

驻波驱动的等离子体电子相对论 随机加速

周小兵 王志君 盛光昭

(核工业西南物理研究院, 成都 610041)

(1994年9月8日收到)

就电子在等离子体中被驻波随机加速的可能性和条件进行了分析和数值计算。分析结果表明: 等离子体中的电子在驻波场中的两个共振区的叠加导致电子的随机行为的产生。并估算了随机加速的阈值。数值计算了电子的随机加速的能量和随机加速的阈值。采用 Poincare 截面图技术, 跟踪了电子的随机运动的轨迹。

PACC: 5250; 0250; 5240D; 5260

1 引言

等离子体带电粒子加速器问题一直是等离子体物理和加速器物理研究中感兴趣的课题之一^[1]。要想将等离子体粒子加速到高能, 正规的加热(regular heating)须满足较苛刻的条件^[2]: (1)波沿与安培磁场方向成优化角 θ_m 方向传播^[3]; (2)严格满足考虑相对论效应后的 Doppler 共振条件: $\omega - \omega_c/\gamma - k_{\parallel}v_{\parallel} = 0$, 这里 ω, ω_c 分别为外加波频率和粒子回旋频率, γ 为相对论因子, $k_{\parallel}, v_{\parallel}$ 分别为平行于磁场方向的波矢分量和粒子的速度分量; (3)等离子体的折射率 $n = kc/\omega \approx 1$ 。任一条件的稍许破坏将会使波-粒相互作用迅速退耦, 从而限制粒子的加速。而实验上要想控制满足这些条件的等离子体参数比较困难。对波加热等离子体中观察到的各向异性速度分布尾部的隆起^[4,5]的分析^[6], 使得人们对波加速的另一可能机制——随机加速(stochastic acceleration)越来越感兴趣^[7-9]。人们对等离子体中单波驱动的带电粒子的随机加速问题已做了广泛的研究。不过, 近来人们开始转向等离子体中驻波场(双波)引起的带电粒子的随机加速。等离子体粒子加速器之所以引起人们的兴趣, 主要原因是由于其加速机制是随机加速, 从而在很短的时间标度内加速到很高的能量。本文在相对论正则哈密顿理论模型下, 就电子在驻波位形即由右手圆极化的驻波电磁场和均匀的引导磁场所组成的位形中的随机运动和随机加速问题进行了理论分析和数值计算。

2 物理模型

假定电子在如下场位形中运动: 引导磁场+驻波场。外加的引导磁场为 $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, $\hat{z}$ 为 z 方向的单位矢量。右手圆极化电磁驻波场由两个均垂直于引导磁场传播, 且彼此

传播方向相反的两个等幅度等频率的电磁波组成。驻波的极化方向位于 $\{x, y\}$ 平面。这样, 组合场的矢势为

$$\mathbf{A} = 2A \cos kz (-\sin \omega t \cdot \hat{e}_x + \cos \omega t \cdot \hat{e}_y) + x B_0 \hat{e}_y, \quad (1)$$

其中 k 为驻波的波数, $\omega/2\pi$ 为驻波的频率。电子的相对论哈密顿量为

$$H = m_0 c^2 \gamma = m_0 c^2 [(p/m_0 c + eA/m_0 c)^2 + 1]^{1/2}, \quad (2)$$

其中 m_0 为电子的静止质量, c 为光速, γ 为相对论因子, p 为正则动量。将 (1) 式代入 (2) 式后, 再经如下三个正则变换:

- 1) $F_1 = p'_x(x + p'_y/eB_0) + y p'_y + p'_z z;$
- 2) $p'_x = (2p_0 m_0 \omega_c)^{1/2} \cos \theta; x' = (2p_0/m_0 \omega_c)^{1/2} \sin \theta;$
- 3) $F_2 = p_\phi(\theta - \omega t) + p'_z z,$

这里第一个变换的目的是将为常数的 p_y 吸收入 x , 从而将四维空间约化为三维。第二个变换的目的是为进一步分析起见, 将 (p'_x, x') 正则变换成作用量——角变量 (p_θ, θ) 。第三个变换的目的是为了消去哈密顿量对时间的依赖关系。略去撇号后得到变换后电子的相对论哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= m_0 c^2 \gamma - \omega p_\phi, \\ \gamma &= \{1 + 2[m_0 \omega_c p_\phi + 2(2p_0 m_0 \omega_c)^{1/2} eA \cos kz \sin \phi \\ &\quad + 2e^2 A^2 \cos^2 kz]/m_0^2 c^2 + p_z^2/m_0^2 c^2\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

背景等离子体的色散关系为

$$n_x = kc/\omega = \{1 - \omega_{pi}^2/[\omega(\omega + \omega_{ci})] - \omega_{pe}^2/[\omega(\omega - \omega_{ce})]\}^{1/2}. \quad (4)$$

3 随机加速的理论分析

将 (3) 式按 $\varepsilon = eA/m_0 c$ (作为小参量处理) 展开至一阶, 即得

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (5)$$

$$H_0 = m_0 c^2 \gamma_0 - \omega p_\perp^2/(2m_0 \omega_c), \quad (6)$$

$$H_1 = \sum_{j=-1,1} \frac{c p_\perp j}{\gamma_0} \sin(kz + j\phi), \quad (7)$$

$$\gamma_0 = (1 + p_\perp^2/m_0 c^2 + p_z^2/m_0^2 c^2)^{1/2}, \quad (8)$$

其中 $p_\parallel = p_z, p_\perp = (2m_0 \omega_c p_\phi)^{1/2}$ 。由此得到共振条件

$$[kz|_0 + j\phi|_0] = 0 \quad (j = \pm 1),$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & (\omega/\omega_c)^2 (k^2 c^2/\omega^2 - 1) (p_\parallel/m_0 c)^2 + (2jk c/\omega_c) (p_\parallel/m_0 c) \\ & - (\omega/\omega_c)^2 (p_\perp/m_0 c)^2 + j^2 (1 - \omega^2/\omega_c^2) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $z|_0 = \partial H_0/\partial p_z, \phi|_0 = \partial H_0/\partial p_\phi, j = \pm 1$ 。由此我们得到了零阶哈密顿曲面 (6) 式和共振曲面 (9) 式。 $j = \pm 1$ 意味着电子在驻波场中存在着两个共振区。根据 Chirikov 判据^[9], 当这两个共振区发生重叠时, 电子的运动即为随机的。下面先利用 Chirikov^[9]所描述的标准方法来计算共振宽度, 然后计算两个共振之间的距离。显然, 当两个共振的共振半宽之和大于或等于两个共振之间的距离时, 共振叠加即已发生。为此, 首先假定两个共振相离很远, 从而每一个共振可以单独处理。单个共振区内电子的运动由以下哈密顿量

决定:

$$H = H_0 + \varepsilon(cj/\gamma_0)(2m_0\omega_c p_\phi)^{1/2} \sin(kz + j\phi), \quad (10)$$

其中 H_0 和 γ_0 分别由(6)式和(8)式给出。为了将 ϕ 从上述哈密顿函数中消去, 并将其化为更方便的形式, 再做两次正则变换:

$$4) F_3 = p_\phi(kz + j\phi) + p'_z z; \quad 5) F_4 = p\varphi'(\varphi + \pi/2).$$

这样, 哈密顿函数就成为一维的了:

$$H = H_0 + \varepsilon(cj/\gamma_0)(2m_0\omega_c j p_\varphi)^{1/2} \cos \varphi. \quad (11)$$

为了分析电子的 p_φ - φ 运动, 将(11)式沿 p_φ - φ 相平面内存在的驻点 $(p_{\varphi_0}, \varphi_0)$ 展开。驻点由下式确定:

$$\begin{aligned} \partial H_0 / \partial p_\varphi |_{p_{\varphi_0}} &= 0, \\ \partial H_0 / \partial \varphi |_{\varphi_0} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

由于(11)式所表示的哈密顿函数是偶然简并的 (accidentally degenerate)^[10], 因此只需将(11)式沿驻点 p_{φ_0} 展开。由(12)式得驻点值 p_{φ_0} 为

$$\begin{aligned} k p_{\varphi_0} / m_0 c &= -(p'_z / m_0 c + j\omega_0 / n_R \omega) \pm \{(\omega_c / n_R \omega)^2 \\ &+ [1 - \omega_c^2 / \omega^2 - 2j(\omega_c / n_R \omega)(p'_z / m_0 c)] / (n_R^2 - 1)\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

展开后得到的电子的微扰哈密顿量为

$$\Delta H = H(p_\varphi, \varphi) - H_0(p_{\varphi_0}, \varphi) = G(\Delta p_\varphi)^2 / 2 + \varepsilon F \cos \varphi, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta p_\varphi &= p_\varphi - p_{\varphi_0}, \\ F(p_{\varphi_0}) &= c j p_\perp / \gamma_0 |_{p_{\varphi_0}}, \\ G(p_{\varphi_0}) &= \partial^2 H_0 / \partial p_\varphi^2 |_{p_{\varphi_0}} = \omega^2 (n_R^2 - 1) / (m_0 c^2 \gamma_0) |_{p_{\varphi_0}}. \end{aligned} \quad (15)$$

(14)式表明, 电子在每个共振区内的运动类似于标准摆的运动, 包括了摆动、分界层运动和转动。其相空间的振荡幅度决定了共振半宽^[7, 8]

$$\Delta p_{\varphi \max} = 2|\varepsilon F / G|^{1/2} = 2\{|\varepsilon p_\perp m_0 c^2 / [\omega^2 (n_R^2 - 1)]|_{p_{\varphi_0}}\}^{1/2}. \quad (16)$$

由于变换 2) 要求 $p_\phi \geq 0$, 由变换 3) 和变换 4) 得 $j p_\varphi = p_\phi = p_\phi$ 。因此, $j = 1$ 时 $p_\varphi \geq 0$, $j = -1$ 时, $p_\varphi \leq 0$ 。由此及共振条件不难得出共振值(同驻点值), 并由此共振值即可得到两个共振之间的距离。共振间距 $\delta(k p_\varphi / m_0 c)$ 由表 1 给出, 其中

表 1 不同初始条件下两个共振之间的距离

$j = 1$		$S_1 \leq -T_1$		$ S_1 \leq T_1$
		$k p_\varphi / m_0 c = -S_1 + T_1$	$k p_\varphi / m_0 c = -S_1 - T_1$	
$j = -1$	$\delta(k p_\varphi / m_0 c)$			$k p_\varphi / m_0 c = -S_1 + T_1$
$S_2 \geq T_2$	$k p_\varphi / m_0 c = -S_2 + T_2$	$ S_1 - S_2 - T_1 + T_2 $	$ S_1 - S_2 + T_1 + T_2 $	$ S_1 - S_2 - T_1 + T_2 $
	$k p_\varphi / m_0 c = -S_2 - T_2$	$ S_1 - S_2 - T_1 - T_2 $	$ S_1 - S_2 + T_1 - T_2 $	$ S_1 - S_2 - T_1 - T_2 $
$ S_2 \leq T_2$	$k p_\varphi / m_0 c = -S_2 - T_2$	$ S_1 - S_2 - T_1 - T_2 $	$ S_1 - S_2 + T_1 - T_2 $	$ S_1 - S_2 - T_1 - T_2 $

$$\begin{aligned} p'_{zj} &= p_{z0} - k j p_{\phi_0}; s_j = p'_{zj} / m_0 c + j / n_R \alpha; \\ T_j &= \{[(n_R \alpha - 1 / n_R \alpha) - 2j(p'_{zj} / m_0 c)] / [\alpha n_R (n_R^2 - 1)]\}^{1/2}. \end{aligned}$$

两个共振重叠的 Chirikov 判据^[10]为

$$\delta_r = (\Delta p_{\varphi \max}|_{j=1} + \Delta p_{\varphi \max}|_{j=-1}) / \delta p_{\varphi} \geq 1,$$

即当波幅满足条件

$$\varepsilon \geq \{ \delta(k p_{\varphi} / m_0 c) / [2(|n_z^2 / (n_z^2 - 1) \cdot (2jk p_{\varphi} / n_z \alpha m_0 c)^{1/2} |_{j=1})^{1/2} + (|n_z^2 / (n_z^2 - 1) \cdot (2jk p_{\varphi} / n_z \alpha m_0 c)^{1/2} |_{j=-1})^{1/2}] \}^2 \quad (17)$$

时, 随机性即已产生。由(17)式可以估算随机性产生的阈值。

下面讨论经典极限。在经典极限($c \rightarrow \infty$)下, 由(1)式得

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t = E_{\omega} [\cos(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_x - \sin(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_y], \quad (18a)$$

$$\mathbf{B} = -B_{\omega} [\sin(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_x - \cos(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_y], \quad (18b)$$

其中 $E_{\omega} = \omega A$, $B_{\omega} = kA$ 。这样, $\varepsilon = eA/m_0 c = eB_{\omega}/m_0 k c$ 。由于 $p_{\phi} = j p_{\varphi}$, 故

$$\Delta p_{\phi \max} = j \Delta p_{\varphi \max};$$

由变换 4) 有 $p'_z = p_z - k p_{\varphi} = \text{常数}$, $\Delta p_{z \max} = k \Delta p_{\varphi \max}$, 由此得到共振速度的岛宽为

$$V_{z \max} = \Delta p_{z \max} / m_0 = 2\omega_b / k, \quad (19)$$

其中反弹频率 ω_b 为

$$\omega_b = \{ n_z^2 e k B_{\omega} V_{\perp} / [m(n_z^2 - 1)] \}^{1/2}, \quad (20)$$

其中 $V_{\perp}$ 为电子的垂直于引导磁场的速度。当 $n_z \gg 1$ 时, (20) 式即退化为以前得到的结果^[9, 10]。

4 数值计算

下面数值求解等离子体中电子的随机加速情况。为此, 先进行无量纲化变换, 即令 $H' = H/m_0 c^2$, $p'_z = p_z/m_0 c$, $p'_x = p_x/m_0 c$, $p'_y = p_y/m_0 c$, $z' = z\omega/c$, $\psi' = \psi\omega/\omega_c = \alpha\psi$, $\beta = \omega_p/\omega_0$, $T = \omega t$ 。这样, 由(3)式, 得到电子的相对论运动方程组为(略去撇号)

$$\dot{p}_{\phi} = -2\sqrt{2}\varepsilon(\gamma\alpha)^{-1}p_{\phi}^{1/2}\cos(\phi/\alpha)\cos(n_z z), \quad (21a)$$

$$\dot{\phi} = \gamma^{-1}[1 + \sqrt{2}\varepsilon p_{\phi}^{-1/2}\sin(\phi/\alpha)\cos(n_z z)] - \alpha, \quad (21b)$$

$$\dot{p}_z = 2\varepsilon n_z \gamma^{-1}[\sqrt{2}p_{\phi}^{1/2}\sin(\phi/\alpha)\sin(n_z z) + \varepsilon\sin(2n_z z)], \quad (21c)$$

$$\dot{z} = p_z/\gamma. \quad (21d)$$

其中 $\gamma = \{1 + 2p_{\phi} + p_z^2 + 4\sqrt{2}\varepsilon p_{\phi}^{1/2}\sin(\phi/\alpha)\cos(n_z z) + 2\varepsilon^2[1 + \cos(2n_z z)]\}^{1/2}$ 。

下面求解上述方程组以得到电子在相空间中的截面图及电子的随机加速的能量。采用 Adams 预估-校正法来求解。先用 Rung-Kutta 方法起步, 积分三步后, 采用 Adams-Bashforth 和 Adams-Moulton 公式相结合, 用变时间步长积分。由方程组 (21) 可以看出, 系统有四个独立变量, 选取 $\psi = 0$ 平面作为截平面, 将动力学问题约化到三维空间, 再将电子在此三维空间中的运动轨迹投影到某平面上, 如 $\{z, p_z\}$ 平面上, 即可得到 $\{z, p_z\}$ 平面上的截面图。下面的截面图是让电子连续穿过 $\psi = 0$ 平面 1500 次所得到的。当电子的截面图由正规图形变为无规图形时, 即表示电子的运动由正规运动向随机运动跃迁。图 1 给出初始条件为 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $p_{z_0} = 5.0$, $p_{\phi_0} = 30.0$, $\phi_0 = 0.0$, $z_0 = 0.0$ 的电子

在 $T = 500$ 以前所达到的最大能量 $\gamma_{\max}$ 以及达到此能量所需的时间 $T_{\max}$ 与波幅 ϵ

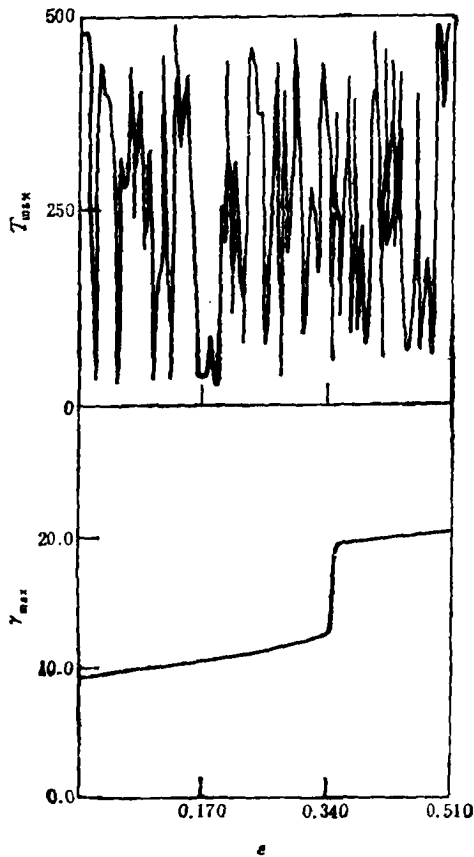
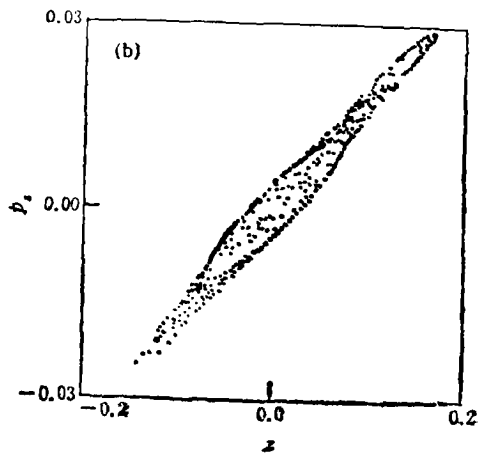
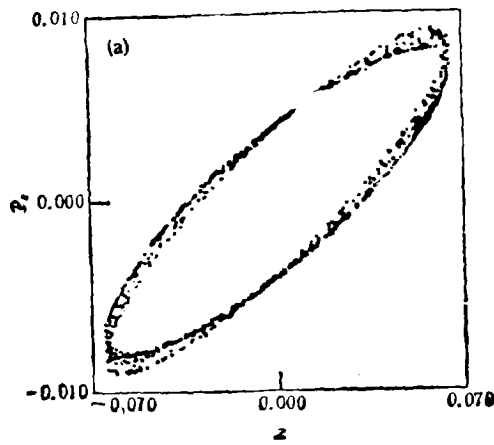


图1 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $p_{x_0} = 5.0$, $p_{y_0} = 30.0$, $z_0 = 0$, $\phi_0 = 0$ 初始条件下, $T = 500$ 以前电子能达到的最大能量 $\gamma_{\max}$ 及达到此能量所需的时间 $T_{\max}$ 与波幅 ϵ 的关系曲线

的关系。由此可以看出, ϵ 取不同值的各种情况下, 电子能量大都在 $T = 500$ 时刻以前就达到最大值。当 $\epsilon \geq 0.34$ 时, 电子的最大能量有一个突变。这与 Doveil 实验测得的电子的温度与驻波波幅的关系具有相似的结构^[11]。如果假定电子的平均能量与其最大能量成正比, 那么由 $\gamma_{\max}-\epsilon$ 关系曲线可以估计其随机加速的阈 $\epsilon = 0.34$ 。由(17)式得理论值 $\epsilon_{\text{阈}} = 0.3144$, 两者符合较好。图2给出 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $p_{x_0} = 0.004$, $p_{y_0} = 2.0$, $\phi_0 = 0.0$, $z_0 = 0.0$ 电子的截面图。由此可以清楚地看出, 随着驻波波幅的增加, 电子的运动由正规运动可以跃迁到完全随机的状态。与图1对应的 $\epsilon \geq 0.34$ 时的截面图呈现出与图2(c) 完全相似的结构, 意味着此时电子的运动是完全随机的。图3给出 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.15$, $p_{x_0} = \epsilon = 0.1$, $p_{y_0} = \{(1-\alpha) + [(\alpha-1)^2 + 5\alpha^2\epsilon^2/\alpha^2]^{1/2}\}/\alpha^2$, $\phi_0 = 0.0$, $z_0 = 0.0$ 电子的能量 γ 随时间 T 的变化曲线。与此对应的截面图与图2(c) 完全相似。不难看出, 电子在很短的时间内即获得最大值, 因而电子的这种随机加速是极其迅速的。这也许正是某些托



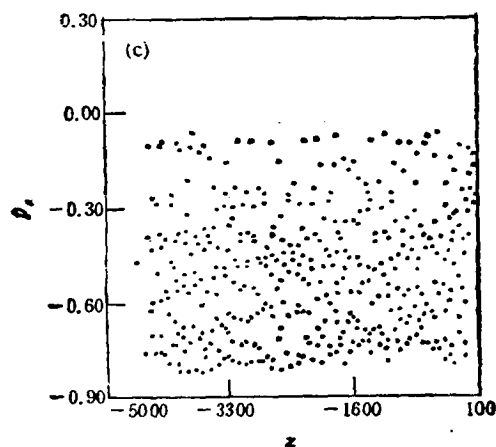


图2 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $n_{e0} = 0.004$, $p_{e0} = 2.0$, $z_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ 初始条件下电子的截面图 (a)–(c) 分别对应 $s = 3.1 \times 10^{-3}$; 3.5×10^{-3} ; 3.9×10^{-3}

卡马克及反场装置中观察到的反常粒子(离子或电子)加热的原因之一。电子加速到最大能量所需的时间很短,意味着电子加速所需的空间标度小,从而使得实验上进行这种等离子体随机加热成为可能^[1]。这不同于适合于天体等离子体随机加速的单波的情形^[2]。

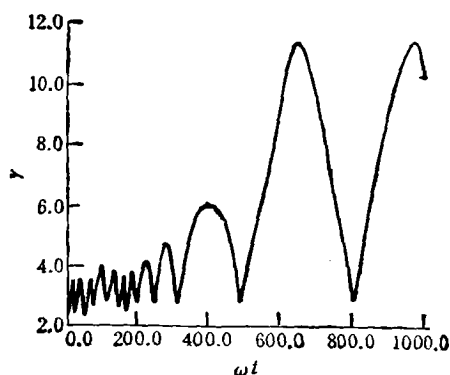


图3 被驻波随机加速的电子的相对论因子 γ 与时间 $T(=\omega t)$ 的关系 电子的初始条件为 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.15$, $p_{e0} = s = 0.1$, $p_{e0} = \{(1-\alpha) + [(\alpha-1)^2 + 5\alpha^2 e^2 / \alpha^2]^{1/2}\} / \alpha^2$, $z_0 = 0.0$, $\psi_0 = 0.0$

时间内能被加速到很高的能量,而与之对应的 Poincare 截面图表明此时的电子的运动是完全随机的。分析结果与计算结果比较表明:根据 Chirikov 判据所得到的随机性阈值与随机加速的阈值相符。驻波场中电子随机加速的时间标度很短意味着实验上进行这种等离子体随机加热确实是完全可能的。

5 结果与讨论

理论分析结果表明:处于驻波场中的等离子体电子由于存在着两个共振区,当这两个共振区发生重叠时,电子的运动即由正规运动跃迁到完全随机的状态,这有利于电子的加速。数值计算表明:当波幅增加到某一临界值(随机加速的阈值)时,电子在很短的

- [1] D. A. Bryant, R. Bingham and U. de Angelis, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1992), 37.
- [2] C. R. Menyuk, A. T. Drobot, K. Papadopoulos and H. Karimabadi, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 3768.
- [3] R. Sugihara, S. Takeuchi, K. Sakai and M. Matsumoto, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1500.
- [4] J. Jacquinet and the JETTeam, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **30**(1988), 1467.
- [5] L.-G. Eriksson *et al.*, *Nucl. Fusion*, **29**(1989), 87.
- [6] A. Becoulet *et al.*, *Phys. Fluids*, **B3**(1991), 137.

- [7] K. Akimoto and H. Karimabadi, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 1505.
- [8] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion* (Spring, New York, 1983).
- [9] Y. Gell and R. Nakach, *Phys. Fluids*, **B4**(1992), 368.
- [10] Y. Omura, M. Ashour-Abdalla, R. Gendrin and K. Quest, *J. Geophys. Res.*, **90**(1985), 8281.
- [11] F. Doveil, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 532.

RELATIVISTICALLY STOCHASTIC ACCELERATION OF ELECTRONS IN PLASMA DRIVEN BY A STANDING WAVE

ZHOU XIAO-BING WANG ZHI-JUN SHENG GUANG-ZHAO

(Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041)

(Received 8 September 1994)

ABSTRACT

The possibility and conditions of stochastic acceleration of an electron in plasma by a standing wave is discussed and numerically calculated. The analytical results show that the stochasticity of the motion of the electron is due to overlap of the two resonances imbedded in the interaction between the electron and the standing wave. The threshold of stochastic acceleration is evaluated analytically and numerically. The energy of stochastic acceleration of the electron is also calculated numerically with the trajectories of the electron being traced by using Poincare's surface-of-section plot technique.

PACC: 5250; 0250; 5240D; 5260