

自由电子激光中空间电荷波的单电子分析

李 治 宽

(承德民族师范高等专科学校物理系, 承德 067000)

(1994年9月1日收到)

从单粒子模型理论出发,对考虑空间电荷的自由电子激光进行了分析,并提出了迭代计算方法。计算结果表明,自由电子激光中三波耦合的一次迭代解与已有结果一致,二次迭代解显示了空间电荷波有更复杂的结构。

PACC: 4255T; 4252

1 引 言

众所周知,通常的自由电子激光(FEL)大致分为 Compton 和 Raman 两种类型。Compton 型的 FEL 只考虑单个电子与场的相互作用; Raman 型的 FEL 要考虑散射波、泵波和空间电荷波的三波相互作用^[1]。为深入研究 FEL 的物理过程,两种类型的 FEL 都需要详细分析电子的运动状态。显然,单粒子理论适合分析 Compton 型的 FEL,但对于考虑空间电荷效应的 Raman 型 FEL,用此模型,仍能得到很好的结果^[2]。本文采用文献[3]的有关数据,用已有的公式进行了数值计算。电子在具有均匀导向场的 Wiggler 磁场中的运动方程是一组非线性微分方程,难以直接求得解析解,需要通过适当的近似去求解。本文提出 FEL 单粒子理论的迭代计算方法。一次迭代计算所得到的空间电荷密度波方程与文献[4]的结果一致。二次迭代计算的结果显示了三波耦合的更复杂的结构。并对其通解及有关问题进行了讨论。

2 数学物理方程

自由电子的运动方程和能量守恒方程为

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = -|e|\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = -|e|\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

式中 m_0 , e , $\mathbf{v}$ 和 γ 分别为电子的静质量、电量、速度和相对论洛伦兹因子, c 为真空中光速。其中的电磁场可表为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_w, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{B}_w$ 为 Wiggler 型的静磁场, $\mathbf{B}_i, \mathbf{E}_i$ 为相互作用区中的散射电磁场。在圆极化的假设下,从(1)和(2)式可得到电子纵向运动的摆方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z(t) = a \cos(\Omega t - \beta \Delta z + \phi), \quad (5)$$

式中 $\Delta z(t) = z(t) - v_0 t$, v_0 为电子的初始速度。由以上方程可求得 FEL 的增益表达式^[2]为

$$G(T) = G_0 f(\theta), \quad (6)$$

$$G_0 = \frac{2|e|^3 J l B_w^2 L^3}{m_0^3 \gamma^3 c^7},$$

$$f(\theta) = \frac{2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta}{\theta^3} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right), \quad (7)$$

式中 $\theta = \Omega T$, l 为 Wiggler 磁场的周期, B_w 为 Wiggler 磁场的振幅, J 为电流密度, $\Omega = \omega - \left(k + \frac{2\pi}{l}\right) v_0$, ω, k 分别为散射场的频率和波数, $T = L/c$, L 为相互作用区长度。

$f(\theta)$ 为未考虑空间电荷效应时, FEL 的增益函数,其随 θ 的变化情况如图 1 所示^[2]。

若考虑空间电荷的作用,并设空间电荷产生的场为 $\mathbf{E}_s$, 则(5)式可写为^[2]

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z(t) = a \cos(\Omega t - \beta \Delta z + \phi) + \frac{|e| E_{ss}}{m_0 \gamma^3}. \quad (8)$$

这时的增益公式变为

$$G(\theta, \theta_p) = G'_0 \frac{\theta \theta_p^2}{\theta_p^2 - \theta^2} \left[2 - 2 \cos \theta_p \cos \theta - \left(\frac{\theta_p}{\theta} + \frac{\theta}{\theta_p} \right) \sin \theta_p \sin \theta \right], \quad (9)$$

$$G'_0 = G_0 / \theta_p^2,$$

$$\theta_p = \omega_p T,$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 |e|^2}{m_0 \gamma^3}, \quad (10)$$

n_0 为电子密度, ω_p 为等离子体频率。归一化增益 $(G(\theta, \theta_p) / G'_0 \theta_p^2)$ 随 θ_p 的变化如图 2

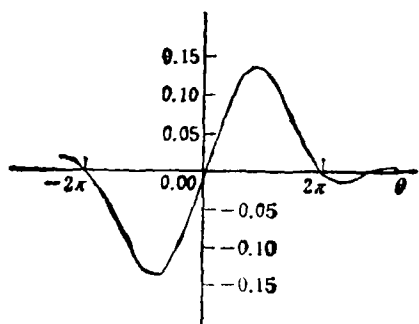


图1 未考虑空间电荷的增益函数 $f(\theta)$ 变化曲线

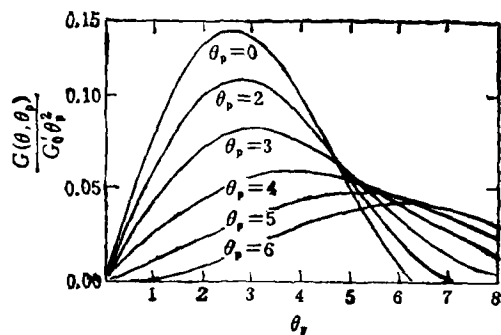


图2 归一化增益 $(G(\theta, \theta_p) / G'_0 \theta_p^2)$ 随 θ_p 的变化曲线

所示^[2]。

为了进行比较,我们采用文献[3]的一组数据进行了数值计算。已知参数如下:

加速器: 加速电压为 500keV, 电子能量因子为 1.98, 束流半径为 3mm, 束流强度为 1kA;

Wiggler: 周期 λ_w 为 10mm, 周期数 N 为 10, 磁场强度 B_w 为 1000G;

计算值: 增益 $(\text{Im}k)_{\max}$ 为 0.11cm^{-1} 。本文利用(6)式和图 1 计算的增益约为 0.21cm^{-1} , 利用(9)式和图 2 计算的增益约为 0.13cm^{-1} 。

为了进行下面的具体计算,设圆极化的散射波和 Wiggler 静磁泵波分别为

$$E_1 = E_1[\hat{e}_x \sin(k_1 z - \omega_1 t) + \hat{e}_y \cos(k_1 z - \omega_1 t)], \quad (11)$$

$$B_1 = B_1[\hat{e}_x \cos(k_1 z - \omega_1 t) - \hat{e}_y \sin(k_1 z - \omega_1 t)], \quad (12)$$

$$E_1 = -\frac{\omega_1}{k_1 c} B_1, \quad (13)$$

$$B_w = B_w[\hat{e}_x \cos k_w z + \hat{e}_y \sin k_w z]. \quad (14)$$

设空间电荷引起的场为

$$E_s = E_s \hat{e}_x, \quad (15)$$

导引磁场为

$$B_s = B_s \hat{e}_x, \quad (16)$$

式中 $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ 分别表示 x, y, z 方向的单位矢量, 用 ω, k 及其下标 1, W, s 等分别表示不同的波频率和波数。将(11)–(16)式代入(1)和(2)式,得

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = & -\frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0^3} \left[-\frac{\omega_1}{k_1 c} B_1 \sin(k_1 z - \omega_1 t) \right] \\ & - \frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0 c} [v_y B_s - v_z (B_w \sin k_w z - B_1 \sin(k_1 z - \omega_1 t))], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} = & -\frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0^3} \left[-\frac{\omega_1}{k_1 c} B_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t) \right] \\ & - \frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0 c} [v_x (B_w \cos k_w z + B_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t)) - v_z B_s], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} = & -\frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0^3} E_s - \frac{|e|\hbar}{m_0 \gamma_0 c} [v_x (B_w \sin k_w z - B_1 \sin(k_1 z - \omega_1 t)) \\ & - v_y (B_w \cos k_w z + B_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t))]. \end{aligned} \quad (19)$$

以上三式中均取 $\gamma \approx \gamma_0$ 。

3 一次迭代和二次迭代计算结果

由 v_{s0} 通过(17)–(19)式求出 $v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, v_z^{(1)}$ 的过程, 我们称为一次迭代; 由 v_{s1} 通过(17)–(19)式求出 $v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}$ 的过程称为二次迭代。

一次迭代计算的结果为

$$v_z^{(1)} = A^{(1)} \cos k_w z + B^{(1)} \cos(k_1 z - \omega_1 t), \quad (20)$$

$$\varphi_z^{(1)} = A^{(1)} \sin k_w z - B^{(1)} \sin (k_1 z - \omega_1 t), \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi_z^{(1)}}{dt} = -\frac{|e|}{m_0 \gamma_0^3} E_z = (B^{(1)} \omega_{cw} - A^{(1)} \omega_{c1}) \sin [(k_w + k_1)z - \omega_1 t], \quad (22)$$

$$A^{(1)} = \frac{\omega_{cw} v_{z0}}{\omega_c - k_w v_{z0}}, \quad (23)$$

$$B^{(1)} = \frac{\omega_{c1} \left(v_{z0} - \frac{\omega_1}{k_1 \gamma_0^2} \right)}{\omega_c - \Omega_1}, \quad (24)$$

$$\omega_c = \frac{|e|}{m_0 \gamma_0 c} B_0, \quad (25)$$

$$\omega_{cw} = \frac{|e|}{m_0 \gamma_0 c} B_w, \quad (26)$$

$$\omega_{c1} = \frac{|e|}{m_0 \gamma_0 c} B_1, \quad (27)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 - k_1 v_{z0}. \quad (28)$$

电子纵向速度的扰动引起空间电荷密度 ρ 及电流密度 J 的变化, 这可用连续性方程和泊松方程定量描述:

$$\text{由} \quad \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (29)$$

$$\text{得} \quad \frac{\partial J_z}{\partial z} = j\omega_1 \rho, \quad (30)$$

$$J_z = \rho_0 v_z + \rho v_{z0} \text{ (略去二级小量)}, \quad (31)$$

$$\rho_0 = -n_0 |e|, \quad (32)$$

n_0 为电子密度.

$$\text{由} \quad \nabla \cdot E_z = 4\pi\rho, \quad (33)$$

$$\text{得} \quad \frac{\partial E_{zz}}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (34)$$

为了方便, 将(22)式写成指数形式与(29)–(34)式联立求解, 可得到空间电荷波的基本方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - 2jk_c \frac{\partial \rho}{\partial z} - (k_c^2 - k_p^2)\rho = \frac{\rho_0}{v_{z0}^2} (k_w + k_1)(B^{(1)}\omega_{cw} - A^{(1)}\omega_{c1}) \\ \cdot e^{j[(k_w + k_1)z - \omega_1 t]} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (35)$$

式中 c.c. 表示共轭值,

$$k_c = \frac{\omega_1}{v_{z0}}, \quad (36)$$

$$k_p = \frac{\omega_p}{v_{z0}}. \quad (37)$$

方程(35)与文献[4]的结果一致. 根据二阶非齐次微分方程的理论, 方程(35)的解为

$$\rho = C_1 e^{j(k_c + k_p)z} + C_2 e^{j(k_c - k_p)z} + C_3 e^{j(k_w + k_1)z}, \quad (38)$$

式中 C_1, C_2 为任意常数,

$$C_1 = \frac{K}{[(k_c + k_w) - (k_c + k_p)][(k_1 + k_w) - (k_c - k_p)]}, \quad (39)$$

$$K = \frac{\rho_0}{v_{z0}^2} (k_w + k_1)(B^{(1)}\omega_{cw} - A^{(1)}\omega_{c1})e^{-i\omega_1 t}. \quad (40)$$

由(38)式亦可得快慢空间电荷波的相速为

$$v_p = \frac{\omega_1}{k_c \pm k_p} = \frac{v_{z0}}{1 \pm \frac{\omega_p}{\omega_1}}. \quad (41)$$

设空间电荷所产生的场为静电波,其具体形式为

$$E_z = E_0 \cos(k_z z - \omega_s t), \quad (42)$$

则可得到由其产生的电子的纵向扰动速度的解为

$$v_{zs} = -\frac{|e|}{m_0 \gamma_0^3} \frac{B_s}{k_z v_{z0} - \omega_s} \sin(k_z z - \omega_s t). \quad (43)$$

将(43)式代入(17)和(18)式,考虑到关系式:

$$k_s = k_w + k_1, \quad (44)$$

$$\omega_s = \omega_1, \quad (45)$$

并设

$$\omega_s \approx k_z v_{z0}, \quad \omega_c \approx k_1 v_{z0} - \omega_1, \quad (46)$$

则由(17)和(18)式可解得

$$v_z^{(2)} = A^{(2)} \cos(k_1 z - \omega_1 t) + B^{(2)} \sin[(k_s + k_w)z - \omega_s t] \\ + C^{(2)} \sin[(k_s + k_1)z - (\omega_s + \omega_1)t], \quad (47)$$

$$v_z^{(2)} = -A^{(2)} \sin(k_1 z - \omega_1 t) - B^{(2)} \cos[(k_s + k_w)z - \omega_s t] + C^{(2)} \cos[(k_s + k_1)z - (\omega_s + \omega_1)t]. \quad (48)$$

系数 $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ 分别为

$$A^{(2)} = -\frac{1}{k_1 \gamma_0^2} \cdot \frac{\omega_c \omega_1}{\omega_c + k_1 v_{z0} - \omega_1}, \quad (49)$$

$$B^{(2)} = -\frac{1}{m_0 \gamma_0^3} \frac{|e| B_s \omega_{cw}}{\omega_c^2 - [(k_s + k_w)v_{z0} - \omega_s]^2}, \quad (50)$$

$$C^{(2)} = \frac{1}{m_0 \gamma_0^3} \frac{|e| B_s \omega_{c1}}{\omega_c^2 - [(k_s + k_1)v_{z0} - (\omega_s + \omega_1)]^2}. \quad (51)$$

将(47)和(48)式代入(19)式,得

$$\frac{dv_z^{(2)}}{dt} = \left(C^{(2)}\omega_{c1} - B^{(2)}\omega_{cw} - \frac{|e|}{m_0 \gamma_0^4} B_s \right) \cos(k_z z - \omega_s t) \\ - A^{(2)}\omega_{cw} \sin[(k_1 + k_w)z - \omega_1 t] \\ + (C^{(2)}\omega_{cw} - B^{(2)}\omega_{c1}) \cos[(k_s + k_1 + k_w)z - (\omega_s + \omega_1)t]. \quad (52)$$

用与一次迭代完全相同的步骤,将(52)式与(29)~(34)式联立,可得到二次迭代的空间电荷波的基本方程为

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - 2jk_c \frac{\partial \rho}{\partial z} - (k_c^2 - k_v^2)\rho$$

$$= \frac{\rho_0}{v_{z0}^2} A^{(2)} \omega_{cw} (k_1 + k_w) e^{i[(k_1 + k_w)x - \omega_1 t]} + j \frac{\rho_0}{v_{z0}^2} (C^{(2)} \omega_{cw} - B^{(2)} \omega_{c1}) (k_c + k_1 + k_w) e^{i[(k_c + k_1 + k_w)x - (\omega_c + \omega_1)t]} + \text{c.c.}, \quad (53)$$

$$\text{式中} \quad k_p' = k_p^2 (1 - \varepsilon), \quad (54)$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_{c1}^2}{\omega_c^2 - [(k_c + k_1)v_{z0} - (\omega_c + \omega_1)]^2} + \frac{\omega_{cw}^2}{\omega_c^2 - [(k_c + k_w)v_{z0} - \omega_c]^2}, \quad (55)$$

(53)式的通解为

$$\rho = C_1 e^{i(k_c + k_p')x} + C_2 e^{i(k_c - k_p')x} + C_3 e^{i(k_1 + k_w)x} + C_4 e^{i(k_c + k_1 + k_w)x}, \quad (56)$$

式中 C_1, C_2 为任意常数, C_3, C_4 的表达式分别为

$$C_3 = \frac{\rho_0 A^{(2)} \omega_{cw} (k_1 + k_w) e^{-i\omega_1 t}}{v_{z0}^2 [(k_1 + k_w) - (k_c + k_p')][(k_1 + k_w) - (k_c - k_p')]}, \quad (57)$$

$$C_4 = \frac{j \rho_0 (C^{(2)} \omega_{cw} - B^{(2)} \omega_{c1}) (k_c + k_1 + k_w) e^{-i\omega_1 t}}{v_{z0}^2 [(k_1 + k_w) - (k_c + k_p')][(k_1 + k_w) - (k_c - k_p')]} \quad (58)$$

4 讨 论

1. 方程(35)实际可按二阶常微分方程求解, 其对应的齐次方程的特征根为 $j(k_c \pm k_p)$, 按二阶微分方程理论, 方程(35)的解将出现三种波. 二次迭代得到的方程(53)只是非齐次项不同, 其对应的齐次方程的形式未变, 其特征根仍为 $j(k_c \pm k_p')$ 的形式, 故其通解的结构未变, 其快、慢空间电荷波总是存在. 一次迭代中, 等离子体波是作为独立波出现的, 二次迭代的结果体现了三波耦合.

2. 修正值 ε 体现了散射波和泵波对等离子体频率的影响. 若考虑到 $B_w \gg B_1$, (55)式只有第二项. 若 $\omega_c^2 \gg \omega_{cw}^2 + [(k_c + k_w)v_{z0} - \omega_c]^2$, 即在高导向场区, $\varepsilon \approx 0$, $k_p' = k_p$.

3. 由(41)式看出, 快、慢空间电荷波的相速与相对论因子有关. 强相对论效应能使快波变慢, 慢波变快, 从而使电子的纵向群聚减弱.

4. 将方程 $\nabla \cdot E = 4\pi\rho$ 写成 $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho$ 是忽略了空间电荷所产生的场的横向部分, 并假设其纵向分量服从泊松方程.

- [1] 刘盛纲, 相对论电子学(科学出版社, 北京, 1987), 第13章.
- [2] C. C. Shih and A. Yariv, *Phys. Rev.*, **A22**(1980), 2717.
- [3] 封蓓波等, 物理学报, **41**(1992), 442.
- [4] 刘盛纲, 中国科学, (3)(1990), 307.

SINGLE-ELECTRON ANALYSIS OF THE SPACE-CHARGE WAVE IN FREE-ELECTRON LASERS

LI ZHI-KUAN

(Department of Physics, Chengde Teachers College of Nationalities, Chengde 067000)

(Received 1 September 1994)

ABSTRACT

In this paper, we analyse the effect of space-charge wave in free-electron lasers from the single-particle model theory. A iterative computing method is presented. The calculations have shown that the first step solution of the couples of three waves in free-electron lasers is in accordance with the result obtained; the second order solution shows a more complex structure of the space-charge wave.

PACC: 4255T; 4252