

一种分析自由电子激光场的新量子方法

程 亚 陈建文

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

(1994年12月9日收到)

将固体理论中的 LLP 变换用于研究自由电子激光场的量子态, 并求得了小信号增益. 这种新方法简捷且有助于深入地探讨自由电子激光场的量子特性.

PACC: 4255T

1 引言

多年来, 对自由电子激光理论的研究一直吸引着国内外众多学者^[1-7]. 其中经典方法和量子方法均得到广泛运用. 由于相对论电子的德布罗意波长远远小于光波波长, 在研究电子轨道, 辐射场的增益等特性时, 经典方法足够准确. 但是如果要研究辐射场的统计特性及其高阶相干性, 则必须用量子方法求出光场的波函数. 80年代初, Dattoli, Becker, Zubairy, Scully 等^[2-6]作了一系列这方面的工作. 这对于深入了解自由电子激光的性质, 扩展它的利用范围极有意义. 本文运用固体理论中的 LLP 变换重新研究了这个问题, 得到了与文献[3]相似的结论.

2 理论计算

选取 Bambini-Renieri 坐标系^[7], 在此坐标系中周期摇摆器磁场转变为与辐射场频率相同但传播方向相反的电场. 因而整个体系包括单个电子及两列行波, 并且将此时电子看作非相对论电子. 其哈密顿量为^[3,8]

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \hbar\omega(a_L^\dagger a_L + 1/2) + \hbar\omega(a_W^\dagger a_W + 1/2) + \hbar\Omega[a_L^\dagger a_W e^{-2i\hbar kx} + a_W^\dagger a_L e^{2i\hbar kx}], \quad (1)$$

其中 m 为电子质量; ω 为新坐标中辐射场及摇摆器磁场频率, 并有 $\omega = |k|c$, c 为光速, $\Omega = 2\pi c^2 \gamma_0 / \omega V$, γ_0 为实验室坐标系中电子初始相对论能量因子, V 为相互作用体积; P 为电子动量, $a_L^\dagger(w)$, $a_L(w)$ 分别是光场(摇摆器场)的产生和湮没算符.

选取么正变换^[9]

$$U = e^{2i\hbar k a_L^\dagger a_L x}, \quad (2)$$

显然, 有下列关系成立:

$$U^\dagger = U^{-1} = e^{-2i\hbar k a_L^\dagger a_L x}, \quad (3)$$

$$UPU^+ = \tilde{P} - 2\hbar a_L^\dagger a_L k, \quad (4)$$

$$U a_L U^+ = a_L e^{-2i\hbar k}, \quad U a_L^\dagger U^+ = a_L^\dagger e^{2i\hbar k}. \quad (5)$$

此么正变换在固体理论中被称为 LLP 变换。值得注意：由于电子动量只在 z 方向变化，(1)式实际上是一维哈氏量， P 也可写成： $i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ 。经过上述变换后， $\tilde{P}$ 不再是电子动量算符，而表示电子动量与两倍的辐射场动量之和。由于电子每发射(吸收)一个光子的同时必须吸收(发射)一个摇摆器场的虚光子从而失去(得到)两份动量，因而 $\tilde{P}$ 是守恒量。另外，么正变换后的算符本征值及平均值均不变。经过 LLP 变换后的哈氏量为

$$H_1 = UH_0U^+ = \frac{(\tilde{P} - 2\hbar a_L^\dagger a_L k)^2}{2m} + \hbar\omega(a_L^\dagger a_L + a_W^\dagger a_W + 1) + \hbar\Omega[a_L^\dagger a_W + a_W^\dagger a_L]. \quad (6)$$

取海森堡表象 (HP)。假设初始时刻不存在辐射场，即 $a_L^\dagger a_L(0) = 0$ ，则 $\tilde{P} = P_0$ 。为电子初始动量。代入上式，有

$$H_1 = \frac{P_0^2}{2m} - \frac{4a_L^\dagger a_L P_0 \hbar k}{2m} + \frac{4a_L^\dagger a_L (\hbar k)^2}{2m} + \hbar\omega(a_L^\dagger a_L + a_W^\dagger a_W + 1) + \hbar\Omega[a_L^\dagger a_W + a_W^\dagger a_L]. \quad (7)$$

上式略去了表征高阶光子耦合的 $a_L^{\dagger 2} a_L^2$ 项(参见文献[9])。 $a_L^\dagger$ 的海森堡方程为

$$a_L^\dagger = \frac{i}{\hbar}[H_1, a_L^\dagger] = i(\omega - \delta + \epsilon)a_L^\dagger + i\Omega a_W, \quad (8)$$

令

$$\omega' = \omega - \delta + \epsilon, \quad (9)$$

其中 $\delta = 2\omega P_0/mc$ ， $\epsilon = 2\hbar k^2/m$ 。上式的共轭方程即是 a_L 的海森堡方程。按文献[3, 7, 8]等作如下近似，因摇摆器磁场强度非常大，意味着 $a_L^\dagger a_L \ll a_W^\dagger a_W$ 。所以可以认为 $a_W^\dagger a_W$ 是不变常数。(如果考虑到此磁场由强大电功率维持该近似更为合理。)此时应有

$$a_W^\dagger a_W \approx A_W^* A_W = n_{U_0}, \quad (10)$$

及

$$A_W^* = \sqrt{n_{U_0}} e^{i\omega' t}, \quad (11)$$

其中 n_{U_0} 为初始时刻 Bambini-Renieri 坐标系中摇摆器磁场转变成的总虚光子数， A_W 是算符 a_W 近似看成可对易 C 数时的对应。由于在海森堡表象中，故(11)式引入时间因子。将(11)式代入(8)式后，即可解得

$$\begin{aligned} a_L^\dagger(t) &= i\Omega \sqrt{n_{U_0}} \int_0^t e^{i\omega'(t-\beta)} e^{i\omega\beta} d\beta + a_L^\dagger(0) e^{i\omega' t} \\ &= \Omega \frac{[1 - e^{i(-\delta+\epsilon)t}]}{(\delta - \epsilon)} + a_L^\dagger(0) e^{i\omega' t} \\ &= 2\Omega \frac{i}{(-\delta + \epsilon)} \sin [(-\delta + \epsilon)t/2] e^{i(-\delta+\epsilon)t/2} + a_L^\dagger(0) e^{i\omega' t}, \end{aligned} \quad (12)$$

$a_L^\dagger(0)$ 为初始时刻海森堡表象下的产生算符，同时也是薛定谔表象内任何时刻的产生算符。上式恰好是量子光学中相干态的形式。令

$$f^* = 2\Omega \frac{i}{(-\delta + \epsilon)} \sin [(-\delta + \epsilon)t/2] e^{i(-\delta+\epsilon)t/2}, \quad (13)$$

其中 $\Omega_s = \Omega \sqrt{n_0} e^{i\omega_s t}$ 。为了得到光子计数的信息, 须从海森堡表象转到薛定谔表象 (SP)。两者间的关系由么正变换 U' 联系。 U' 可分解为两个么正算符的乘积^[10], 为

$$U' = e^{(f a^\dagger(0) - f^* a(0))} e^{i a^\dagger(0) a(0) \omega_s t} \\ = e^{-\frac{ff^*}{2}} e^{f a^\dagger(0)} e^{-f^* a(0)} e^{i a^\dagger(0) a(0) \omega_s t} \quad (14)$$

如前所设, 初始光场为真空态, 则在薛定谔表象中波函数可写为

$$|\phi\rangle = U'|0\rangle \\ = e^{-\frac{ff^*}{2}} e^{f a^\dagger(0)} e^{-f^* a(0)} e^{i a^\dagger(0) a(0) \omega_s t} |0\rangle \\ = e^{-\frac{ff^*}{2}} e^{f a^\dagger(0)} |0\rangle \\ = e^{-\frac{ff^*}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{l!}} (f)^l |l\rangle, \quad (15)$$

$|0\rangle$ 为真空态。因此末态 $|\phi\rangle$ 中光子数为 l 的概率为

$$C_l = \frac{1}{l!} e^{-ff^*} (ff^*)^l. \quad (16)$$

如果略去 f 中表示电子动量反冲的小量 σ , 此结果即是文献[3]中的方程(6)。文献[3]中是在略去整个电子动量的近似下得到此结果。而本文的近似则仅略去了(6)式中的高阶光子耦合项, 因此更为精确。由于避免了求解复杂的 Raman-Nath 方程 (RN)^[11,12], 使计算过程大大简化。

为了得到自由电子激光场的小信号增益表达式, 必须保留由于电子反冲造成的对光子分布的影响, 因而不能将高阶光子耦合项略去。这需要更精细地处理(6)式。假设初始时有一弱光场, 为相干态(见(25)式)。(6)式展开后则有

$$H_1 = \frac{P_1^2}{2m} - \frac{4a_L^\dagger a_L P_1 \hbar k}{2m} + \frac{4a_L^\dagger a_L a_L^\dagger a_L (\hbar k)^2}{2m} \\ + \hbar\omega(a_L^\dagger a_L + a_W^\dagger a_W + 1) + \hbar\Omega[a_L^\dagger a_W + a_W^\dagger a_L], \quad (17)$$

其中

$$P_1 = P_0 + 2\alpha^* \alpha \hbar k, \quad (18)$$

$\alpha^* \alpha$ 为初始平均光子数。由上式得到的 $a_L^\dagger$ 的海森堡方程为

$$a_L^\dagger = \frac{i}{\hbar} [H_1, a_L^\dagger] = i(\omega - \delta_1 + a_L^\dagger a_L s_1) a_L^\dagger + i\Omega a_W, \quad (19)$$

$$\delta_1 = \frac{2\omega P_1}{mc} + \sigma, \quad s_1 = 2\sigma, \quad (20)$$

上式的严格求解是困难的, 须要与其共轭式联立。但在小信号近似下, 可近似认为相互作用前后光子数变化不大, 即 $a_L^\dagger(t) a_L(t) \approx a_L^\dagger(0) a_L(0)$ 。代入上式后可解得

$$a_L^\dagger(t) = 2\Omega_s \frac{i}{(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L(0) s_1)} \sin [(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L(0) s_1)t/2] \\ \times \exp[i(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L(0) s_1)t/2] + a_L^\dagger(0) e^{i\omega_1 t}, \quad (21)$$

上式中 $\omega_1 = \omega - \delta_1 + s_1$ 。转移到薛定谔表象, 重复前面推导过程, 则近似可得(见附录 A)

$$U'_1 = e^{(f_1 a_L^\dagger(0) - f_1 a_L(0)) e^{i a_L^\dagger(0) a_L(0) \omega_L t}}, \quad (22)$$

$$|\phi\rangle = U'_1 |\phi(0)\rangle = e^{(f_1 a_L^\dagger(0) - f_1 a_L(0)) e^{i a_L^\dagger(0) a_L(0) \omega_L t}} |\phi(0)\rangle, \quad (23)$$

其中

$$f_1^* = 2\Omega_s \frac{i}{(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L'(0) \epsilon_1)} \sin [(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L(0) \epsilon_1) t/2], \\ \times \exp [i(-\delta_1 + a_L^\dagger(0) a_L(0) \epsilon_1) t/2] \quad (24)$$

$|\phi(0)\rangle$ 为初始光场, 设为

$$|\phi(0)\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle. \quad (25)$$

为了计算小信号增益, 需要分别求出光场增加或减少光子的概率, 设为 W_1 和 W_2 . 两者均由跃迁振幅 S 决定, 即

$$S = \langle \phi(0) | U'_1 | \phi(0) \rangle. \quad (26)$$

从上式的展开式可以给出电子发射(吸收)任意个光子的概率. 从物理上看, 电子的单光子发射(吸收)过程是最主要的, 因而可将上式 U'_1 中的指数函数按 $a^+(0)a(0)$ 的幂展开至一阶项, 即可得

$$S \approx \langle \phi(0) | (1 + f_1 a_L^\dagger(0) - f_1^* a_L(0)) e^{i a_L^\dagger(0) a_L(0) \omega_L t} | \phi(0) \rangle, \quad (27)$$

得到 W_1 及 W_2 表达式分别为

$$W_1 = \left| \left(e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \right) \right. \\ \times f_1 a_L^\dagger(0) e^{i a_L^\dagger a_L \omega_L t} \left(e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m-1}}{\sqrt{(m-1)!}} |m-1\rangle \right) \Big|^2 \\ = 4 |\Omega_s|^2 e^{-|\alpha|^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2m-1}}{(m-1)!} \right] \left[\frac{\sin(-\delta_1 + (m-1)\epsilon_1)t/2}{(-\delta_1 + (m-1)\epsilon_1)} \right] \right]^2, \quad (28)$$

$$W_2 = \left| \left(e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^{m-1}}{\sqrt{(m-1)!}} \langle m-1 | \right) \right. \\ \times f_1^* a_L(0) e^{i a_L^\dagger a_L \omega_L t} \left(e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{(m)!}} |m\rangle \right) \Big|^2 \\ = 4 |\Omega_s|^2 e^{-|\alpha|^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2m-1}}{(m-1)!} \right] \left[\frac{\sin(-\delta_1 + m\epsilon_1)t/2}{(-\delta_1 + m\epsilon_1)} \right] \right]^2. \quad (29)$$

由于 $\epsilon_1 \ll \delta_1$, 故当 m 不很大时, 可认为 $\delta_1 - m\epsilon_1 \approx \delta_1$. 当 m 较大时, (28), (29) 式中的系数 $[|\alpha|^{2m}/(m-1)!]$ 以很快的速度收敛于零 (对弱光场 $|\alpha|$ 为一小量). 因此 (28), (29) 式中可将含变量 δ_1 的项提出求和号外. 从而对增益 G 有

$$G \propto W_2 - W_1 \\ \propto 4 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2m}}{(m-1)!} \right]^2 \left(\frac{\sin^2(-\delta_1 t)/2}{\delta_1^2} - \frac{\sin^2(-\delta_1 + \epsilon)t/2}{(-\delta_1 + \epsilon)^2} \right), \quad (30)$$

令 $\sigma_s = -\delta_1/2$. 立刻得到以下简单关系:

$$G \propto \frac{d}{d\sigma_0} \left(\frac{\sin^2 \sigma_0}{\sigma_0^2} \right) \quad (31)$$

(31)式即为众所周知的小信号增益表达式。

3 讨 论

首先分析 LLP 变换前后两表象间算符的关系。设变换前的表象为 O 表象, 后者为 L 表象。以动量算符 P 为例, 在 O 表象中表示电子的动量。在 L 表象中重写成 $\tilde{P}$ 后虽然其形式仍然为 $i\hbar\partial/\partial z$, 但却表示电子动量与两倍的辐射场动量之和。这一点由表象变换的基本关系即可看出。因

$$P|\phi_0\rangle = UPU^{-1}|\phi_L\rangle = (\tilde{P} - 2a_L^\dagger a_L k)|\phi_L\rangle. \quad (32)$$

$|\phi_{O(L)}\rangle$ 为 LLP 变换前(后)的波函数。上式意味着 P 的本征值 P_0 等于 $\tilde{P} - 2a_L^\dagger a_L k$ 的本征值 $\tilde{P}_0 - 2a_L^\dagger a_L k$, 所以有 $P_0 = \tilde{P}_0 - 2a_L^\dagger a_L k$ 。

同理, $a_L^\dagger$ 在 O 表象中表示动量为 k 的光子的产生算符, 而在 L 表象 $a_L^\dagger$ 则表示产生动量为 k 的光子的同时系统还失去两份动量。为了避免书写复杂, $a_L^\dagger, a_L$ 在两表象中用了相同的符号形式。

其次, 注意到本文及文献[3, 5, 8]均将摇摆器形成的虚光场近似为光子数不变。我们认为, 对静磁摇摆器, 这是符合实际的。但对电磁波摇摆器则不妥。借助于处理热库的朗之万方程可望解决这个问题。

4 结 论

本文用 LLP 变换研究了自由电子激光场的统计特性及小信号增益。结果表明这种新方法简单并具有较广泛的适用性。

5 附 录 A

(22)式严格成立的条件为 $f_1, f_1^\dagger$ 与 $a_L(0), a_L^\dagger(0)$ 均可对易。可以证明此条件虽不满足但却近似成立, 即

$$\begin{aligned} [a_L(0), f_1^\dagger] &= i\Omega_e \int_0^t e^{-i\theta(t-\beta)} \\ &[a_L(0), e^{i a_L^\dagger(0) a_L(0) a_1(t-\beta)}] d\beta \\ &= i\Omega_e \int_0^t [e^{i(-\delta + a_L^\dagger(0) a_L(0) a_1 + a_1)(t-\beta)} \\ &- e^{i(-\delta + a_L^\dagger(0) a_L(0) a_1)(t-\beta)}] a_L(0) d\beta. \end{aligned} \quad (A.1)$$

容易看出, 当 $\epsilon_1 \ll \delta_1$ 且相互作用时间不太长时, 上式趋向于零。因此可近似认为两者是对易的。类似地可以证明另三组对易关系。因此(22)式近似成立。

- [1] 荀三奎, 物理学报, 43(1994), 1441.
- [2] 张世昌, 物理学报, 43(1994), 225.
- [3] G. Dattoli *et. al.*, Proceeding of the 1984 Free Electron Laser Conference Castelgandolfo (Rome, 1984) p. 93.
- [4] W. Becker, M. S. Zubairy, *Phys. Rev.*, A25(1982), 2200.

- [5] G. Dattoli, M. Richetta, *Opt. Commun.*, **50**(1984), 165.
- [6] W. Becker, M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 475.
- [7] A. Bambini, A. Renieri, S. Stenholm, *Phys. Rev.*, **A19**(1979), 2013.
- [8] A. Bambini, S. Stenholm, *Opt. Commun.*, **30**(1979), 391.
- [9] 李正中, 固体理论(北京: 高等教育出版社, 1985), 第八章.
- [10] 郭光灿, 量子光学(北京: 高等教育出版社, 1990), 第三章.
- [11] P. Bosco, G. Dattoli, M. Richetta, *J. Phys.*, **A**, **17**(1984), L395.
- [12] P. Bosco, G. Dattoli, J. Gallardo, *J. Phys.*, **A**, **17** (1984), 2739.

A NEW QUANTUM METHOD FOR ANALYSING FREE ELECTRON LASER

CHENG YA CHEN JIAN-WEN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 9 December 1994)

ABSTRACT

This paper analyses the interaction among free electron, radiation and wiggler fields and gives the small signal gain expression by means of LLP transformation.

PACC: 4255T