

强迫布鲁塞尔振子中混沌行为的控制

童培庆 赵灿东¹⁾

(南京师范大学物理系, 南京 210024)

(1994 年 1 月 21 日收到)

应用周期轨道确定技术找出了强迫布鲁塞尔振子的混沌吸引子中的不稳定周期轨道. 应用 Ott, Grebogi 和 Yorke 的参数微调方法, 使系统的运动状态由混沌变成所希望的周期运动. 并且研究了这种控制的稳定性. 最后提出了改进的控制方案, 得到了更稳定、更好的结果.

PACC: 0545

1 引 言

非线性动力学系统随着参数的变化而出现分岔以及混沌行为已得到了广泛的研究^[1-3]. 已发现多种普适的趋向混沌的道路, 例如: 倍周期分岔趋向混沌、阵发混沌以及准周期趋向混沌等. 同时对混沌运动的相空间区域——奇怪吸引子进行了详细的研究, 取得了相当丰富的成果. 在自然科学的各个领域以及工程应用中这种非线性系统到处可见. 然而这种系统中的混沌行为却是不希望的, 而且有时是有危害的. 因而人们期望能够通过系统的研究找到控制系统出现分岔和混沌的方法, 从而使系统能够保持所期望的运动状态. 另一方面研究表明^[4], 当一个非线性系统处于混沌运动状态时, 它包含有各种各样的不稳定周期运动. 如果能够成功地找到一种方法使得系统能够稳定到周期运动上, 那么就为利用混沌(或更广义地说利用非线性, 找到了一条道路, 因此混沌的控制是当前非线性研究领域中的一个热门的课题.

由于系统的混沌运动来源于决定性的微分方程(或叠代), 而不是完全的随机运动. 因而以往控制论中针对随机运动的方法在此不是特别有效. 但正是由于系统的特殊性, 人们尝试用特殊的方法来控制混沌. 1990 年, Ott, Grebogi 和 Yorke 提出了一种参数微调的方法^[5](简称 OGY 方法), 并且已被较成功地应用到一系列物理实验中^[6,7]. 本文将 OGY 方法应用到一类特别的动力学系统——强迫布鲁塞尔振子中, 并且针对控制中出现的失稳情况, 提出改进方法, 从而达到稳定控制混沌的目的.

2 强迫布鲁塞尔振子

本文所研究的非线性动力学系统——强迫布鲁塞尔振子最早是由比利时化学家普利

1) 南京师范大学物理系 93 届毕业生.

高津等人为描述振荡化学反应而提出的^[8],其具体形式为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = B - (A+1)x + x^2y + p \cos \omega t \\ \frac{dy}{dt} = Ax - x^2y \end{cases} \quad (1)$$

其中 A, B, p, ω 是系统的参数,它是一个二维非自治的一阶常微分方程组,此方程在二维相空间中不存在不动点,只存在周期解,因而是极限环系统。由于在 OGY 的控制方法中(下节介绍,需要系统存在不动点,因此直接在相空间中无法用 OGY 方法。为此我们研究方程(1)在 Poincare 截面上的行为。设方程(1)的解为 $(x(t), y(t))$ 我们每隔 $mT_0 = m \frac{2\pi}{\omega}$ (m 是自然数)时间之后取一点 (x_n, y_n) 即

$$\begin{cases} x_n = x(t = nT) \\ y_n = y(t = nT) \end{cases}$$

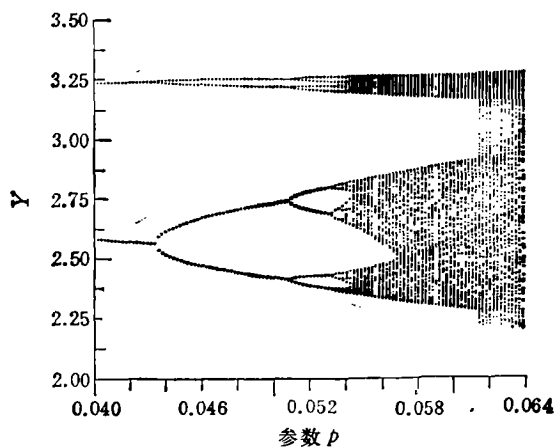


图1 Poincare 截面 PS_1 上吸引子随参数 p 的变化

而 $T = mT_0$, 这样方程(1)的解随时间的变化就给出了 Poincare 截面 PS_m 上的一个叠代, 而且方程(1)的周期解对应于 PS_m 上的一些不动点。图1给出了 $A = 1.2$, $B = 0.4, \omega = 0.85$ 时方程(1)的吸引子在 PS_1 (对应于 $m = 1$) 上 y_n 随参数 p 的变化。从图中可以看出当 $p < 0.0434$ 时其吸引子在 PS_1 上是两个点, 对应于方程(1)是一个周期为 $2T_0$ 的周期解; 当 $p > 0.0613$

时其吸引子在 PS_1 上是一个混沌带, 对应于方程(1)的解处于混沌状态。表1给出了各参数范围内稳定解的情况。图1具有明显的倍周期分岔结构, 当 $2^n T_0$ 周期的解是稳定

表1 不同参数时的运动状态

参数 p	吸 收 子	PS_1 上的情形
0.0394—0.0434	周期 $2T_0$ 轨道	2 个点
0.0436—0.0508	周期 $4T_0$ 轨道	4 个点
0.0510—0.0532	周期 $8T_0$ 轨道	8 个点
0.0534—0.0536	周期 $16T_0$ 轨道	16 个点
0.0538	混沌转变点	
0.0544—0.0566	4 片混沌带	4 个混沌带
0.0568—0.0613	2 片混沌带	2 个混沌带
0.0613	突变点	
0.0613—0.0628	1 片混沌带	1 个混沌带

解时, 则 $2^k T_0$ ($k < n$) 周期的解是失稳的。在 Poincare 截面上这些失稳的周期解对应

的不稳定不动点可由 Ni, Tong 和 Hao^[9] 提出的牛顿追踪法找出来。

3 OGY 的控制方法^[5]

OGY 方法的物理基础是在混沌吸引子中所有的周期轨道都是失稳的, 而且这些失稳的周期轨道在吸引子中处处稠密^[4]。考虑一个二维动力学系统 (对高维系统可类似讨论):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_x(x_n, y_n, p) \\ y_{n+1} &= f_y(x_n, y_n, p) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 p 是系统参数。OGY 方法可分为如下三步: 第一, 当系统在参数 $p = p_0$ 时处于混沌运动状态。在其混沌吸引子中找出所希望控制的失稳的不动点 (x_F, y_F) 。即

$$\begin{aligned} x_F &= f_x(x_F, y_F, p_0); \\ y_F &= f_y(x_F, y_F, p_0). \end{aligned} \quad (3)$$

由于 (x_F, y_F) 是不稳定的, 在二维空间中对的是一个鞍点, 因而存在一个稳定方向 e_s 和一个不稳定方向 e_u , 对应的本征值是 $\lambda_s (|\lambda_s| < 1)$ 和 $\lambda_u (|\lambda_u| > 1)$ 。其次, 观察系统 (2) 在某个初始条件下随时间的变化。根据遍历性理论, 当系统处于混沌状态时, 则一定有一些点充分接近 (x_F, y_F) 。因当某个 (x_n, y_n) 充分接近 (x_F, y_F) (即 $\sqrt{(x_n - x_F)^2 + (y_n - y_F)^2} < \varepsilon$) 时, 使参数从 p_0 变到 $p_0 + \Delta p$, 其中

$$\Delta p = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \cdot \frac{a_n \cdot f_u}{g \cdot f_s}, \quad (4)$$

且 $g = \left(\frac{\partial x_F}{\partial p} \Big|_{p_0}, \frac{\partial y_F}{\partial p} \Big|_{p_0} \right)$ 是不动点在 p_0 处随参数 p 的变化, f_s 是 e_s 的协变矢量, 即 $f_s \cdot e_s = 1, f_s \cdot e_u = 0, a_n = (x_n - x_F, y_n - y_F)$ 是 (x_F, y_F) 到 (x_n, y_n) 的位移矢量。在 (x_n, y_n) 点, 若根据 (4) 式得到的 Δp 满足 $|\Delta p| < p^*$ (p^* 是预先设立的量)。就以 $p_0 + \Delta p$ 当作新的参数值用 (2) 式叠代下一次从 (x_n, y_n) 得到 (x_{n+1}, y_{n+1}) 则有 $a_{n+1} \cdot f_s = 0$ (其中 $a_{n+1} = (x_{n+1} - x_F, y_{n+1} - y_F)$) 即 (x_{n+1}, y_{n+1}) 在 (x_F, y_F) 的稳定流形上。若上述条件 $|\Delta p| < p^*$ 不能满足, 则重新寻找另一 (x_n, y_n) 点, 直至此条件被满足。最后, 以原来的 p_0 为系统参数。由于 (x_{n+1}, y_{n+1}) 在 (x_F, y_F) 的稳定流形上。那么以后的叠代将依 λ_s 趋于 (x_F, y_F) 。

4 计算结果与讨论

对强迫布鲁塞尔振子, 我们取方程 (1) 中的参数 $A = 1.2, B = 0.4, \omega = 0.85$ 。这时由方程 (1) 得到的 Poincare 截面 PS_1 上的叠代随参数变化的行为如图 1 所示, 当 $p = p_0 = 0.062$ 时系统处于混沌运动状态。下面我们应用 OGY 方法在此参数值将其混沌运动控制到其中失稳的周期为 $2T_0$ 的轨道。为此我们作 $2T_0$ 的 Poincare 截面 PS_2 , 这样周期 $2T_0$ 轨道在此截面上对应于一个不动点。应用四阶龙格库塔对方程 (1) 进行数值积分, 然后每隔 $2T_0$ 取一点就构成 Poincare 截面 PS_2 。根据 Ni, Tong 和 Hao 提

出的方法可找出 $p = p_0 = 0.062$ 时混沌吸引子中失稳的周期 $2T_0$ 不动点 (x_F, y_F) 以及 λ_n, f_n, g 等, 结果如表 2 所示。

表 2 不动点 (x_F, y_F) 及相应的 λ_n, g, f_n

物 理 量	数 值
x_F	0.38467781061900
y_F	3.22756864468730
λ_n	-1.86293835417770
g_n	-0.37923765250081
g_y	0.96557220249371
$f_{n,x}$	-1.75202234942160
$f_{n,y}$	-1.16939382125290

在 $p = p_0 = 0.062$, 略去瞬态过程(前 1000 次叠代)之后, PS_1 上的叠代已进入混沌状态。然后观察 (x_n, y_n) 与 (x_F, y_F) 之间的距离, 当 $\sqrt{(x_n - x_F)^2 + (y_n - y_F)^2} < \varepsilon = 10^{-4}$ 时, 应用 OGY 方法进行控制, 结果如图 2 所示, 图 2 中的字母 A 为参数改变的地方。为了进行比较, 图 3 给出了未进行控制的叠代结果, 从这两个图中可以看到经过控制之后的叠代要比未经控制的叠代在不动点的时间要长, 实际上, 控制之后的 (x_{n+2}, y_{n+2}) 到 (x_F, y_F) 的距离比 (x_n, y_n) 到 (x_F, y_F) 的距离小一个数量级。由此可见通过 OGY 方法对参数进行一次微调之后, 能够改变系统的状态。但是从图 2 中我们还看到, 在经过一段时间之后, 系统仍然远离不动点。造成这种情况的原因主要有如下两点:

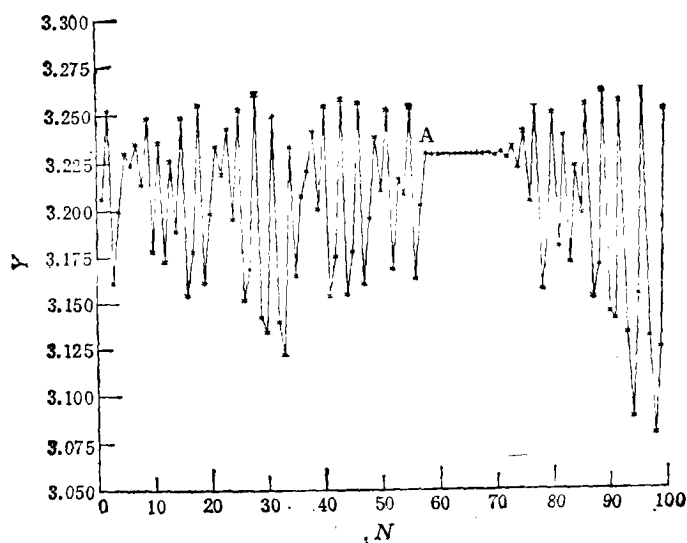
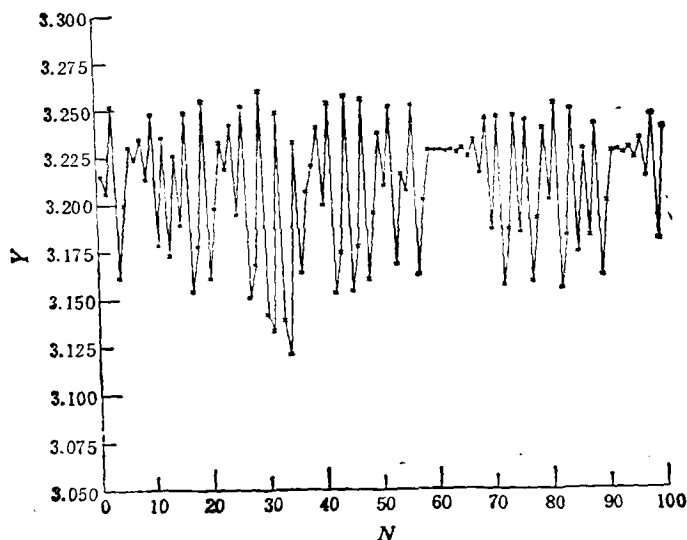


图 2 PS_1 上应用 OGY 方法控制的结果

第一, 在得到 OGY 的参数变化公式(4)时应用了线性近似, 只有当点 (x_n, y_n) 落在 (x_F, y_F) 附近的一个窄带:

$$|\alpha_n \cdot e_n| < \xi_* \quad (5)$$

图3 PS_2 上未经控制的结果

之中时,这种控制才能成立,而 ξ_* 与最大可调的参数值 p_* 之间的关系为

$$\xi_* = p_* |(1 - \lambda_*^{-1})g \cdot f_*|. \quad (6)$$

对于随机的初始点,它到达满足条件(5)式的区域中的时间 τ 有如下的分布:

$$P(\tau) \sim \exp(-\tau/\langle\tau\rangle), \quad (7a)$$

且

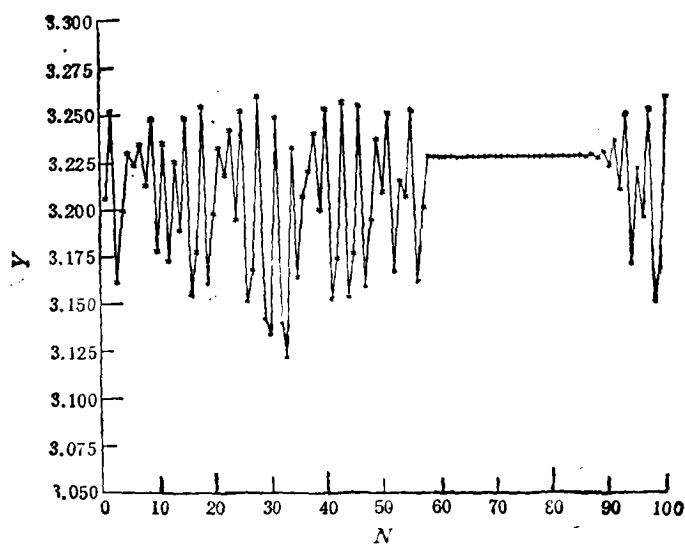
$$\langle\tau\rangle \sim p_*^{-\gamma} \quad \gamma = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln|\lambda_*|}{\ln|z_*|}. \quad (7b)$$

所以对实际的控制来说,为了达到好的控制结果,必须使 p_* 尽可能的小(也就是 ε 尽可能小)。而根据(7a),(7b)可知,对任一初值点要达到满足条件(5)式的区域所需的时间很长。这在实际应用中往往行不通。

第二,混沌吸引子中的不稳定不动点往往是通过数值方法近似得到的,它与精确的不动点之间存在着误差。由于不动点是不稳定的,因而即使以数值得到的不动点为初值,经过一段时间之后,运动的状态点仍会偏离真正的不动点。

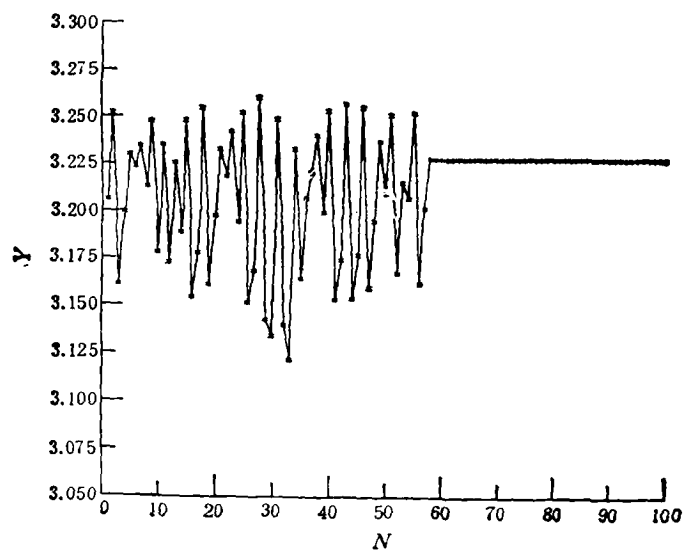
为了得到更稳定的控制结果,我们提出如下的两种方法:

方法一 多步法。这种方法的目的是使被控制的点尽量接近不稳定不动点。在参数 $p = p_0$ 时,当点 (x_n, y_n) 靠近 (x_F, y_F) , 即 $|a_n| < \varepsilon (a_n = (x_n - x_F, y_n - y_F))$ 时,应用 OGY 方法改变参数后,进行一次叠代得到 (x_{n+1}, y_{n+1}) 。随后由 (x_{n+1}, y_{n+1}) 在参数 $p = p_0$ 下再叠代得到 (x_{n+2}, y_{n+2}) 。则 $|a_{n+2}|$ 有可能大于,也可能小于 $|a_n|$ 。通常当 ε 较小时, $|a_{n+2}| < |a_n|$ 。这样当 $|a_{n+2}| < |a_n|$ 时,我们以 (x_{n+2}, y_{n+2}) 为新的起始点重复 OGY 的控制方法,如此下去,直至得到的点与 (x_F, y_F) 之间的距离达到所希望的精度。图4给出了控制的结果。当 $|a_n| < 10^{-4}$ 时,经过4次连续的参数控制之后得到的点与 (x_F, y_F) 间的距离小于 2×10^{-9} 。这样控制的结果比单步 OGY 方法要好的多。

图 4 PS_2 上多步控制的结果

当 $\varepsilon = 10^{-2}$ 时, 直接应用 OGY 方法进行单步控制后 $|\alpha_{n+2}|$ 约为 10^{-3} , 随后则马上离开不动点。但应用多步方法经过 8 次改变参数后, 得到的点与 (x_F, y_F) 的距离则小于 2×10^{-9} 。由此可见, 应用多步方法则可扩大控制范围。

方法二 随时控制方法。尽管经过连续多次应用 OGY 方法后, 得到的点与 (x_F, y_F) 间的距离可达到任意的精度, 但由于上述关于稳定性分析的两个原因, 一旦对系统不进行控制, 则系统的状态点总会离开不动点。这点可从图 4 中看出。为了得到稳定的结果,

图 5 PS_2 上随时控制的结果

我们随时对 (x_n, y_n) 与 (x_F, y_F) 的距离进行监测。当 $|\alpha_n| < \varepsilon$ (例如 $\varepsilon = 10^{-4}$) 时应方法一进行控制, 使得得到的点与 (x_F, y_F) 的距离小于一定的精度 (如 10^{-8})。随后不对

系统控制,但当以后的点与 (x_F, y_F) 的距离大于精度值(10^{-4})后,又进行多步控制,这样就可以把系统的运动状态点控制在 (x_F, y_F) 的某个精度之内。图 5 给出了这样控制的结果。

5 结 论

通过结合应用 Poincare 截面方法、周期轨道确定技术和 OGY 方法,我们成功地对极限环系统——强迫布鲁塞尔振子的混沌行为进行了控制,使其运动状态从混沌变成周期运动。通过计算发现,OGY 方法是非常方便而且控制的效率非常高。当 ε 较小时,参数的改变值 Δp 也较小。因而是一种切实可行的控制方法。我们对控制的稳定性进行了分析,提出了改进的多步和随时控制方法,得到了更稳定的控制结果。我们期望这些方法能够应用到其它的微分方程系统,而且能够控制到任意期望的运动状态,而不仅仅是周期运动。这方面工作正在进行之中。

- [1] 郝柏林,物理学进展,3,(1983),329.
- [2] H. G. Schuster, Deterministic Chaos: An Introduction, VCH, (Weinheim, 1988).
- [3] R. Z. Sagdeev, D. A. Vsikov, G. M. Zaslavsky, Nonlinear Physics From the Pendulum to Turbulence and Chaos, Harwood Academic Publishers (Switzerland, 1988).
- [4] C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev.*, **A37** (1988), 1711.
- [5] C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1196.
- [6] W. L. Ditto, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 3211.
- [7] A. Azevedo and S. Rezende, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1342.
- [8] G. Nicolis and I. Prigogine, Self-Organization in nonequilibrium System, (Wilwy, New York 1977).
K. Tomita and T. Kai, *Progr. Theore. Phys. Suppl.*, **64** (1978), 280, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979),65.
B. L. Hao and S. Y. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **28** (1982), 769. 王光瑞, 物理学报, **32**, (1983),960.
- [9] W. S. Ni, P. Q. Tong and B. L. Hao, *Inter. J. Mod. Phys.*, **B3** (1989), 643.
B. L. Hao, Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System (World Scientific, Singapore, 1989).

CONTROL OF CHAOTIC BEHAVIOR OF FORCED BRUSSELATOR

TONG PEI-QING ZHAO CAN-DONG

(Department of Physics, Nanjing Normal University Nanjing 210024)

(Received 21 January 1994)

ABSTRACT

The unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractor of forced Brusselator are found by periodic orbit locating technique. The chaotic dynamic states of system are forced to the desired periodic motion states by the small adjusting parameter method of OGY. The stability of control are discussed. Finally, we suggest the improved controlling methods and get better results of control.

PACC: 0545