之后

$$|p_n - p_0| < 10^{-8}, \quad d(x_n, x_F) < 10^{-7}.$$

4 例2: 强迫布鲁塞尔振子

在上面的例子中,将自适应方法应用到 Henon 映射中,对 Henon 映射,矩阵 R 可以解析求解。因而 σ_x, σ_y 平面内的收敛区域可以解析得到,在下面的例子中,将自适应方法应用到 R 无法解析得到的情况。

讨论的是强迫布鲁塞尔振子^[10]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= B - (A+1)x + x^2y + p \cos \omega t; \\ \frac{dy}{dt} &= Ax - x^2y.\end{aligned}\quad (8)$$

它是个非自治系统,在相空间 (x, y) 平面内不存在不动点,而只存在周期解。是所谓的极限环系统。对此系统,通常是研究其 Poincaré 截面 PS_n 上的行为, PS_n 上的点就是系统每隔 $\tau = mT_0 = m2\pi/\omega$ 之后取得点 $x_n = x(t = n\tau)$, $y_n = y(t = n\tau)$ 。这样动力学系统必变成 Poincaré 截面 PS_n 上的迭代,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f_x(x_n, y_n, p); \\ y_{n+1} &= f_y(x_n, y_n, p).\end{aligned}\quad (9)$$

系统(8)式的吸引子随参数 p 的变化已经得到了详细的研究^[10,11]。对参数 $A = 1.2$, $B = 0.4$, $\omega = 0.85$ 。当 $p > 0.0538$ 时系统的吸引子是一系列混沌带。我们对 $p = p_0 = 0.062$ 的系统进行研究。这时 PS_2 上失稳的不动点 (x_F, y_F) 及相应的 $f_{x,x}, f_{x,y}, \dots$ 等都可以通过确定不动点的牛顿法^[11]得到。结果如表 1 所示。

表 1 $p_0 = 0.062$ 时的不动点 (x_F, y_F) 及相应的物理量

物 理 量	数 值
x_F	0.3846778106190
y_F	3.2275686446873
$f_{x,x}$	-0.6935445321480
$f_{x,y}$	-0.4522168195464
$f_{x,p}$	0.2051933239988
$f_{y,x}$	-1.7520223494216
$f_{y,y}$	-1.1854129899902
$f_{y,p}$	-1.4477432852544

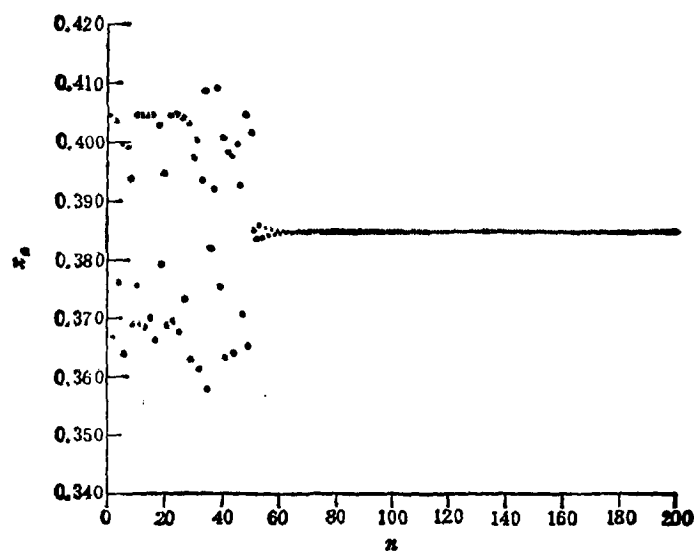
由表 1 的数值可以得到矩阵 R , 通过数值方法可以得到使 $|\lambda_{\pm}| < 1$ 的 σ_x, σ_y 。具体对 $p_0 = 0.062$ 的不动点。取 $\sigma_x = 1.4$, $\sigma_y = 0.8$, 相应的 $\lambda_{\pm}$ 为

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= -0.2632957847188641; \\ \lambda_- &= -0.7447377628141395.\end{aligned}$$

图 5 给出了控制的结果,其中参数 $\varepsilon = 10^{-2}$ 。

表 2 $p_0 = 0.044$ 时的不动点 (x_F, y_F) 及相应的物理量

物 理 量	数 值
x_F	0.3783718240995
y_F	3.2368630831736
$f_{x,x}$	-0.4789394436600
$f_{x,y}$	-0.4363220562631
$f_{x,p}$	0.5111980934392
$f_{y,x}$	-0.4874090242524
$f_{y,y}$	-0.6749179215504
$f_{y,p}$	0.2742023419433

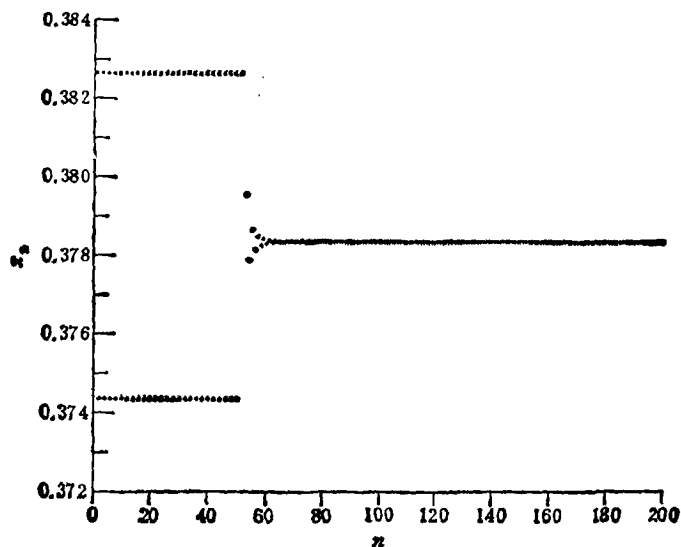
图 5 对布鲁塞尔振子 $p_0 = 0.062$ 时的控制结果

同样的方法可用来控制周期吸引子中的失稳的其它不动点,取参数 $p = p_0 = 0.044$, 这时系统具有稳定的周期 $4T_0$ ($T_0 = 2\pi/\omega$) 解, 在 PS_2 上是两个不动点, 而对应于周期 $2T_0$ 的解的不动点是失稳的。这个不动点 (x_F, y_F) 及相应的量由表 2 给出, 这时取 $\sigma_x = -0.48$, $\sigma_y = -0.48$ 。相应的 R 的本征值 $\lambda_{\pm}$ 为

$$\lambda_+ = -0.085246970612905;$$

$$\lambda_- = -0.691618249165536。$$

图 6 给出了控制的结果, 其中 $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$ 。

图 6 对布鲁塞尔振子 $p_0 = 0.044$ 时的控制结果

5 讨 论

1. 从上述的两个例子可以看到, 自适应方法可以有效地控制二维系统中的分岔和混沌行为。对于更高维数的动力学系统, 可以进行类似的讨论。例如, 对 m 维系统, 只需引入 m 维控制强度 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ 。通过合适选取的 σ 使得 $m \times m$ 维矩阵 R 的所有的 m 个本征值的绝对值都小于 1。

2. 上述的自适应方法也可以应用到不知道动力学方程的系统之中。例如, 对一系统可以测量的是某个物理量为 $x(t)$, 得到的测量时间序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 。则可以通过延时法重构 m 维矢量 $x_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$, 这样可以得到 m 维空间中的吸引子, 应用 Lathrop 和 Kostelich^[12] 的方法找出 m 维吸引子中的失稳的不动点以及相应的物理量, 这样可以用类似于例 2 中的方法进行控制。

3. 在上面的例子中, 我们看到 ε 是另一个重要的参数。它反映了在不动点附近多大的范围内的点可以被控制到这个不动点上。当 ε 很小时 $|p_n - p_0|$ 也非常小。但当 ε 较大时 $|p_n - p_0|$ 同样较大, 控制是不可能的, 这有两种可能: 一是 $|p_n - p_0|$ 越来越大而不收敛; 二是 $|p_n - p_0|$ 收敛到一个不为零的值。这是由于在导出(4)式时应用了线性近似。记最大的能够被控制到不动点的 ε 为 $\varepsilon_{\max}$ 。通常自适应方法的 $\varepsilon_{\max}$ 要比 OGY 方法的大。例如, 对强迫布鲁塞尔振子, $p_0 = 0.062$ 时, 对 $\varepsilon = 10^{-2}$ 直接应用 OGY 方法无法控制^[13]。但用自适应方法是可行的。这是由于 OGY 方法中 $\varepsilon_{\max}$ 只与不稳定不动点的特性(如 λ_u, λ_s 等)有关, 是不可调节的, 而对自适应方法 $\varepsilon_{\max}$ 除了与不动点特性有关, 还与 σ_x, σ_y 有关, 可以合适选择 σ_x, σ_y 使得 $\varepsilon_{\max}$ 尽可能大。倪皖荪等得到了一维自适应方法时的 $\varepsilon_{\max}$ ^[9]。但对二维及更高维系统, 这将非常复杂, 必须在(4)式中加进二阶项。我们将另文讨论。

4. 在某个参数时, 一旦 σ_x, σ_y 确定之后, $\varepsilon_{\max}$ 也定了, 这时只要有一个点 (x_n, y_n) 与不动点 (x_F, y_F) 的距离小于 $\varepsilon_{\max}$ 就能实行控制。当系统处在混沌状态时, 这种点是很容易得到的。但对周期吸引子的情况, 系统的吸引子只有几个点, 它们与失稳的不动点之间的距离往往大于 $\varepsilon_{\max}$, 这时对分岔的控制可以通过从分岔点逐步追踪的方法来达到^[9]。

感谢倪皖荪教授提供其论文的预印本及有益的讨论。

- [1] 郝柏林, 物理学进展, 3(1983), 329.
- [2] H. G. Schuster, Deterministic Chaos: An Introduction (VCH, Weinheim, 1988).
- [3] R. Z. Sagdeev, D. A. Vshiv, G. M. Zaslavsky, Nonlinear Physics From the Pendulum to Turbulence and Chaos (Harwood Academic Publishers, Switzerland, 1988).
- [4] C. Grebogi, E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett., 64(1990), 1196.
- [5] B. A. Huberman et al., IEEE Trans. Circuits and Systems, 37(1990), 547.
- [6] E. A. Jackson, Phys. Lett., A151 (1990), 478; E. A. Jackson et al., Physica, D44 (1990), 407.
- [7] R. Lima et al., Phys. Rev., A41 (1990), 726.
- [8] Y. Braiman and I. Goldhirsch, Phys. Rev. Lett., 66(1991), 2545.
- [9] W. S. Ni and T. F. Qin, Chin. Phys. Lett., 11(1994), 325.

- [10] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in nonequilibrium System* (Wilwy, New York, 1977); K. Tomita and T. Kai, *Progr. Theore. Phys. Suppl.*, **64**(1978), 280; *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 65; B. L. Hao and S. Y. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **28**(1982), 769; 王光瑞, 物理学报, **32**(1983), 960.
- [11] W. S. Ni, P. Q. Tong and B. L. Hao, *Inter. J. Mod. Phys.*, **B3**(1989), 643; B. L. Hao, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [12] D. P. Lathrop and E. J. Kostelich, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 4028.
- [13] 童培庆, 物理学报 (待发表).

SELF-ADAPTIVE CONTROL OF CHAOS

TONG PEI-QING

(Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210024)

(Received 14 February 1994)

ABSTRACT

The self-adaptive control method of bifurcation and chaos of twodimensional dynamical systems is suggested in this paper. The method of choosing control stiffness is given. This method is used to control the bifurcation and chaos of two dynamical systems, i. e. Henon map and forced Brusselator, and get good results. Finally, we compare the self-adaptive method with the OGY method, and discuss the possibilities of generalizing this method to high-dimensional dynamical system and the systems with unknown equations.

PACC: 0545